Алгебра событий

1. Испытание и событие

Испытание – действие приводящее к некоторым рез-там, кот будем назв событиями (может приводить, а может и приводить к некоторым результатам)

Пример. И – бросание игральной кости

A_1 – выпало 1,

A_2 – выпало 2

C – выпало четное число очков.

A_1, A_2, C – события.

Пример:

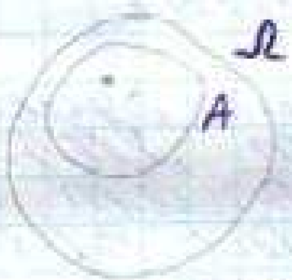
Ω – сдача 3-х экзаменов сессии (матем, физика, химия)

A_1 – сдан 1-ый экзамен

M – сдан экзамен по математике

A – сдан хотябы один экзамен

2. Диаграмма Венна



Любое испытание можно ассоциировать с бросанием точки в некот. (плоскость Ω) плоскую обл. Ω.

Любое событие можно ассоциировать с попаданием этой точки в некоторую подобласть A

3. Достоверное невозможное случайное события

Достоверным событием назыв. событие кот. происходит при любом проведении эксперимента

Пример:

Бросание игральной кости. Число очков меньше 7 – Ω

Ω - достоверное событие

Невозможным событием будем назыв. событие, кот. не может наступить при любом проведении эксперимента.

Пример:

И - бросание игральной кости

N - число очков отрицательное

N - пустое множество в диаграмме Венна

Случайным событ. будем назыв. событие, кот. может наступить, а может и не наступить при проведении испытания.

4. Совместные и несовместные события

Два события назыв. несовместными, если они не могут произойти одновременно при проведении испытания.

Пример:

И - бросание игральной кости

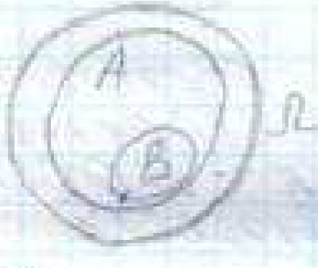
A - выпало четн. число оч.

B - число очков = 3

$A \cap B = \varnothing$
(пустое множество)

Пример:

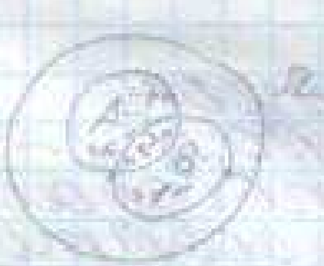
Ω - сдача сессии
A - сдан хотя бы 1 экзамен;
B - сдан 1 экзамен
(AB - совместные события)



$A \cap B \neq \varnothing$

Пример:

Ω - бросание игральной кости
A - число очков четно
B - число очков < 3



5. Полная группа событий

Группа событий $A_1, A_2, \dots,$ назыв. полной группой событий, если при любом проведении испытания всегда появл. одно из этих событий.

Пример:

Ω - бросание игральной кости

A_i - выпало i очков $i=1,2,\ldots,6$

$A_1, A_2, \ldots, A_6$ - полная группа событий.

B_1 - число очков четное

B_2 - число очков нечетное

B_1, B_2 - полная группа событий

События полной группы являются попарно несовместными событиями, т.к. происх. одно из этих событий.

Объединение всех событий полной группы дает нам достоверное событие Ω т.к. при любом проведении испытания всегда происходит ...

(От Ω) Достоверное событие можно разбивать разными способами в полную группу событий, и от этого будет существенно зависеть решение задачи.

6. Противоположные события

Два события наз. противоположными, если в случае не появления одного из них всегда наступает другое.

Пример:

Ц- сдача сессии
А- сдано 3 экзамена
В- не сдано 3 экзамена
С- все экзамены не сдано

А и В являются противоположными событиями.

В означ. что хотя бы 1 экзамен не сдан (либо 1, 2, 3 экзамена не сдано)
(кроме А)
А и С не явл. противоположными (потому) т.к. если сдано ровно 2 экзамена то событие А не происходит и событие С не происходит!

Ā- обозначение противоположных событию к А

Очень часто противоположн. событ. получ. при помощи частицы нет.
Для С противоположным явл. событие D- хотя бы один экзамен сдан.

7. Другие виды событий

Событие A назыв. благоприятствует событию B, если при наступлении события A всегда наступает событие B.

Пример:

И - брос. игр. кост.
A - выпало „2"
B - выпало четное число очков

A благоприятствует B
($A \subset B$, $A \Rightarrow B$)

Событ. назыв. составным, если существ. событие отличное от данного благоприятствующего данному

Пример:

И - бросание игральной кости
A - число очков меньше < 3
A - составное

Событ. назыв. элементарным, если оно не явл. составным. Очень часто элементарн. события назыв. исходами.

Пример:

И - бросание игр. кости
A_i - число выпавших очков $= i$; $A_1, A_2, \ldots, A_6$ - элементарн. событ.

Два события назыв. равновозможными, если появлений возможности этих событий одинаково

Обычно факт равновозможности событий предполагается

Пример:

Можно предполож., что элементарн. событ. $A_1, A_2, \dots, A_6$ равновозм-ны т.к. будем считать что игральная кость симметрична.

11.02.0

§1 Сумма событий

Суммой двух событ A и B назыв. событие C, кот. наступ. в том случае, если произ. события либо A либо B (либо только A, либо только B, либо A и B одновременно)

Пример:

И- сдана сессия

A- сдано 3 экзамена

B- сдано 2 экзамена

C=A+B сдано не менее 2 экзаменов

Ω - бросание игр. кости
A - выпало четное число очков
B - выпало нечетное число очков
$C = A + B = \Omega$

Замечание:

Обычно в задачах требуется составить действие: разложить некот. событ. C из более простых событий (перечисление) A и B.

Если между событиями стоит союз «или», это означает, что события связываются знаком суммы.

Пример:

C - сдан хотя бы 1 экзамен
A_i - сдано ровно i экзаменов
$i = 0, 1, 2, 3$

$C = A_2 + A_2 + A_3$

§2 Произведение событий

Произвед. 2 событий A и B назыв. событие C, кот. наступает в том и только в том случае, если события A и B произошли одновременно.

$$C = A \cdot B$$

Пример:

И - бросание игр. кости

А - выпало четное число очк

В - число очков меньше < 3

$C = A \cdot B$ - выпало "2"

Замечание:

В задачи треб. выразить искомое событие через более простые события были событ. соед. союзом „И" это значит что эти события нужно ставить знак умножения.

Пример:

И - сдача сессии

М - сдача эк. по матем.

F - сдача эк. по физике.

H - сдача эк. по химии.

$A_3 = M \cdot F \cdot H$

$A_1 = M \cdot \bar{F} \cdot \bar{H} + \bar{M} \cdot F \cdot \bar{H} + \bar{M} \cdot \bar{F} \cdot H$

§3 Понятие вероятности события.

Пусть И - испытание, А - событие этого испытания. Пусть испытание повторяется неограниченно большое число раз, N - раз. Пусть при этом подтверждается событие А произошло M раз, тогда опр.: число $\omega_N(A) = M/N$ наз. относительной частотой события. (частость события)

Вероятностью события A будем называть число P, выражающее числовую меру объективной возможности наступления события A в данных условиях.

