Глава LXX

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ГРАФОВ

История становления теории графов интересна и поучительна.

Первая известная публикация была ответом на головоломку, подобную тем, которыми в разное время любили скрашивать свой досуг. Отнесясь к вопросу, поставленному в письме коллеги (о том, как именно можно пройти по семи мостам славного города Кёнигсберга) вполне серьезно, Леонард Эйлер, как он сам писал позже в одном из своих писем, «после долгих размышлений нашел простое правило», позволившее ему решить предложенную и значительно более сложные задачи, придуманные им самим. Однако несмотря на стремительно нарастающий научный авторитет Эйлера, эта публикация (*Euler L.* Solutio problematis ad geometriam situs pertinentes, Commentarii Academiae Petropolitanae. 8. 1736. P. 128–140) не привлекла внимания ни современных ему ученых, ни нескольких последующих поколений исследователей. Во всяком случае никаких следов проявления интереса к заявленной проблематике до 1856 года не замечено.

Придуманная тогда Уильямом Гамильтоном игрушка в виде утыканного гвоздиками деревянного додекаэдра также долгое время оставалась предметом досужих размышлений, и никто не думал, что через несколько десятков лет две эти развлекательные задачи займут достойное место в востребованной ныне теории графов (сам этот термин появился лишь в 1936 году).

Конечно, этой востребованности в немалой степени способствовали серьезные работы Густава Кирхгофа по исследованию электрических цепей и Артура Кэли при описании строения углеводородов, а также заметно увеличивавшийся поток задач, возникавших в различных областях науки и техники.

Оказалось, что при помощи графов можно вполне успешно моделировать и решать самые разнообразные задачи.

Все это потребовало обоснований, необходимость построения которых вылилась в новую теорию. Не были забыты ни Эйлер, ни Гамильтон. Их имена носят графы с весьма интересными свойствами.

Так и возникли два естественных направления работы с графами:

- первое — изучение свойств собственно графов (терминология, утверждения, доказательства, формулы, т. е. все, как и положено в любой математической теории),
- второе — применение графов в других науках и в прикладных задачах (вот только некоторые из них: деревья вероятностей и деревья решений, сетевые задачи: оценка временных затрат на выполнение больших проектов и пропускной способности различных коммуникаций, поиск кратчайших маршрутов и др.).

В этой небольшой главе мы постарались уделить внимание обоим из указанных направлений.

§ 1. Определения и примеры

Простым графом называется упорядоченная пара $G = \langle V, E\rangle$, где V — непустое конечное множество (элементы V — *вершины* графа); E — конечное множество неупорядоченных пар различных элементов V (элементы E — *ребра*[1] графа).

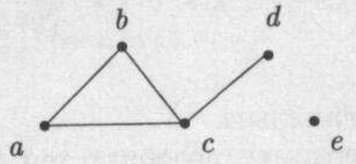


Рис. 1

Графы удобно представлять рисунками, в которых вершины изображаются точками, а ребра — линиями, соединяющими соответствующие точки[2]. Например, на рис. 1 изображен простой граф с множеством вершин $V = \{a, b, c, d, e\}$ и множеством ребер

$$E = \big\{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{c, d\}\big\}.$$

Граф — упорядоченная пара $G = \langle V, E\rangle$, где V — непустое конечное множество (элементы V — *вершины* графа); E — конечное *мультимножество* неупорядоченных пар элементов V (необязательно различных) (элементы E — *ребра*).

Термин *мультимножество* говорит о том, что элементы в E могут повторяться; повторяющиеся элементы называют *кратными ребрами*.

Если в графе имеется ребро $e = uv$, то говорят:

вершины u и v — *смежные*, или

ребро e *инцидентно* вершинам u и v; вершины u и v *инцидентны* ребру e, или

ребро e *соединяет* вершины u и v, или

вершины u и v — *концы* ребра e.

Два различных ребра называются *смежными*, если они имеют по крайней мере одну общую вершину. На рис. 2 изображен граф с множеством вершин $V = \{a, b, c, d, e\}$ и мультимножеством ребер E: ab, ac, ac, bc, bb, cd.

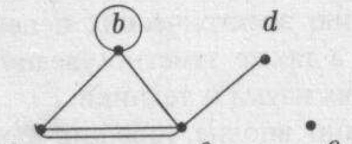


Рис. 2

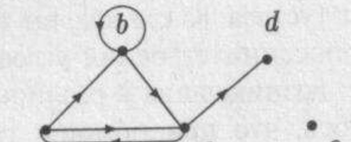


Рис. 3

Ребро вида uu (соединяющее некоторую вершину саму с собой) называют *петлей*. Таким образом, простой граф — это граф без петель и кратных ребер.

Ориентированный граф — упорядоченная пара $G = \langle V, A\rangle$, где V — непустое конечное множество — множество вершин; A — конечное мультимножество *упорядоченных* пар элементов V (необязательно различных) — мультимножество *дуг*[3].

[1] Поясним выбор обозначений для множеств вершин и ребер. По-английски вершина — vertex, ребро — edge.

[2] Сам термин *граф* возник как сокращение слова graphic (график) и был введен в 1936 г. венгерским математиком Д. Кёнигом.

[3] A — первая буква слова arc — дуга (англ.).

На рис. 3 изображен граф с множеством вершин $V = \{a, b, c, d, e\}$ и мультимножеством дуг A: $(a, b), (a, c), (c, a), (b, c), (b, b), (c, d)$. К ориентированным графам мы вернемся лишь в конце данной главы.

Степенью вершины графа называется число инцидентных ей ребер. При подсчете степени вершины петлю будем учитывать дважды. Обозначение степени вершины v: $\rho(v)$. Вершина v называется *изолированной*, если $\rho(v) = 0$, и *висячей*, если $\rho(v) = 1$. Имеет место следующее простое утверждение.

Теорема 1 (лемма о рукопожатиях). *Сумма степеней всех вершин графа равна удвоенному числу ребер*:

$$\sum_{v \in V} \rho(v) = 2|E|.$$

Действительно, каждое ребро дает вклад 2 при подсчете суммы степеней всех вершин. В частности, если несколько человек обменялись рукопожатиями, то общее число рукопожатий будет четным (графовая модель для данной задачи очевидна).