1. $0 \le p \le 1$;
2. $P(\Omega)=1$; $P(\varnothing)=0$;
3. $P \approx \omega_n(A)$.

Замечание:

Мы сейчас следуем, приближённый способ вычисления вероятности $P \approx \omega_n(A)$ называемое статистическим способом.

В различных ситуациях (испытаниях) методы разные для вычисления вероятности.

§4 Классический способ вычисления вероятности.

Пусть n-испытание приводит к конечному числу n, равновозможных исходов тогда вероятность любого события A, может быть вычислена по ф-ле:

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

m — число благоприятствующих событию A исходов ($m \le n$)

Пример:

В ящике 10 шаров, среди них 8 белых, из ящика на удачу выбир. 1 шар. Какова вероятность, что этот шар белый.

Решение:

u – выбор одного шара
$n=10$ – общее число равновозможных исходов
$m=3$ – число благоприятствующих событию исходов
A – выбранный шар белый

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{3}{10}=0,3$$

Пример:

Подбрасывают 2 игральные кости, какова вероятность, что сумма выпавших очков не более 5.
(не правильное решение)

$S=2,3,4,5,\dots,12. \Rightarrow n=11$
$m=4$

$P=\frac{4}{11}=0,364=36,4\%$
– это не верный рез-т.

Полученные исходы не равновозможны ($S=2,3,\dots$)
$\{S=2\}=\{1\ 1\}$
$\{S=3\}=\{12,\ 21\}$

правильное решение:

11	21	31	61	41
12	22	32	62	
13	23	33	63	
14	24	34	64	
15	25	35	65	
16	26	36	66	46

$n=36$
$m=10$

В этом случае все исходы

можно считать равновоз-
можными

$P = \frac{12}{56} \approx 0{,}2148$

Задача

Из пруда выловили 100 рыб, пометили их и выпустили обратно, затем выловили еще 100 рыб, среди них помеченными оказались 20. Опред-ить приблизительное кол-во рыб в пруду.

A – выловленная рыба помечена

N – общее число выловленных рыб

По классич. способу опред-ия вероятности следует, что вероятн. событ. A это есть

$$P(A) = \frac{100}{N}$$

P(A) ≈ относительной частоте появления событ.

$$P(A) \approx \omega_{100}(A) = \frac{20}{100}$$

$$\frac{100}{N} = \frac{20}{100} \qquad N = \frac{100^2}{20} = 500$$

§5 Решение задачи на классический способ вычисления вероятности.

Задача

Студент выучил 15 вопросов из 20 возможных, на экзамене предлагается 3 вопроса, какова вероятность того, что он ответит на все три?

20в = 15з + 5н
Выбор 3в = 3з + 0н

$P = \frac{m}{n}$ $\quad n = C_{20}^{3} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 5 \cdot 19 \cdot 20$

$m = C_{15}^{3} \cdot C_{5}^{0} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 5 \cdot 7 \cdot 13$

$P = \frac{5 \cdot 7 \cdot 13}{5 \cdot 19 \cdot 20} = \frac{91}{228} = \underline{0{,}399}$

Задача

Из колоды 36 карт выбор 2. Какова вероятность того, что среди них один хотя бы туз

36к = 4т + 32ост
Выбор 2к = 1т + 1ост
2т + 0т

$P = \frac{m}{n}$ $n = C_{36}^{2} = \frac{36 \cdot 35}{2 \cdot 1} = 18 \cdot 35$

$m = C_4^1 \cdot C_{32}^1 + C_{32}^0 \cdot C_4^2 = 4 \cdot 32 + 6 = 134$

$P = \frac{134}{18 \cdot 35} = \frac{67}{9 \cdot 35} = 0{,}213$

§7 Другие виды событий

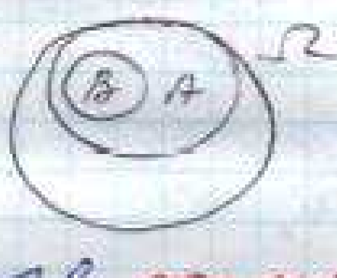
Событие А назв. **благоприятств.** событию В если при наступлении события А всегда наступ. событие В.

Пример: и - бросание кости

А - выпало „2"

В - выпало "четное кол-во очков"

А благоприятств. событию В. ($A \subset B$, $A \Rightarrow B$)



Событие назв. **составным**, если сущ. событие отлич-ное от данного благопри-ятств. данному

Пример: и - брос. игр. кости

А - число очков ≤3 состав-ная т.к. число очков 1 и 2 событие наз. **элементарным** если оно не явл. составным (очень часто элемент. событие назыв. попадание)

Пример: и-бросание игр. кости, A_i - число выпавших очков равно i
$A_1; A_2, \dots; A_6$ - элемент. события

Два события наз. **равновозможными** если появление этих событий одинаково

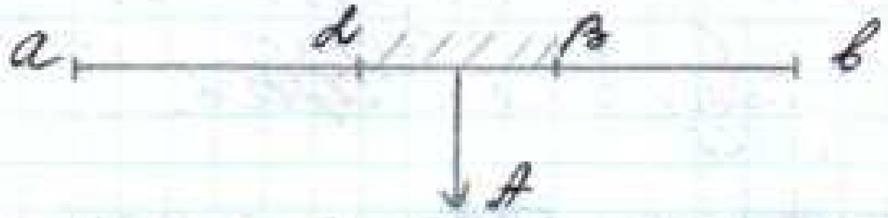
Обычно фактором возможности событий предполагается

Пример: и-бросание игр. кости можно предположить что элемент. события $A_1, A_2, \dots, A_6$ равновозможные т.к. будем считать что игр. кость симметрична.

Геометрический способ вычисления вер-ти в одномерном случае.

01.03.06

1 Пусть некот. испытание можно представить как случайный выбор (·) на числ. лин. (a, b) пусть событ. A соответст. попаданию (·) в некот. отрезок $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$



тогда вероятность события A вычисл. по ф-ле:

$$P(A) = \frac{\beta - \alpha}{a - b}$$

Задача

Перед окопами вдоль прямой линии на каждые 10 м установлены противотанковые мины. 1 этой линии движется танк, ширина кот 3 м. Какова вер-ть того что он пройдет линию мин неповрежд-м.

c - середина точка

A - танк пройдет неповрежденным (1,5, 8,5)

$$P(A) = \frac{8,5-1,5}{10-0} = \frac{7}{10} = 0,7$$

Геометрический случай

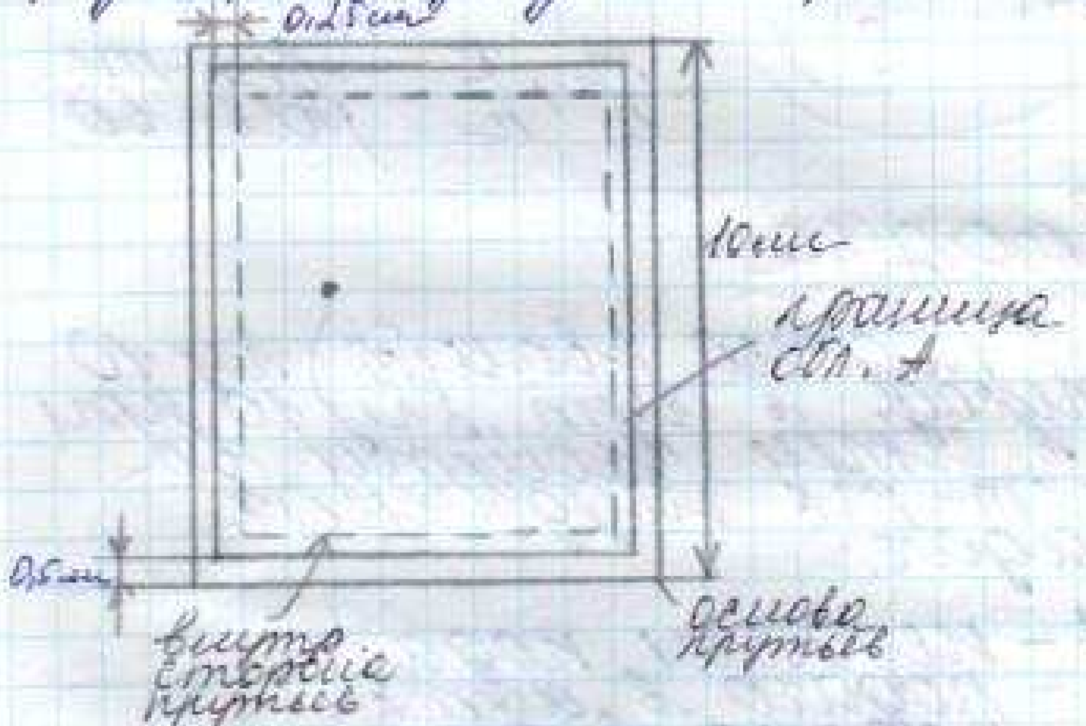
2. Пусть некот испытания можно представить как случ. выбор (.) в некот. мн-ти обл. Ω

Пусть событ. A соотв. попаданию (·) в нек. подобласть $A \subset \Omega$, тогда вер-ть события A опред. по ф-ле:

$$P(A) = \frac{S_A}{S_\Omega};$$

Задача

Производят выстрел пулей $d = 0{,}5$ см по решетке с прутьями толщиной в 1 см и квадратами 10×10 см. Какова вер-ть того, что пуля не заденет решетку?



C – середина пули

$S_\Omega = 10 \cdot 10 = 100$ см^2

$S_A = (10 - 1 - 0{,}5)^2 = 8{,}5^2 = 7{,}23$

$P(A) = \frac{8{,}5^2}{10} = 0{,}85^2 = 0{,}723$

Метод разложение

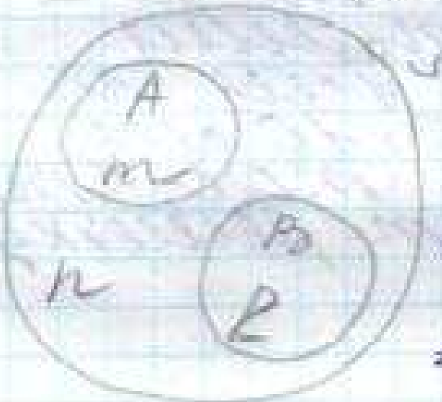
1. Вероятность суммы несовмест. событий

Теорема:

Пусть A и B несовмест. событий, тогда

$P(A+B)=P(A)+P(B)$

Док-во: классич. ситуации.



$P(A)=\frac{m}{n};\ P(B)=\frac{k}{n}$

$P(A+B)=\frac{m+k}{n}=$

$=\frac{m}{n}+\frac{k}{n}$ – вер-ть рав-ва

Задача

1 подача (волейб.) из 10 приход. в аут, а из 10 при 2 в сетку. Найти вер-ть неудачных подач.

A – неудачн. подача
B – подача в ауте
C – подача в сетку

$A=B+C$ несовм. событ.

$P(A)=P(B)+P(C)=\frac{1}{10}+\frac{2}{10}=$

$=\frac{0{,}1+0{,}2}{10}=0{,}3$

Следствие 1:

Если $A_1, A_2, \dots, A_n$ – попарно несовместные, то $P(A_1+A_2+\dots+A_n) = P(A_1)+P(A_2)+\dots$

Следствие 2:

Если $A_1, A_2, \dots, A_n$ – образуют полн. группу, то $\sum$ вер-тей есть:
$P(A_1)+P(A_2)+\dots P(A_n)=1$.

Док-во:

$A_1+A_2+\dots+A_n=\Omega$

$1=P(\Omega)=P(A_1+A_2+\dots A_n)=P(A_1)+P(A_2)\dots$

Следствие 3:

$P(A)=1-P(\bar{A})$

Док-во:

$A, \bar{A}$ – полн. группа событ.
Следствие 2 $\Rightarrow P(A)+P(\bar{A})=1 \Rightarrow$
$\Rightarrow P(A)=1-P(\bar{A})$

Замечание:
следствие 3 удобно пользов. в том случ., если вер-ти противопол. событ. вычислен проще, чем вер-ть самого события.

Задача

Подбр. 3 игр. кости, какова вер-ть того, что $\sum$ вып. очков >5

11	21	31	41	61
12	22	32		62
13	23			63
14				
16	26	36	46	66

Вычисл. в-ть противопол. событ. $\bar{A}$ − ≤ вып. очков не больше 5

$$P(\bar{A}) = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$$

$$P(A) = 1 - \frac{5}{18} = \frac{13}{18}$$

Правило:

Если в описании событ. имеется словосоч. (и т.п.) „хотя бы один", то целесообразно перейти к вычислению вер-ти противополож. события (не A), а затем из 1 получ. рез-т.

Задача:

Из полного наб. 28 костей выбир. 3 кости. Какова вер-ть того, что среди них хотя бы 1 дубль.

A − среди 3-х выбран. костей хотя бы 1 дубль

$\bar{A}$ − нет дублей.

Дано: 28к. = 7д. + 21 ор.

3н. = 0д. − 3ор.

$$\bar{P} = \frac{m}{n} \qquad n = C_{28}^{3} = 9 \cdot 13 \cdot 28$$

$$m = C_{7}^{0} \cdot C_{21}^{3} = 7 \cdot 10 \cdot 19$$

$$\bar{P} = \frac{7 \cdot 10 \cdot 19}{13 \cdot 9 \cdot 28} = 0{,}405; \quad P(A) = 1 - 0{,}405 = 0{,}595$$

2. Условная вер-ть:

Пусть A и B – 2 событ. кажд. из кот. обладает своей вер-тью P(A) и P(B). Предположим, что мы облад. информ., что событ. A произошло. При этой доп. информ-ии вер-ть событ. B может измениться, эта вер-ть и наз-ся условной вер-тью соб. B при условии соб. A.

Задача

В урне 3 бел. и 3 черн. шара. Поочередно выбир. 2 шара.

A – 1-ый шар белый;
B – 2-ой шар белый
(классич. метод. вычисл.)

P(A) и P(B)

{1 2 3 4 5 6} – номера шаров
1 5
3 2 ≠ 2 3 ⇒ размещения

$n = A_6^2 = 30$

Исходы благоприятству-ющие A

A: 1 2 по прин. умнож.
1 5 $m = 3 \cdot 5 = 15$
2 1 $P(A) = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$
...