Следствие. *В любом графе число вершин нечетной степени четно.*

Графы $G_1 = \langle V_1, E_1 \rangle$ и $G_2 = \langle V_2, E_2 \rangle$ называются *изоморфными*, если существует такое взаимно однозначное соответствие $\varphi : V_1 \to V_2$, при котором для любых двух вершин первого графа $u, v \in V_1$ число соединяющих их ребер равно числу ребер, соединяющих соответствующие им вершины второго графа $\varphi(u), \varphi(v)$. На рис. 4 изображены изоморфные графы (соответствующие друг другу вершины в них обозначены одинаковыми номерами).

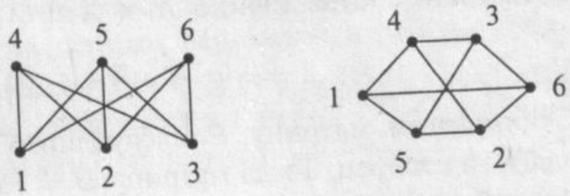


Рис. 4

Ясно, что в изоморфных графах одинаковое число вершин, ребер (а также петель и кратных ребер). Однако данное условие не является достаточным для изоморфности. Два графа, изображенные на рис. 5, не являются изоморфными (хотя бы потому, что в одном графе имеется «треугольник», а во втором — нет).

Отношение изоморфизма графов обладает свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности, т. е. является отношением эквивалентности.

Граф $G' = \langle V', E' \rangle$ называют *подграфом* графа $G = \langle V, E \rangle$ (обозначение $G' \subset G$), если $V' \subset V$, $E' \subset E$. Заметим, что если G_1 и G_2 — изоморфные графы, то для любого подграфа G_1 найдется изоморфный ему граф, являющийся подграфом G_2.

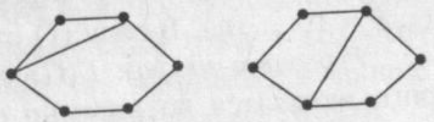


Рис. 5

Порядок графа — число его вершин. Граф порядка n называется *помеченным*, если его вершинам присвоены *метки* — числа от 1 до n (причем у разных вершин — разные метки). Часто мы будем отождествлять вершину с ее меткой. *Матрицей смежности* помеченного графа называется матрица $A = (a_{ij})$, где a_{ij} — число ребер, соединяющих вершины i и j. На рис. 6 изображен помеченный

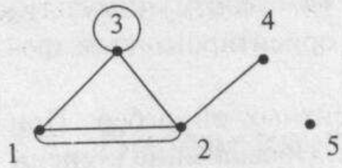


Рис. 6

граф 5-го порядка и приведена его матрица смежности

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Свойства матрицы смежности

1) Каждый элемент матрицы — неотрицательное целое число.
2) Матрица является симметричной: $A^T = A$ (символ ^{T} означает операцию транспонирования).
3) Сумма элементов i-й строки равна степени вершины i:

$$\boxed{\sum_j a_{ij} = \rho(i).}$$

4) Пусть A и A' — матрицы смежности изоморфных графов. Тогда найдется такая матрица перестановок[4)] P, что

$$\boxed{A' = PAP^{-1}.}$$

Первые три свойства очевидны; докажем последнее свойство. Пусть φ — функция, устанавливающая изоморфное соответствие между графами G' и G с матрицами смежности соотвественно A' и A:

$$\forall\, i, j \quad a'_{ij} = a_{\varphi(i),\varphi(j)}. \tag{1}$$

Сформируем матрицу P следующим образом: в i-й строке поставим единицу в $\varphi(i)$-й столбец. Тогда матрица $B = PA$ получается из матрицы A такой перестановкой ее строк, что i-й строкой становится строка с номером $\varphi(i)$ матрицы A ($i = 1, \ldots, n$; n — порядок графа). Легко проверить, что матрица, обратная к матрице перестановок, совпадает с транспонированной к ней: $P^{-1} = P^T$. Матрица $BP^T = PAP^{-1}$ получается из матрицы B такой перестановкой ее столбцов, что j-м столбцом становится столбец с номером $\varphi(j)$ матрицы B ($j = 1, \ldots, n$). Таким образом, число, стоящее в i-й строке и j-м столбце матрицы PAP^{-1}, совпадает с числом, которое находится в $\varphi(i)$-й строке и $\varphi(j)$-м столбце матрицы A ($i, j = 1, \ldots, n$). В силу (1) отсюда и вытекает требуемое: $A' = PAP^{-1}$.

Реберным графом $L(G)$ графа G называется граф, множество вершин которого находится во взаимно однозначном соответствии с множеством ребер G, причем две вершины в $L(G)$ смежны тогда и только тогда, когда смежны соответствующие им ребра графа G. Примеры реберных графов см. на рис. 7, где ребра графов G, G_1, G_2 помечены теми же номерами, которые имеют соответствующие им вершины реберных графов. Очевидно, что из изоморфности графов

[4)] Матрица перестановок — матрица, в каждой строке и каждом столбце которой находится ровно по одной единице, а остальные элементы нули.

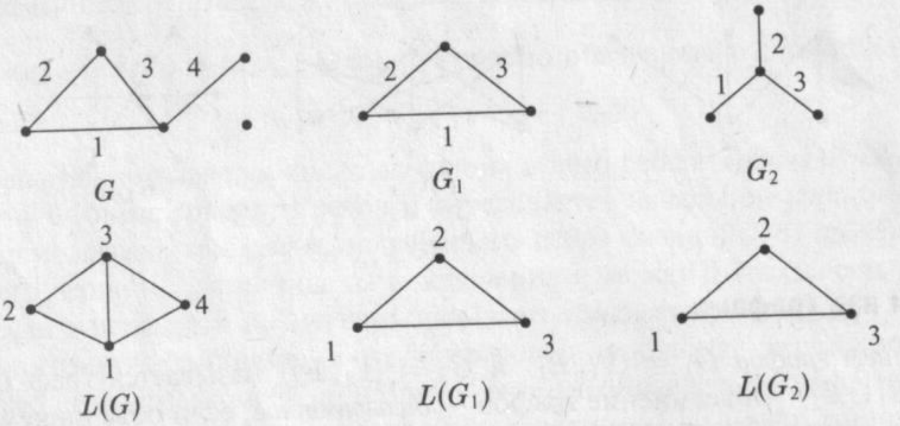


Рис. 7

вытекает изоморфность их реберных графов. Обратное, вообще говоря, неверно (см. примеры) [5].