Исходы благопр. соб. B

B: 5 1 $\quad m = 3\cdot 5 = 15$

2 3 $\quad P(B) = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$

4 2

1

1

Предположим мы знаем, что событ. A произошло, тогда условные вер-ти соб. B $P_A(B) = \frac{2}{5}$ (красненька на пальцах)

Опред: событ. A и B наз. **независимыми**, если вер-ть соб. B совпад.

$$P(B) = P_A(B)$$

в противном случае соб. наз-ся **зависимыми**

A и B - завис. событ., т.к.

$$P(B) = \frac{1}{2} \neq \frac{2}{5} = P_A(B)$$

3. **Теорема о в-ти произведения 2-х событий.**

$$P(A\cdot B) = P(A)\cdot P(B)$$

Док-во: классич. случ.

$P(A\cdot B) = k/n$; $P_A(B) = k/m$;

$P(A) = m/n$; $k/n = m/n \cdot k/m$ - верное рав-во

Теорема: Вероятн-ть произв-ия равна вероятн-ти 1-ого множит. x на вероятн. 2-ого множителя.

Лекция 6

След-е 1. A и B незав. $\Rightarrow$ $P(AB) = P(A)P(B)$

След-е 2. Если $P(A) \neq 0 \Rightarrow$ $P_A(B) = \frac{P(AB)}{P(A)}$

Задача 1 (на след-ие 1)

Команды встреч по теннису встречаются 3 пары A_1B_1; A_2B_2; A_3B_3

вер. выбор: A_1 у B_1 = 0,8
A_2 у B_2 = 0,4
A_3 у B_3 = 0,4

вероят-ть выбор ком. A у ком. B.

A - выиграли команда „A" у команды „B"

A_i - выиграли команда „A" в i-ой паре.

$A = A_1A_2\bar{A}_3 + A_1\bar{A}_2A_3 + \bar{A}_1A_2A_3 + A_1A_2A_3$

несовместные слагаемые

$A = 0,8 \cdot 0,4 \cdot 0,4 + 0,8 \cdot 0,4 \cdot 0,6 + 0,8 \cdot 0,6 \cdot 0,4 + 0,2 \cdot 0,4 \cdot 0,4 = 0,544$

вероят. выбора команды A > B

Задача 2 (на след-ие 2)

О дележе шкуры убитого медведя. На охоте медведь был убит 1-ой пулей в охоте участвовали 2 стрелка кот. произвели по 1 выстрелу.

Вероятность попадания для кажд. 0,8 и 0,6. Как поделить выручку от продажи шкуры убитого медведя.

A – ровно 1 попадание (принадлежно)
A_i – попадан. i-го стрелка

Нужно найти условную вероятность $P_A(A_1)$

$P_A(A_i) = P(AA_i)$

$A = A_1\bar{A}_2 + \bar{A}_1 \cdot A_2$; $A = 0{,}8 \cdot 0{,}4 + 0{,}2 \cdot 0{,}6 = 0{,}44$

$A \cdot A_1 = A_1 \cdot \bar{A}_2$; $P(AA_1) = 0{,}8 \cdot 0{,}4 = 0{,}32$

$\frac{P(A_1)}{A} = \frac{8}{11} = 73\%$

Ответ: 1-ый стрелок 73% от выр

Задача 3 (о судьбе) (на теорему)

Маша выучила 15 из 20 какие выгоднее идти на эк. 1, 2 последними?

Найдем вероятность выбора хор. 5, если она 1

а) $P(A_1) = \frac{15}{20} = 0{,}75$

Найдем вер. -"-"-"- если 2-ой

б) A_1 – выбор счастливого билета
B – первый идущий выбрал счастливый билет

С – Маша выбрала счастливый билет.

$$A_2 = B\cdot C + \bar{B}\cdot C$$

$$P(A_2) = P(B)\cdot P_B(C) + P(\bar{B})\, P_{\bar{B}}(C) = \frac{15}{20}\cdot\frac{14}{19} + \frac{5}{20}\cdot\frac{15}{19} = \frac{15(14+5)}{20\cdot 19} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4} = 0{,}75$$

След. 3

Вероятность (·) большого кол-ва множителей $A_1A_2A_3\ldots$

$$P(A_1A_2A_3\ldots) = P(A_1)\,P_{A_1}(A_2)\,P_{A_1A_2}(A_3)$$

Опр-ие:

События $A_1A_2A_3$ и т.д. наз-ся независимыми в совокупности, если любому из этих событий и произведения любого кол-ва оставшихся событий независимо.

След. 4

Если $A_1A_2A_3$ независимы в совокупности, то вероят. (×) $A_1A_2A\ldots$ = (×) вероятн.

$$P(A_1\cdot A_2\cdot A_3) = P(A_1)\,P(A_2)\,P(A_3)\ldots$$

отсюда пользоваться след.

2. Вероятность появления хотя бы одного из данного набора событий.

Теорема:

Пусть вероят событий
$P(A_1) = p_1$; $P(A_2) = p_2$, ...
($q_1 = 1 - p_1$; $q_2 = 1 - p_2$) ... вер противополож. событ)

Тогда вероятность появления хотя бы одного из событий $A_1 A_2 A_3$ ...
$P(A_1 + A_2 + \dots) = 1 - q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 \dots$
где $A_1, A_2, \dots$ независ. в совокуп.

Док. $A = A_1 + A_2 + A_3$ ... - появления хотя бы одного из событий A_1, A_2 ...

$\bar{A}$ - ни одного из событий не произошло
$\bar{A} = \bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \dots$

$P(\bar{A}) = P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) \dots = q_1 \cdot q_2 \dots$

$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - q_1 \cdot q_2 \dots$

Задача

Сколько нужно выпустить торпед по кораблю, что бы вероятность поражения была не менее 0,95 если вероят-ть пораж. 1-ой торпеды = 0,3

A - поражение цели
A_i - i торпеда попала в цель

$A = A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_n$ (д.б. найдена)

По теореме вероятн-ть A
$P(A) = 1 - q_1 q_2 \ldots q_n = 1 - 0{,}7^n$ не менее 0,95

$0{,}7^n \le 0{,}05$
$\log_{0,7} 0{,}05$

$n \ge \log_{0,7} 0{,}05 = \frac{\ln 0{,}05}{\ln 0{,}7} = 8{,}4$

Ответ: $n = 9$

3. Ф-ла полной вероятности

Теорема: Пусть $H_1, H_2, \ldots$ образуют полную группу событий, тогда вероятность

$$P(A) = P(H_1)\cdot P_{H_1}(A) + P(H_2)\cdot P_{H_2}(A) + \ldots$$

Комментарий:

1. Ф-ла наз-ся ф-ой полной вероятн-ти
2. H_1, H_2 назв-ся гипотезами

$A = A\cdot H_1 + A\cdot H_2 + \ldots$
$P(A) = P(A\cdot H_1) + P(A\cdot H_2) + \ldots =$
$= P(H_1)\cdot P_{H_1}(A) + P(H_2)\cdot P_{H_2}(A) + \ldots$

Задача

Красная шапочка выходит из дома к бабушке, в дом в, случайно выбирая дорогу на перекрестке. Найти вероятность того, что красная шапочка дойдет до бабушки

Решение

Вероятн. исходн. события зависит от нек. гипотез (событий)

H_1 - выбрана верхняя дорога,

H_2 - выбрана средняя дорога,

H_3 - выбрана нижняя дорога

A - к.ш. дошла до бабушки

$P(H_1)=\frac{1}{3}$	$P_{H_1}(A)=\frac{1}{3}$
$P(H_2)=\frac{1}{3}$	$P_{H_2}(A)=1$
$P(H_3)=\frac{1}{3}$	$P_{H_3}(A)=\frac{1}{2}$

$$P(A)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot 1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}+1+\frac{1}{2}\right)=$$
$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{2+6+3}{6}=\frac{11}{18}$$

4. Формула Байеса

Теорема: Пусть $H_1, H_2, \ldots$ образуют полную группу, тогда для любого события A: $P(A)\neq 0$, справедл. след. ф-ла:

$$P_A(H_i) = \frac{P(H_i)\cdot P_{H_i}(A)}{P(H_1)\cdot P_{H_1}(A)+P(H_2)\cdot P_{H_2}(A)+\ldots}$$

Док-во: из следствия 1 и 2 (начало лекции)

$$P_A(H_i) = \frac{P(A\cdot H_i)}{P(A)} \overset{\text{по теор}}{=} \frac{P(H_i)\cdot P_{H_i}(A)}{P(A)} =$$

$$= \frac{P(H_i)\cdot P_{H_i}(A)}{P(H_1)\cdot P_{H_1}(A)+P(H_2)\cdot P_{H_2}(A)}$$

Задача (см. кр. шап.)

Пусть красная шапочка дошла до бабушки, какова вероятность, что она шла по средней дороге.

A - произошло

$$P_A(H_2) = \frac{\frac{1}{3}\cdot 1}{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot 1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{3}+1+\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{1}{\frac{2+6+3}{6}} = \frac{6}{11}$$

12.03.06

§1 Схема независимых испытаний

Пусть И - испытание

A - событие («успех»)

p - вероятность «успеха»

$p=P(A)$

$q=1-p$

И - брос. игр-ой кости

A - выпадение «6»

$p=\frac{1}{6}$

$q=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$

И - повторяется n раз
A может произойти m раз
$m = 0, 1, 2, \ldots, n$
вероятность того что в n-кратном повторении испытаний успех A произойдет ровно n раз выч-ся по ф-ле

Бернулли

$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}$

p - вероятн. успеха в одном испыт.
q - вероятн. не успеха в одном испытании
n - число испытаний
m - число успехов
$P_n(m)$ - вероятн. ровно m успехов в n независимых испытаниях.

игр-ую кость бросили $n = 5$ раз
„6" может выпасть
$m = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ раз.
вероятн. того, что „6" выпадет ровно 3 раза при 5-и кратном бросании игральной кости равна

$P_5(3) = C_5^3 p\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^2 = C_5^2 \frac{25}{216 \cdot 36} = \frac{125}{108 \cdot 36} = 0{,}032$

Пр-ер:
$n = 4, m = 2$
В - в $n = 4$ испытаниях „успех" произойдет
A_i - в i-ом испытании „успех" произошел
$i = 1, 2, 3, 4$

$B = B_1 B_2 \bar{B}_3 \cdot \bar{B}_4 + B_1 \bar{B}_2 B_3 \bar{B}_4 + \ldots$

Вычислим число кол-во таких слагаемых

Каждое слагаемое опред-ся 2-мя номерами испытаний в кот. происходит успех.

$\{1, 2, 3, 4\}$ - номера испытаний

Примеры выбора 2-ух номеров.

1 2
1 4
2 3
~~2 4~~

$\Rightarrow$ это испытание из 4-х по 2

$C_4^2 = C_n^m$

Общее число слагаемых равно числу сочетаний из 4 по 2-м. Слагаемые предст-ют собой попарно несовместные события, поэтому вероятн. B = сумме вероятн-тей.

$P(B) = P(B_1 B_2 \bar{B}_3 \bar{B}_4) + \ldots$

В силу независимости испытаний множители в произведениях не зависимо друг от друга.

$P(B_1 B_2 \bar{B}_3 \bar{B}_4) = P(B_1) P(B_2) P(\bar{B}_3) P(\bar{B}_4) = p^2 q^2 = p^m q^{n-m}$

$\Rightarrow P_n(m) = P(B) = C_n^m p^m q^{n-m}$ - ф-ла Бернулли.

§2 Интересные задачи

(задача об экстрасенсе)

задача.

чем отгадав в какой руке спрятан предмет. Вычислить вероятность, что он угадает в 3-х случаях из 4-х, в 9 случаях из 10-ти.

n – одно отгадывание
A – предмет угадан.

$p = \frac{1}{2}$

$\begin{cases} n = 4 \\ m = 3 \end{cases}$ $\begin{cases} n = 10 \\ m = 9 \end{cases}$

$$P_4(3) = C_4^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^1 = 4 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{4} = 0{,}25$$

$$P_{10}(9) = C_{10}^9 \left(\frac{1}{2}\right)^9 \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{10}{2^{10}} = \frac{5}{2^9} \approx 0{,}01$$

Задача об удобных купе.

Купе считается удобным, если в нем едут только женщины или только мужчины. Найти %-нт удобн. купе в вагонах, если считать вероятность приобрет. мужчиной или женщиной одного билета одинаковой.

n – покупка одного билета в купе
A – купил мужчина

$p = \frac{1}{2}$
$n = 4$
$m = 4$ или 0

$$P_4(4) = C_4^4 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{16}$$

B – купе удобное

$$P_4(0) = C_4^0 \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$$

$$P(B) = P_4(4) + P_4(0) = \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{1}{8} = 0{,}125$$

Ответ: около 12,5% всех купе удобные.

Задача 3

В ведре наход. много трубчатых ячеек, чтобы эта вода помещается на солнце, данная процедура повторяется 4 раза. Опред-ить степень высушивания вод.

и – помещение одной воды на солнце

A – конкретная точка на пов-ти воды попала под лучи солнца

$p = \frac{1}{2}$ – вероятность успеха в одном испытании

$n = 4$ – число испытаний;

$m \geq 1$ – число „успехов“

$$P_n(m \geq 1) = 1 - P_4(m=0) = 1 - P_4(0) = 1 - C_4^0\left(\tfrac{1}{2}\right)^0\left(\tfrac{1}{2}\right)^4 = 1 - \tfrac{1}{16} = \tfrac{15}{16} = 0{,}937 \approx 94\%$$

Вывод: 94% всей пов-ти воды будет высушено за 4 суток.

§3 Наивероятнейшее число „успехов“ в n независимых испытаниях

m – число „успехов“

$m = 0, 1, 2, \ldots, n$

$P_n(m)$: $P_n(0), P_n(1), P_n(2), \ldots, P_n(n)$ какая-то из вероятностей в нашем ряду будет наибольшей

Опр. Число успехов m_0 соотв-ее наибольш. вероятн-ти назыв. наивероятнейшим числом или модой.

Теорема:

$$m_0 = \begin{cases} [(n+1)p] \text{ - целая часть числа } (n+1)p, \text{ если это число дробное} \\ (n+1)p,\ (n+1)p-1 \text{ - если } (n+1)p \text{ целое} \end{cases}$$

Задача

Батарея дала 14 выстрелов по объекту. Вероятн. попадания при одном выстреле $= 0{,}2$. Найти наивероятн-ее число попаданий и вероятн. этого числа попаданий.