Граф, в котором нет ребер, называют *пустым*. Пустой граф порядка n будем обозначать N_n. Все вершины пустого графа являются изолированными.

Простой граф, в котором любые две вершины смежны, называют *полным*. Обозначение полного графа порядка n: K_n. Число ребер в K_n равно

$$C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Граф называется *регулярным степени* r, если степени всех его вершин равны r. Графы K_n и N_n являются регулярными, их степени соответственно $n-1$ и 0. Регулярный граф степени 3 называют *кубическим*. В частности, кубическим будет граф, вершины и ребра которого соответствуют вершинам и ребрам куба. Кубическим является и *граф Петерсена*, изображенный на рис. 8.

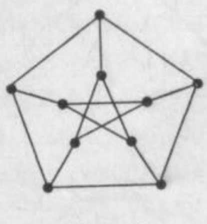


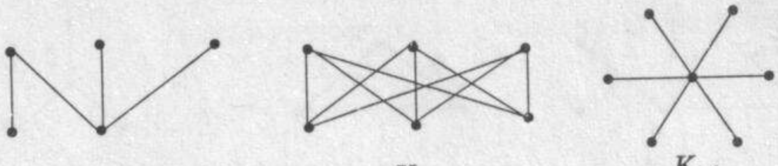
Рис. 8

Платоновыми графами называют графы, образованные вершинами и ребрами платоновых тел — правильных многогранников. Все они являются регулярными.

Граф называется *двудольным*, если множество его вершин V представимо в виде объединения двух непересекающихся непустых множеств V_1 и V_2, и при этом каждое ребро графа соединяет какую-либо вершину из V_1 с какой-либо вершиной из V_2. Множества вершин V_1 и V_2 будем называть *долями* графа. Заметим, что вершины двудольного графа можно «раскрасить» [6] в два цвета так, что каждое ребро будет иметь концы разного цвета (вершины одного цвета будут при этом составлять одну долю). *Полным двудольным графом* $K_{n,m}$ называется двудольный граф, в котором доли имеют соответственно n и m вершин, и любые две вершины, входящие в разные доли, смежны. $K_{n,m}$ содержит nm ребер. *Звездным* называют граф $K_{1,n}$. В нем n висячих вершин и одна вершина степени n. На рис. 9 изображены двудольные графы.

[5] Оказывается, что приведенный контрпример является единственным исключением: из связных графов только G_1 и G_2, будучи неизоморфными, имеют изоморфные реберные графы.

[6] То есть каждой вершине приписать некоторый цвет.



$K_{3,3}$ $K_{1,6}$

Рис. 9

Операции над графами

Объединением графов $G_1 = \langle V_1, E_1 \rangle$ и $G_2 = \langle V_2, E_2 \rangle$ называется граф $G_1 \cup G_2 = \langle V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2 \rangle$. Объединение графов — *дизъюнктное*, если объединяемые графы не имеют общих вершин: $V_1 \cap V_2 = \varnothing$. Очевидно, что операция объединения графов ассоциативна; поэтому употребление записей вида $G_1 \cup G_2 \cup G_3$ или $\cup_i G_i$ не будет приводить к недоразумениям.

Соединение графов $G_1 = \langle V_1, E_1 \rangle$ и $G_2 = \langle V_2, E_2 \rangle$ — граф $G_1 + G_2$, который получается из дизъюнктного объединения графов $G_1 \cup G_2$ добавлением всевозможных ребер вида $v_1 v_2$, где $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$. Например, $N_n + N_m = K_{n,m}$. *Дополнением* к простому графу $G = \langle V, E \rangle$ называют граф $\overline{G} = \langle V, \overline{E} \rangle$, в котором множестве вершин совпадает с множеством вершин исходного графа G, и вершины смежны тогда и только тогда, когда они не смежны в графе G. Например, $\overline{N}_n = K_n$, $\overline{K}_n = N_n$. Несложно видеть, что дополнение к дополнению G совпадает с G : $\overline{\overline{G}} = G$. Если граф G с n вершинами рассматривать как подграф полного графа K_n, то можно сказать, что граф $\overline{G}$ получается из K_n выбрасыванием ребер графа G. Отметим также, что дополнение к регулярному графу есть регулярный граф.

Граф называется *связным*, если его нельзя представить в виде дизъюнктного объединения двух графов и *несвязным* в противном случае. Любой граф можно представить в виде дизъюнктного объединения связных графов, каждый из которых называют *компонентой связности* исходного графа. На рис. 10 граф G_2 — связный, граф G_1 — несвязный (содержит 3 компоненты связности).

G_1 G_2

Рис. 10

Циклический граф — это связный регулярный граф степени 2. Циклический граф порядка n обозначают C_n. Граф

$$W_n = N_1 + C_{n-1} \quad (n \geqslant 3)$$

называют *колесом*. Примеры циклического графа и колеса — на рис. 11.

C_6 W_7

Рис. 11

§ 2. Связные графы

Маршрутом в графе называется последовательность ребер вида

$$v_0 v_1, v_1 v_2, \ldots, v_{m-1} v_m.$$

Каждому маршруту соответствует последовательность его вершин $v_0, v_1, \ldots, v_m$; v_0 называют *начальной вершиной* маршрута, а v_m — *конечной вершиной*; при этом говорят о *маршруте из* v_0 *в* v_m. Маршрут удобно обозначать в следующем виде:

$$v_0 \to v_1 \to v_2 \to \ldots \to v_m.$$

Длиной маршрута называется число входящих в него ребер. *Тривиальный маршрут* имеет длину 0 (он не содержит ребер и определяется начальной вершиной v_0).

Маршрут называется *цепью*, если все его ребра различны, и *простой цепью*, если все его вершины различны, за исключением, может быть, начальной и конечной. Если в цепи $v_0 = v_m$, то цепь называют *замкнутой*.

Цикл в графе — замкнутая цепь, содержащая по крайней мере одно ребро.