$n = 14$

$p = 0{,}2$

$(n+1)p = 15 \cdot \frac{1}{5} = 3$

по теореме имд., что сущ-ет 2 моды:

$m_0 = 3$ и $m_0 = 2$

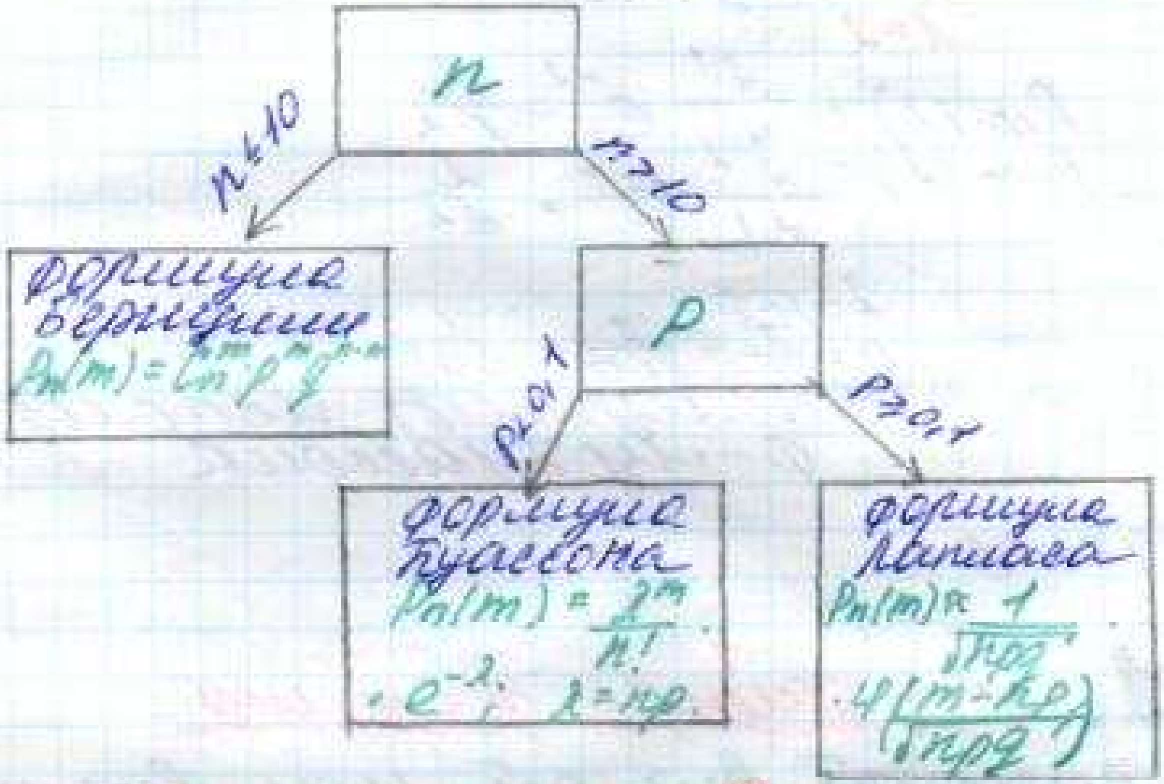
$P_{14}(3) = C_{14}^{3} \cdot 0{,}2^3 \cdot 0{,}8^{11} = 0{,}25$

$P_{14}(2) = C_{14}^{2} \cdot 0{,}2^2 \cdot 0{,}8^{12} = 0{,}25$

§4 Асимптотич. формулы в схеме независ. испытаний

Если n велико, то ф-ла Бернулли пользов. не удобно.

Таблица использования формул в схеме независ. испыт.



Комментарий:

1. Вел-ну λ назыв. средним числом наступления успехов в n-испыт-ях:

$\lambda = np \approx n \frac{m}{n} = m$

статистич. вероятн.

2. $\varphi(x) = 1/\sqrt{2\pi} \cdot e$ — затабулиров-ан ф-ия Лапласа

Задача

Опытный врач ставит 100 диагн. в месяц, ошибаясь в среднем 2 раза

сравнить, что произ-
чаще 1 ошибка в ме-
сяц, чем 2 ошибки в
месяц

n — 1 диагноз
A — ошибка
$n = 100$
p — не дано
$\lambda = 2$

$$P_{100}(1) = \frac{2^1}{1!} e^{-2} = \frac{2}{e^2}$$
$$P_{100}(2) = \frac{2^2}{2!} e^{-2} = \frac{2}{e^2}$$

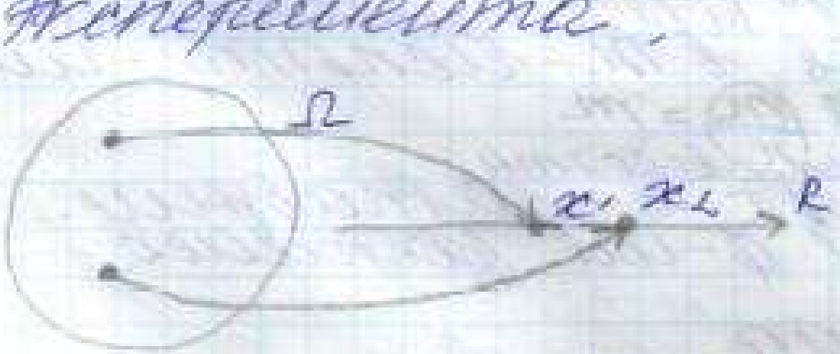
$$\lambda = np$$
$$p = \frac{\lambda}{n} = \frac{2}{100} = \frac{1}{50} < 0{,}1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ поэтому мы использ. ф-лу Пуассона

29.03.06

1. Случайные величины

Случ-ой вел-ой наз. вел-на, кот. принимает своё значение при любом исходе эксперимента.



Примеры: 1. X - число годных транзисторов в схеме, состоящей из 3-ех транзисторов.
$X = 0, 1, 2, 3$

2. Y - число попыток для завода двигателя
$Y = 1, 2, 3, 4, \ldots$

3. T - время опоздания на лекцию
$T \in [0; 1{,}5]$

4. S - время горения лампочки
$S \in [0; +\infty)$

Случ-ые вел-ны дел-ся на 2 основных типа
1. Дискретные случайные величины.
2. Непрерывные случайные величины.

§2 Дискретная случ. вел-на

Опр.: Дискр. случ. вел-ой наз. случ. вел-ну число возможных значений которой либо конечно, либо счетно (т.е можно занумеровать натур-ым рядом 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...)

Любая дискретная случ. вел-на опред. своим рядом распределения, т.е табл. вида, где

x_i	x_1	x_2	...	...	...
p_i	p_1	p_2	...	...	...

в верхн. ряду распола-ся все возможные знач по возрастанию, в нижнем ряду распола. соответствующие вер-ти.

Пример:

На связке 5 ключей, 1 из них подходит к замку. Человек, перебирая ключи пытается открыть замок. Построить ряд распределения числа испытанных ключей

x_i	1	2	3	4	5
p_i	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

x – число испытанных ключей

$P(x=1)=\frac{1}{5}$

$P(x=2)=\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{5}$

......