Две вершины графа u и v назовем *связанными*, если в графе существует маршрут из u в v. Заметим, что если две вершины связаны, то существует соединяющая их простая цепь. Действительно, пусть имеется некоторый маршрут из u в v, не являющийся простой цепью, тогда найдется вершина маршрута w, встречающаяся в нем не менее двух раз, и маршрут имеет вид:

$$u \to \ldots \to w \to w_1 \to \ldots \to w \to \ldots \to v.$$

Удалив из маршрута участок $w_1 \to \ldots \to w$, вновь получим маршрут из u в v. Если при этом он не будет простой цепью, то указанную процедуру можно повторить. Бесконечное число раз она выполняться не будет, так как число ребер графа конечно. В результате получим простую цепь из u в v.

Отношение связанности на множестве вершин графа является отношением эквивалентности. Рефлексивность проистекает из того факта, что каждая вершина связана сама с собой тривиальным маршрутом. Симметричность следует из того, что взяв вершины маршрута из u в v в обратном порядке, получим маршрут из v в u. Транзитивность также очевидна: объединив маршруты из u в v и из v в w, получим маршрут из u в w.

Отношение связанности разбивает множество вершин графа на классы эквивалентности. Очевидно, что вершины из одного класса эквивалентности вместе с соединяющими их ребрами образуют компоненту связности графа (определение которой дано в конце предыдущего параграфа). Поскольку связный граф характеризуется тем, что имеет одну компоненту связности, приходим к выводу: *граф является связным тогда и только тогда, когда любые две его вершины — связанные.*

Разделяющим множеством графа называется такое множество его ребер, удаление которых приводит к увеличению числа компонент связности графа. *Разрез* — минимальное разделяющее множество (т. е. такое, что никакое его собственное подмножество не является разделяющим множеством). Ребро называется мостом, если оно образует разрез.

Пример. Для графа, изображенного на рис. 12, $\{e_1, e_2, e_3\}$ — разделяющее множество (но не разрез); $\{e_1, e_2\}$ — разрез; ребра e_6 и e_{10} являются мостами.

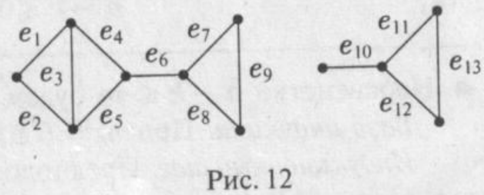


Рис. 12

Лемма 1. *Ребро в графе является мостом тогда и только тогда, когда оно не входит ни в один цикл.*

◀ Пусть ребро $e = uv$ — мост. Ясно, что при этом $u \neq v$. Предположим существование цикла, содержащего ребро e. Возьмем две произвольные вершины x

и y из той компоненты связности графа, которой принадлежит ребро e. Покажем, что они останутся связанными и после удаления ребра e. Действительно, если ребро e входит в некоторый маршрут, соединяющий x и y, то e можно заменить последовательностью ребер, составляющих вместе с e цикл (рис. 13). Таким образом, отношение связанности не меняется после удаления e, что противоречит определению моста.

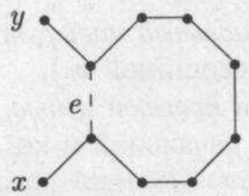


Рис. 13

Обратно. Пусть ребро $e = uv$ не входит ни в один цикл. Если при удалении e вершины u и v останутся связанными, это будет говорить о существовании соединяющей их простой цепи. Объединив ее с ребром e, получим цикл в исходном графе — противоречие! Таким образом, число компонент связности при удалении e увеличивается; e — мост. ►

Следующее утверждение уточняет понятие моста.

Лемма 2. *Удаление моста увеличивает число компонент связности графа на единицу.*

◄ Пусть $e = uv$ — мост. Рассмотрим компоненту связности, содержащую e. Через H_u обозначим множество ее вершин x, для которых существует маршрут из x в u, не содержащий ребра e. Остальные вершины составят множество H_v. Эти множества не пусты, так как $u \in H_u$ (вершина u связана сама с собой тривиальным маршрутом) и $v \in H_v$ (если бы существовал маршрут из v в u, не содержащий ребра e, то добавив к нему это ребро, получили бы цикл, что противоречит лемме 1). Удалим из графа ребро e. Любые две вершины x, y из H_u останутся связанными между собой маршрутом вида $x \to \ldots \to u \to \ldots \to y$. Для произвольных вершин z, t из H_v любые простые цепи, связывающие их с вершиной u в исходном графе, заканчивались ребром $e = vu$; значит, после удаления этого ребра z и t связаны маршрутом вида $z \to \ldots \to v \to \ldots \to t$. Таким образом, удаление e привело к образованию двух компонент связности (с множествами вершин H_u и H_v). Лемма доказана. ►

Теорема 2. *Пусть в простом графе n вершин, m ребер и k компонент связности. Тогда справедливы неравенства*

$$n - k \leqslant m \leqslant \frac{(n-k)(n-k+1)}{2}.$$

◄ Неравенство $n - k \leqslant m$ будем доказывать индукцией по числу ребер.

База индукции. При $m = 0$ имеем $n = k$ — неравенство выполняется.

Индукционный шаг. Предположим, что доказываемое неравенство справедливо для всех графов с s ребрами, где $s < m$. Будем в графе с n вершинами, m ребрами и k компонентами связности последовательно удалять ребра так, чтобы не изменялось число компонент связности, до тех пор, пока это возможно. В результате получим граф с прежним количеством вершин и компонент связности и $m' \leqslant m$ ребрами, причем каждое ребро будет мостом. Удалим еще одно ребро. В силу леммы 2 число компонент связности станет равным $k + 1$. Так как граф будет иметь $m' - 1 \leqslant m - 1 < m$ ребер, к нему применимо предположение индукции: $n-(k+1) \leqslant m'-1$. Стало быть, $n-k \leqslant m'$, и так как $m' \leqslant m$, то $n-k \leqslant m$, что и требовалось доказать.

Для того чтобы оценить сверху число ребер графа через число его вершин и компонент связности, дополним каждую компоненту связности графа до полного графа. Граф после этого будет представлять собой дизъюнктное объединение полных графов $G_1 \cup \ldots \cup G_k$. Пусть в i-й компоненте n_i вершин ($i = 1, \ldots, k$). Можно ли еще увеличить число ребер, не меняя при этом числа вершин и компонент связности? Можно, если найдутся две компоненты, в каждой из которых не менее двух вершин. Пусть $2 \leqslant n_i \leqslant n_j$. «Отберем» одну вершину у G_i (потеряв при этом $n_i - 1$ ребер) и «передадим» ее графу G_j (приобретя зато n_j ребер). Количество ребер увеличится на величину $n_j-(n_i-1) = n_j - n_i + 1 \geqslant 1$. Повторяя описанную процедуру, пока это возможно, придем в конце концов к графу с $k-1$ изолированными вершинами и компонентой связности, представляющей собой полный граф с $n-k+1$ вершинами. Полученный граф имеет $\frac{(n-k+1)(n-k)}{2}$ ребер. Поскольку при каждом проведенном преобразовании число ребер возрастало, получим требуемое соотношение: $m \leqslant \frac{(n-k+1)(n-k)}{2}$; причем равенство достигается только для дизъюнктного объединения полного графа и пустых графов. ►

Следствие. *Если в простом графе n вершин и m ребер и $m > \frac{(n-1)(n-2)}{2}$, то граф связен.*

◄ Действительно, если бы граф не был связен и число его компонент $k \geqslant 2$, то число ребер удовлетворяло бы неравенству

$$m \leqslant \frac{(n-k)(n-k+1)}{2} \leqslant \frac{(n-1)(n-2)}{2},$$

что противоречит условию. ►

§ 3. Метрические характеристики графа

Пусть $G = \langle V, E\rangle$ — связный граф. Через $d(u,v)$ обозначим длину кратчайшей цепи, связывающей вершины u и v. Покажем, что $d(u,v)$ обладает свойствами *метрики*.

Симметричность.

$$\forall\, u, v \in V \quad d(u,v) = d(v,u).$$

Свойство очевидно.

Неравенство треугольника.

$$\forall\, u, v, w \in V \quad d(u,v) \leqslant d(u,w) + d(w,v).$$

Действительно, объединив кратчайшие цепи из u в w и из w в v, получим маршрут из u в v длиной $d(u,w)+d(w,v)$, длина кратчайшей цепи из u в v будет не более этой величины.

Невырожденность.

$$\forall\, u, v \in V \quad d(u, v) \geqslant 0; \quad d(u, v) = 0 \iff u = v.$$

Непосредственно вытекает из определения $d(u, v)$.

Таким образом, на множестве вершин связного графа введена структура *метрического пространства*. $d(u, v)$ будем называть *расстоянием* между вершинами u и v.

Эксцентриситетом вершины u называется наибольшее из расстояний от u до других вершин графа:

$$e(u) = \max_{v \in V} d(u, v).$$

Минимальный эксцентриситет вершин графа называют *радиусом графа*:

$$r(G) = \min_{u \in V} e(u),$$

а максимальный эксцентриситет — *диаметром*:

$$d(G) = \max_{u \in V} e(u).$$

Другими словами, диаметр графа — это наибольшее из расстояний между двумя вершинами графа. Если эксцентриситет вершины совпадает с радиусом графа, то вершину называют *центральной*. Центральные вершины графа составляют его *центр*. Вершина называется *периферийной*, если ее эксцентриситет равен диаметру графа.

Несколько примеров. В полном графе K_n $(n > 1)$ расстояние между любыми двумя (разными) вершинами равно 1, поэтому $r(K_n) = d(K_n) = 1$. В полном графе каждая вершина является и периферийной, и центральной.

Последнее свойство имеет место и для циклического графа C_n, для которого радиус также совпадает с диаметром:

$$r(C_n) = d(C_n) = \left[\frac{n}{2}\right]$$

($[\cdot]$ — обозначение целой части).

Для колеса W_n радиус равен единице, а диаметр — двум, одна вершина является центральной, а остальные — периферийные.

Установим соотношения между радиусом и диаметром графа.

Теорема 3. *Для произвольного графа G справедливы неравенства*:

$$r(G) \leqslant d(G) \leqslant 2r(G).$$

◄ Первое неравенство следует непосредственно из определений:

$$r(G) = \min_u e(u) \leqslant \max_u e(u) = d(G).$$

Чтобы доказать второе неравенство, положим:

$$d(u, v) = d(G); \quad e(w) = r(G).$$

Применяя неравенство треугольника, получим:

$$d(G) = d(u, v) \leqslant d(u, w) + d(w, v) \leqslant e(w) + e(w) = 2r(G).$$

Теорема доказана. ►

§ 4. Гамильтоновы графы

У. Гамильтон — ирландский математик и астроном — в 1859 году придумал головоломку «Кругосветное путешествие», состоявшую в следующем: каждой вершине додекаэдра приписано имя известного города; необходимо по ребрам проложить замкнутый путь, который проходил бы через все города, причем каждый город должен встретиться ровно один раз. В честь Гамильтона графы, в которых существуют маршруты с подобным свойством, были названы гамильтоновыми.

Перейдем к точным определениям. Граф G — *гамильтонов*, если в нем существует простая замкнутая цепь, проходящая через все вершины графа; указанную цепь называют при этом *гамильтоновым циклом*. Если в приведенных определениях отказаться от требования *замкнутости*, то придем к понятиям *полугамильтонова графа* и *гамильтоновой цепи*.

На рис. 14 граф G_1 не является гамильтоновым (и даже полугамильтоновым), G_2 — полугамильтонов граф, G_3 — гамильтонов.

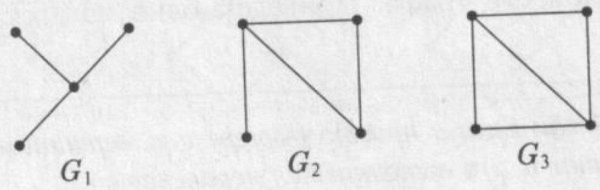


Рис. 14

Приведем примеры задач, сводящихся к нахождению гамильтоновых циклов в графе.

1) *На обед за круглым столом приглашены гости. Требуется рассадить их так, чтобы сидящие рядом были в дружеских отношениях.*
Рассмотрим граф, в котором вершины — гости, а наличие ребра, соединяющего вершины u и v, говорит о «дружбе» между u и v. Гостей следует рассадить за круглым столом в таком порядке, чтобы соответствующие им вершины были последовательными вершинами некоторого гамильтонова цикла.