Замечание: Ряд распределения часто наз. законом распределения

Задача.

В к/р 3 задачи, вероятность решить каждую из них = 0,3. Найти з-ен распред-ия д/числа решенных задач.

Y – число решённых задач

y_i	0	1	2	3
p_i	0,343	0,371	0,189	0,027

Используем ф-лу Бернулли:

$P(Y=0)=P_3(0)=C_3^0\cdot 0{,}3^0\cdot 0{,}7^3=$
$=0{,}49\cdot 0{,}7=0{,}343$

$P(Y=1)=P_3(1)=C_3^1\cdot 0{,}3^1\cdot 0{,}7^2=$
$=3\cdot 0{,}3\cdot 0{,}49=0{,}371$

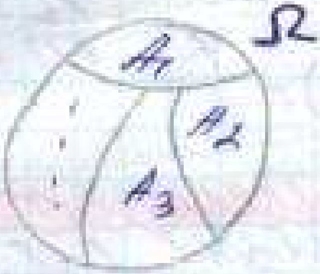
$P(Y=2)=P_3(2)=C_3^2\cdot 0{,}3^2\cdot 0{,}7=$
$=0{,}27\cdot 0{,}7=0{,}189$

$P(Y=3)=P_3(3)=C_3^3\cdot 0{,}3^3\cdot 0{,}7^0=$
$=0{,}027$

§3 Основное свойство ряда распределения

Теорема:

$$\boxed{p_1+p_2+\ldots=1}$$



Док-во:

$A_1=(X=x_1)$
$A_2=(X=x_2)$
$\vdots$

Из рис. видно, что A_1, A_2 образ. полную группу.

Из начала курса следует, что $P(A_1)+P(A_2)+\ldots=1 \Rightarrow P_1+P_2+\ldots=1$

Пример:

В урне 3 белых и 2 черных шара. Выбир. 2 шара. Сост. ряд распред. (среди) числа бел. шаров среди выбранных 2-ух.

x_i	0	1	2
p_i	$\frac{1}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{3}{10}$

X - число бел. шар.

Дано: 5 шаров = 3б+2ч.
Выбор: 2ш. = 0б+2ч

$P(x=0)$:

$P(x=0)=\frac{1}{10}$

$P=\frac{m}{n}$ $\quad n=C_5^2=\frac{5\cdot4}{2\cdot1}=10$

$m=C_3^0\cdot C_2^2=1$

$P(x=1)$:

Дано: 5ш. = 3б.+2ч.
Выбор: 2ш = 1б.+1ч.

$P=\frac{m}{n}$ $\quad n=C_5^2=10$

$m=C_3^1\cdot C_2^1=3\cdot2=6$

$P(x=1)=\frac{6}{10}$

Комментарий: Последн. эл. в табл. можно заполнить при помощи основного ряда распред-ия, но такой сп. нахожд. вер-ти чреват ошибкой!!!

54 Система двух дискретных случайных велич-ин.

а) Сложение

Пример:

Брошено 2 монеты

X_1 – число гербов на 1-ой монете

X_2 – число гербов на 2-ой монете

X_1:

x_i	0	1
p_i	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

X_2:

x_i	0	1
p_i	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

X – число гербов на 2-ух монетах

$X = X_1 + X_2$

Составим ряд распределения сл-ой вел-ны X 2-мя способами:

1 способ:

x_i	0	1	2
p_i	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

$p(x=0) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$p(x=1) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$p(x=2) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

2 способ: (сложение 2-ух рядов распределения)

x_i	0+0	0+1	1+0	1+1
p_i	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$

Комментарий:

«x» Каждому значению 1-ого ряда «+» каждое знач-е 2-ого ряда. При этом вероят-ти соотв-ие перемножаются

x_i	0	1	1	2
p_i	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

x_i	0	1	2
p_i	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Столбцы с одинак. значению знач-ми объед-ся в 1-ин столбец, при этом вероят-ти соответ-ие складываются.

x_i	0	1	2
p_i	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

б) Линейные случ. вел-ны

Перемножим 2-е случайные величины x_1 и x_2.

x_i	$0\cdot 0$	$0\cdot 1$	$1\cdot 0$	$1\cdot 1$
p_i	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$

x_i	0	0	0	1
p_i	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

x_i	0	1
p_i	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

в) Важные частные случаи.

$X =$

x_i	x_1	x_2	...
p_i	p_1	p_2	...

$C =$

x_i	C
p_i	1

– постоянная случ. вел-на

$X + C =$

x_i	x_1+c	x_2+c	...
p_i	p_1	p_2	...

$C \cdot X =$

x_i	$c \cdot x_1$	$c \cdot x_2$	...
p_i	p_1	p_2	...

22

$X^2 =$

x_i	x_1^2	x_2^2	...
p_i	p_1	p_2	...

Пример:

X:

x_i	-1	0	1
p_i	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

X^2:

x_i	$(-1)^2$	0^2	1^2
p_i	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

x_i	1	0	1
p_i	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

X^2:

x_i	0	1	
p_i	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	

Замечание:

Слагаемые в сумме, множители в произвед-ии ($X_1 \cdot X_2$) при таких операциях должны представлять собой независимые (друг от друга) случ. вел-ны.

§5 Математическое ожидание дискретной случайной вел-ны

Опр: -"- Наз. число, кот. обознач. $M(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \ldots$,

Вероятн. статистический смысл этого числа.

Пусть случ-ая вел-на X наблюдается в серии из N независ-ых испытаний. Пусть в этой серии величина знач. ие x_1 встретилось n_1 раз, знач. x_2 — n_2 раза, и т.д.

Вычислим среднеариф-ое наблюдаемых знач-ий $\bar{X}$.

$$\bar{X} = \frac{x_1 \cdot n_1 + x_2 \cdot n_2 + \ldots}{n} =$$

$$= x_1 \cdot \frac{n_1}{n} + x_2 \cdot \frac{n_2}{n} + \ldots \approx x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \ldots =$$

$\frac{n_1}{n}$ — относит-ая частота события $(X = x_1)$, и т.д.

$= M(X)$

Вывод:
Математич-ое ожид-ие дискретной случ-ой вел-ны приближ-о = средн-арифм-му наблюд. знач. в большой серии испыт.

05.04 Задача пример

Вероятн. того, что 40 летний чел. доживет до 50 лет = 0,927. Если такой чел. будет застрах. на 1 год на 1000$ со страховым взносом в 100$, то какова в среднем выгода страховой компании, если она застрахует 1000 чел.

X – прибыль компании при страховании 1-го чел.

x_i	-900	100
p_i	0,073	0,927

$M(X) = -900 \cdot 0,073 + 100 \cdot 0,927 =$
$= 27$

Использ. статистич-ий смысл математич-ого ожид-ия (конец прошлой лекции) мы можем провести след-ее: выбираем 1000 чел. и фиксир. прибыль компании при страховании каждого из них.
Пусть это $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{1000}$

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{1000}}{1000} \approx M(X)$$

П $\approx 27 \cdot 1000 = 27000$

§1 Свойства математического ожидания.