2) **Задача Эйлера о коне.** *Обойти ходом коня шахматную доску, посетив при этом каждую клетку ровно один раз и последним* (*64-м*) *ходом вернуться в начальную клетку.*
Здесь граф содержит 64 вершины (клетки доски). Две вершины соединяются ребром, если возможен ход коня с одной клетки в другую. Степени вершин варьируются от 2 до 8. Эта задача достаточно широко описана в занимательной математической литературе. Есть что-то притягательное в задаче Эйлера о коне, если даже на студенческих партах можно встретить наряду с традиционными жанрами «наскального изобразительного искусства» изображения шахматной доски, клетки которой пронумерованы в соответствие с маршрутом коня!

3) **Задача коммивояжера.** *Бродячий торговец*[7] (*коммивояжер*) *должен посетить n пунктов. Известна стоимость проезда между любыми двумя пунктами. Требуется выбрать наиболее «дешевый» замкнутый путь, проходящий через все пункты.*

[7] В англоязычной литературе для задачи коммивояжера используется термин Traveling salesman problem (TSP).

Вместо стоимости проезда можно говорить, конечно, о времени или расстоянии. В любом случае, каждому ребру графа приписан некоторый «вес»; задача состоит в нахождении гамильтонова цикла минимального веса (*вес цикла — сумма весов составляющих его ребер*). Задача коммивояжера является классической задачей дискретной оптимизации, относится к классу так называемых NP-полных задач.

Обозначим через $P(n)$ множество всех простых помеченных графов с n вершинами, а через $P_h(n)$ — множество всех простых помеченных гамильтоновых графов с n вершинами. В 1969 г. советский математик В. А. Перепелица доказал, что

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{|P_h(n)|}{|P(n)|} = 1.}$$

Таким образом, вероятность того, что «случайный» граф с n вершинами является гамильтоновым, стремится к единице с ростом n. Не установлено простых критериев гамильтоновости графа. Приведем одно из достаточных условий гамильтоновости.

Теорема 4 (О. Оре, 1960 г.). *Если в простом графе с n вершинами ($n \geqslant 3$) для любой пары несмежных вершин u и v выполняется неравенство*

$$\rho(u) + \rho(v) \geqslant n,$$

то граф является гамильтоновым.

Предварительно докажем следующее утверждение.

Лемма. *Пусть G — простой негамильтонов граф, содержащий $n \geqslant 3$ вершин, в котором несмежные вершины u и v соединяет гамильтонова цепь. Тогда*

$$\rho(u) + \rho(v) \leqslant n - 1.$$

◄ Доказательство леммы. В гамильтоновой цепи $u \to \ldots \to v$, где вершины u и v не смежны, произвольная вершина, смежная с u (обозначим ее u'), не может следовать за вершиной (например, v'), смежной с v. Действительно, гамильтонова цепь $u \to \ldots \to v' \to u' \to \ldots \to v$ легко преобразуется в гамильтонов цикл $u \to \ldots \to v' \to v \to \ldots \to u' \to u$. Поэтому число вершин, не смежных с u, не меньше числа вершин, смежных с v, то есть $n - 1 - \rho(u) \geqslant \rho(v)$, или $\rho(u) + \rho(v) \leqslant n - 1$. ►

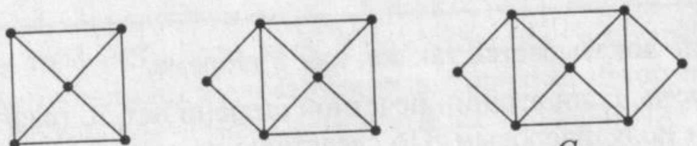
◄ Доказательство теоремы 4. Предположив, что граф не является гамильтоновым, будем последовательно добавлять к нему ребра до тех пор, пока он не станет гамильтоновым. Удалив последнее добавленное ребро uv, получим полугамильтонов граф G', не являющийся гамильтоновым. В нем существует гамильтонова цепь $u \to \ldots \to v$, причем вершины u и v не смежны. Применение леммы дает: $\rho'(u) + \rho'(v) \leqslant n - 1$, где $\rho'(u)$, $\rho'(v)$ — степени вершин u и v в графе G'. Осталось заметить, что $\rho'(u) \geqslant \rho(u)$, $\rho'(v) \geqslant \rho(v)$, откуда $\rho(u) + \rho(v) \leqslant \rho'(u) + \rho'(v) \leqslant n - 1 < n$. Получено противоречие с условием. ►

Следствие (Г. Дирак, 1952 г.). *Если в простом графе порядка $n \geqslant 3$ степень каждой вершины не меньше $n/2$, то граф является гамильтоновым.*

§ 5. Эйлеровы графы

Связный граф называется *эйлеровым*, если в нем существует замкнутая цепь, содержащая все ребра графа; указанную цепь называют при этом *эйлеровым циклом.* Если в приведенных определениях снять требование *замкнутости*, то придем к понятиям *полуэйлерова графа* и *эйлеровой цепи.*

На рис. 15 граф G_1 не является эйлеровым (и даже полуэйлеровым), G_2 — полуэйлеров граф, G_3 — эйлеров.



G_1 G_2 G_3

Рис. 15

Узнать, является ли граф эйлеровым, очень просто ввиду следующей теоремы.

Теорема 5 (Л. Эйлер, 1736 г.). *Связный граф является эйлеровым тогда и только тогда, когда каждая его вершина имеет четную степень.*

◄ *Необходимость.* Начнем движение по эйлерову циклу с «середины» произвольного ребра и будем подсчитывать (по ходу движения) степени вершин. При прохождении через вершину ее (текущая) степень увеличивается на 2. Поэтому степени всех вершин эйлерова графа четны.

Достаточность. Сначала докажем утверждение, которое пригодится нам и в дальнейшем.

Лемма. *Пусть все вершины графа имеют четную степень. Тогда через каждую неизолированную вершину графа проходит некоторый цикл.*

◄ Доказательство леммы. Будем строить цикл, исходя из произвольной неизолированной вершины v. Если в графе имеется петля vv, то требуемый цикл уже есть. Пусть теперь vv_1 — произвольное ребро (не являющееся петлей), инцидентное вершине v. Поскольку степень v_1 не меньше двух, существует ребро v_1v_2, отличное от vv_1. Если $v_2 \neq v$, то маршрут $v \to v_1 \to v_2$ можно нарастить некоторым ребром v_2v_3. Из-за четности степени каждой вершины маршрут можно удлинять всякий раз, если попадаем в вершину, отличную от v. В силу конечности множества ребер через конечное число шагов описанной процедуры возникнет замкнутая цепь $v \to v_1 \to \ldots \to v$. ►

Продолжение доказательства теоремы. Поскольку в данном графе циклы есть, и количество их конечно, существует самый длинный из них. Пусть $C: v \to v_1 \to \ldots \to v$ — цикл наибольшей длины. Нужно доказать, что он содержит все ребра графа. Пусть это не так. Тогда после удаления ребер, составляющих цикл C, возникнет непустой граф G', в котором степени всех вершин по-прежнему четны. Если при этом вершины, через которые проходил цикл C, станут изолированными, то исходный граф не связен, что противоречит условию. Значит, в G' найдется неизолированная вершина w. Согласно лемме, через нее проходит некоторый цикл C', составленный из ребер графа G'. Объединив циклы C и C' (а это возможно, поскольку у них есть общая вершина и нет общих ребер), получим цикл длиннее C — противоречие. ►

Следствие. *Связный граф является полуэйлеровым тогда и только тогда, когда в нем не более двух вершин имеют нечетную степень.*

◄ *Необходимость* доказывается так же, как в теореме.

Достаточность. Если вершин нечетной степени нет, то граф является эйлеровым, а, значит, и полуэйлеровым. По следствию из леммы о рукопожатиях ровно одной вершины нечетной степени не может быть. Пусть теперь в графе ровно две вершины имеют нечетную степень. Соединив эти две вершины новым ребром, получим, согласно теореме, эйлеров граф. Построим в новом графе эйлеров цикл; удаление ранее добавленного ребра приводит к эйлеровой цепи в исходном графе. ►

Задача о кенигсбергских мостах

Во времена Леонарда Эйлера семь мостов города Кёнигсберга (ныне Калининград) были расположены на реке Прегель так, как показано на рис. 16. Мог ли житель этого города, выйдя из дома, вернуться обратно, пройдя по каждому мосту ровно один раз? Рассмотрим граф, вершины которого отвечают связным участкам суши (двум берегам реки и двум островам), а ребра — мостам. Все четыре вершины графа имеют нечетную степень, стало быть, ответ к задаче отрицательный.

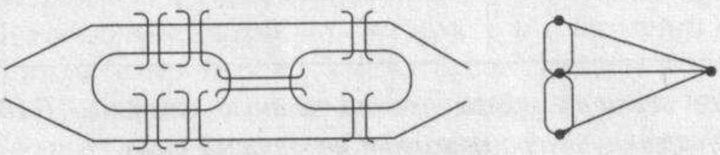


Рис. 16

Приведенное выше доказательство теоремы об эйлеровых графах имеет неконструктивный характер — оно не дает эффективного метода нахождения эйлерова цикла (генерирование всевозможных циклов — явно не лучший способ действий). Приведем один из алгоритмов нахождения эйлерова цикла.

Алгоритм Флери построения эйлерова цикла

1. Начать цикл с произвольной вершины u. Присвоить произвольному ребру uv, инцидентному u, номер 1. Удалить из графа ребро uv, перейти в вершину v.

2. Пусть после k шагов мы находимся в вершине w. Выбрать произвольное ребро wt, причем мост выбирается только в том случае, если нет другой возможности. Ребру wt присвоить номер $k+1$. Удалить из графа ребро wt, перейти в вершину t.

Число шагов в описанном алгоритме совпадает с числом ребер в графе. По окончании работы алгоритма ребра исходного графа будут пронумерованы в порядке их следования в эйлеровом цикле. Докажем *корректность* предложенного алгоритма.

Теорема 6. *Применение алгоритма Флери к произвольному эйлерову графу всегда приводит к построению эйлерова цикла.*

◄ Пусть G — эйлеров граф. Тогда степень каждой его вершины четна. В силу этого алгоритм может закончить свою работу лишь в начальной вершине u, построив при этом некоторый цикл C. Нужно доказать, что цикл C включает в себя все ребра графа G. Если это не так, то после удаления ребер C граф распадается на компоненты связности, хотя бы одна из которых (назовем ее B) содержит ребра. Обозначим через A семейство всех ребер цикла C, инцидентных вершинам B. Пусть a — наибольший номер ребра (полученный в результате работы алгоритма Флери) из A, тогда к моменту удаления данного ребра из графа оно было мостом; однако это противоречит правилу выбора очередного ребра: поскольку в компоненте B степень каждой вершины четна (это легко видеть), то в ней существует цикл, идя по которому (напомним, любое ребро цикла — не мост) можно было избежать преждевременного удаления моста. Корректность алгоритма Флери доказана. ►

В заключение параграфа отметим, что для *случайным образом* построенного графа вероятность его эйлеровости (при большом числе вершин) мала.

Теорема 7 (Р. Рейд, 1962 г.). *Пусть $P(n)$ — множество всех простых помеченных графов с n вершинами, $P_e(n)$ — множество всех простых помеченных эйлеровых графов с n вершинами. Тогда*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|P_e(n)|}{|P(n)|} = 0.$$

◄ Пусть $P_0(n)$ — множество всех простых помеченных графов с n вершинами, степень каждой из которых четна. Связные графы из $P_0(n)$ составляют, как известно, $P_e(n)$; поэтому $P_e(n) \subset P_0(n)$ и $|P_e(n)| \leqslant |P_0(n)|$. Каждый граф из $P(n)$ определяется некоторым подмножеством ребер полного графа K_n, содержащего C_n^2 ребер; в силу этого $|P(n)| = 2^{C_n^2}$. Нетрудно подсчитать и мощность $P_0(n)$. Установим взаимно однозначное соответствие между $P(n-1)$ и $P_0(n)$: если все вершины нечетной степени произвольного графа из $P(n-1)$ (число их по следствию из леммы о рукопожатиях четно) соединить с n-й вершиной, то получим граф из $P_0(n)$. Таким образом,

$$|P_0(n)| = |P(n-1)| = 2^{C_{n-1}^2}.$$

Дальнейшее просто:

$$\frac{|P_e(n)|}{|P(n)|} \leqslant \frac{|P_0(n)|}{|P(n)|} = \frac{2^{C_{n-1}^2}}{2^{C_n^2}} = 2^{\frac{(n-1)(n-2)-n(n-1)}{2}} = 2^{1-n}.$$

Так как $2^{1-n} \to 0$ при $n \to \infty$, то и $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|P_e(n)|}{|P(n)|} = 0$. ►

§ 6. Деревья и леса

Граф, не содержащий циклов, называют *ациклическим* графом, или *лесом*. Заметим, что в ациклическом графе отсутствуют петли и кратные ребра, в силу чего он является простым графом. *Дерево* — это связный ациклический граф. Таким образом, компоненты связности леса являются деревьями, т. е. лес — дизъюнктное объединение деревьев.

В следующей серии теорем вскрываются важные свойства ациклических графов; при их доказательстве часто будут использоваться леммы из § 2.

Теорема 8. *Граф является лесом тогда и только тогда, когда каждое ребро графа — мост.*

◄ Граф G — лес $\iff$ в G нет циклов $\iff$ ни одно ребро не входит ни в какой цикл $\iff$ (по лемме 1) все ребра G — мосты. ►

Теорема 9. *Дерево с n вершинами содержит $n - 1$ ребро.*

◄ Пусть G — дерево с n вершинами. В силу предыдущей теоремы каждое ребро G (и всех его подграфов) является мостом. Будем последовательно удалять ребра G, при этом каждый раз число компонент связности увеличивается на 1 (по лемме 2). Первоначально имелась одна компонента связности (так как дерево — связный граф). После удаления всех ребер граф будет иметь n изолированных вершин, т. е. n компонент связности. Таким образом, в указанной процедуре был выполнен $n - 1$ шаг; значит G содержит $n - 1$ ребро. ►

Следствие 1. *Пусть в лесе n вершин, m ребер и k компонент связности. Тогда $m = n - k$.*

◄ Пусть в i-й компоненте связности леса n_i вершин и m_i ребер ($i = 1, \ldots, k$); по теореме 9 для каждого i справедливо $m_i = n_i - 1$. Подсчитаем общее число ребер леса:

$$m = \sum_{i=1}^{k} m_i = \sum_{i=1}^{k} (n_i - 1) = \sum_{i=1}^{k} n_i - k = n - k. \ ►$$

Следствие 2. *Если в лесе число ребер на 1 меньше числа вершин, то этот лес является деревом.*

◄ Действительно, в силу следствия 1 число компонент связности леса равно разности числа вершин и числа ребер (в нашем случае — единице). ►

Объединив формулировки теоремы 9 и следствия 2, получим следующее утверждение: *лес является деревом тогда и только тогда, когда число его ребер на 1 меньше числа вершин.*

Следствие 3. *В дереве, которое содержит по меньшей мере две вершины, не менее двух висячих вершин.*

◄ Пусть в дереве $n \geqslant 2$ вершин: $v_1, \ldots v_n$, тогда оно содержит $m = n - 1$ ребро. По лемме о рукопожатиях

$$\rho(v_1) + \ldots + \rho(v_n) = 2m = 2(n-1).$$

Можно считать, что вершины упорядочены по их степеням:

$$\rho(v_1) \leqslant \rho(v_2) \leqslant \ldots \leqslant \rho(v_n).$$

Докажем, что $\rho(v_1) = \rho(v_2) = 1$. Предполагая противное, легко получить противоречие: если $\rho(v_2) > 1$, т. е. $\rho(v_2) \geqslant 2$, то

$$2(n-1) = \rho(v_1) + \rho(v_2) + \ldots + \rho(v_n) \geqslant 1 + (n-1)\rho(v_2) \geqslant 1 + 2(n-1). \text{ ►}$$

Из следствия 3 вытекает

Следствие 4. *В лесе, содержащем хотя бы одно ребро, не менее двух висячих вершин.*

Теорема 9 может быть обращена следующим образом.

Теорема 10. *Пусть в связном графе число ребер на 1 меньше числа вершин. Тогда этот граф — дерево.*

◄ Пусть в графе G n вершин, $m = n - 1$ ребер. По теореме 2 в простом графе $m \geqslant n - k$, где k — число компонент связности. Для рассматриваемого графа $k = 1$ и имеет место равенство $m = n - k$. Отсюда ясно, что граф является простым, так как в противном случае удалив все петли и (лишние) кратные ребра (сделав граф простым), мы уменьшили бы m, не меняя при этом n и k, что привело бы к нарушению упомянутого неравенства. Итак, граф G — простой и для него $m = n - k$. Удаление любого ребра графа приведет к нарушению неравенства $m \geqslant n - k$, если при этом не изменится число компонент связности k; поэтому удаление произвольного ребра изменяет k, то есть каждое ребро графа есть мост, в силу чего (по теореме 8) G — ациклический граф. Так как при этом G по условию связный граф, G — дерево. Теорема доказана. ►

Теорема 11. *Граф является деревом тогда и только тогда, когда любые две его вершины соединены ровно одной простой цепью.*

◄ *Необходимость.* Пусть G — дерево. Тогда G — связный граф, и любые две его вершины соединены простой цепью (§ 2), при этом двух различных цепей с таким свойством не может быть, так как их объединение дает цикл, в то время как в дереве циклов нет.

Достаточность. Если в графе любые две вершины соединены цепью, то, как известно, граф является связным. Ацикличность графа также очевидна: если бы в графе был цикл, то любые две вершины этого цикла соединены по меньшей мере двумя простыми цепями. ►

Теорема 12. *Лес является деревом в том и только в том случае, когда добавление любого ребра приводит к образованию ровно одного цикла.*

◄ Пусть ациклический граф связен. В силу теоремы 11 любые две вершины u и v соединены ровно одной простой цепью. Поэтому добавление ребра uv приводит к образованию цикла, причем ровно одного, так как если бы их образовалось хотя бы два, то объединяя соответствующие «участки» этих циклов, можно было бы построить цикл, не содержащий ребра uv, что противоречило бы ацикличности исходного графа.

Обратно. Если при добавлении ребра uv образуется цикл, то удаляя из этого цикла ребро uv, мы получим цепь, связывающую вершины u и v, значит, любые две вершины графа связаны, т. е. граф связен и является деревом (так как по условию он ациклический). ►