а) $M(C)=C$

б) $M(C\cdot X)=CM(X)$

в) $M(X_1 \pm X_2)=M(X_1)\pm M(X_2)$

г) X_1, X_2 – независимы, $\Rightarrow$

$M(X_1\cdot X_2)=M(X_1)\cdot M(X_2)$

Вывод б)

X:

x_i	x_1	x_2	...
p_i	p_1	p_2	...

$C\cdot X$:

x_i	Cx_1	Cx_2	...
p_i	p_1	p_2	...

(см. прош. лекцию)

$M(C\cdot X)=Cx_1\cdot p_1+Cx_2\cdot p_2+\dots=C(x_1p_1+x_2p_2+\dots)=C\cdot M(X)$

Замечание: В св-ах „б" и „г" число слаг-ых в сумме и число множит-ей в произвед. м/б > чем 2

Задача

Производится 3 выстрела в мишень с вероятностями попадания $p_1=0,3$; $p_2=0,4$; $p_3=0,6$. Най-

...ти математич-ое ожидание числа попад. в мишень при 3 выстрелах

X – число попад. в мишень при 3 выстрелах

x_i – " – " – " – " – при i-ом выстреле

$i = 1, 2, 3.$

$X = x_1 + x_2 + x_3$

$M(X) = M(x_1) + M(x_2) + M(x_3) =$

x_1:

x_i	0	1
p_i	0,7	0,3

$M(x_1) = 0,3$
$M(x_2) = 0,4$
$M(x_3) = 0,6$

$= 0,3 + 0,4 + 0,6 = 1,3$

§2 Понятие дисперсии дискретной случайной вел-ны

Рассм. 2 разные дискретн. случ-ые вел-ны.

X:

x_i	-1	1
p_i	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Y:

y_i	-100	100
p_i	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

$M(X) = -1 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = 0$ $\quad$ $M(Y) = -100 \cdot \frac{1}{2} + 100 \cdot \frac{1}{2} = 0$

Математич-ие ожид. одинаковы, но разброс вокруг знач. около математич. ожид. разные.

Введем числ-ную хар-ку хар-щую разброс, рассеяние.

Опр.: Дисперсией дискр. случ. вел-ны наз. число кот. будем обозн. $D(x)$ и кот: $\sigma^2 = D(x) = M((x - M(x))^2)$

Комментарий:

1. Дисперсия хар-ет квадрат отклонения вел-ны случ-ной от мат. ожидания.
2. Дисперсию нельзя определить как
$D(x) = M(x - M(x))$, но
$M(x - M(x)) = M(x) - M(M(x)) =$
$(M - 60 - 1) = M(x) - M(x) = 0$
3. Чтобы всё-таки охарактер-ать не кв-ат отклонения, а само отклонение, вводят 3 хар-ку случ-ой вел-ны
$\sigma(x) = \sqrt{D(x)}$ называемую
средним квадратич-им отклонением.

§3 Способы вычисл. дисперсии

а) Сп. 1 Вытек. из опред. дисперсии

X

Xi	X_1	X_2	...
Pi	P_1	P_2	...

X - M(X):

Xi	$X_1 - M(X)$	$X_2 - M(X)$	...
Pi	P_1	P_2	...

$(X-M(X))^2$:

x_i	$(x_1-M(x))^2$	$(x_2-M(x))^2$	...
p_i	p_1	p_2	...

(см. прошл. лекц.)

$D(X)=M((x-M(x))^2)=(x_1-M(x))^2\cdot p_1+$
$+(x_2-M(x))^2\cdot p_2+\dots$

Внимание:
Этот способ б. использ. в том случае если вероят-ое знач x_i, x "не удобное" для возведе-ния в квадрат

Пример:

x_i	0,3	1,2	1,6
p_i	0,4	0,5	0,1

$M(X)=0{,}3\cdot0{,}4+1{,}2\cdot0{,}5+1{,}6\cdot0{,}1=$
$=0{,}12+0{,}6+0{,}16=0{,}88$

$D(X)=(0{,}3-0{,}88)^2\cdot0{,}4+(1{,}2-0{,}88)^2\cdot0{,}5+$
$+(1{,}6-0{,}88)^2\cdot0{,}1=0{,}58^2\cdot0{,}4+0{,}32^2\cdot$
$\cdot0{,}5+0{,}72^2\cdot0{,}1=0{,}23$
$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=$

б) спос. 2

$D(X)=M(X-M(X))^2)=M(X^2-2X\cdot M(X)+$
$+M^2(X))=M(X^2)-M(2X\cdot M(X))+$
$+M(M^2(X))=M(X^2)-2M(X)\cdot M(X)+$
$+M^2(X)=M(X^2)-M^2(X)$

$D(x) = M(x^2) - M^2(x)$

X:

x_i	x_1	x_2	...
p_i	p_1	p_2	...

X^2:

x_i	x_1^2	x_2^2	
p_i	p_1	p_2	

$M(x^2) = x_1^2 \cdot p_1 + x_2^2 p_2 + \ldots$

$$D(x) = x_1^2 \cdot p_1 + x_2^2 \cdot p_2 + \ldots - M^2(x)$$

Замечание

Этой формулой удобно польз. в том случае, если возможные знач. случ-ой вел-ны удобно возводить в квадрат.

Пример:

X:

x_i	1	2	4
p_i	0,3	0,5	0,2

$M(x) = 1 \cdot 0,3 + 2 \cdot 0,5 + 4 \cdot 0,2 = 0,3 + 1 + 0,8 = 2,1$.

$D(x) = 1^2 \cdot 0,3 + 2^2 \cdot 0,5 + 4^2 \cdot 0,2 - (2,1)^2 = 0,3 + 2 + 3,2 - 4,41 = 5,5 - 4,41 = 1,09$

$\sigma(x) = 1,04$

Замечание:

Если мат-е ожид. и прин. малые значения на числовой прямой, то дисперс. д. любой случ. вел-ны есть вел-на не отриц.

§4 Св-ва дисперсии

1. $D(C)=0$
2. $D(C\cdot X)=C^2 D(X)$
3. $D(C+X)=D(X)$
4. X_1, X_2 — не зависимы, то
$D(X_1 \pm X_2) = D(X_1)+D(X_2)$

Задача

$M(x)=-1, \quad M(y)=2$
$D(x)=2, \quad D(y)=1$ $\quad x, y$ — независимы

Найти: $D(2x-3y)$
$M(x^2), \; M(y^2)$

Решение:

$D(2x-3y)=D(2x)+D(3y)=$
$=4\cdot D(x)+9D(y)=4\cdot 2+9\cdot 1=17$

$D(x)=M(x^2)-M^2(x)$
$M(x^2)=D(x)+M^2(x)=2+(-1)^2=3$
$M(y^2)=D(y)+M^2(y)=1+2^2=5$

§5 Начальные и центральные моменты

Опр.: нач. мом. порядка k случ. вел. X назыв. число, кот. обозн. ν_k, кот. $=$ $\nu_k=M(X^k)$

Мы уже знаем $\nu_1=M(X)$ и $\nu_2=M(X^2)$

Опр.: Центральными моментами порядка k дискр. сл. вел-ны X наз. число, кот. обозн. μ_k и кот. $= \mu_k = M((X - M(X))^k)$.

$\mu_1 = 0,\ \mu_2 = D(X)$

Формулы (св-ва) ф-лы без вывода:

$\mu_3 = \nu_3 - 3\nu_2 \cdot \nu_1 + 2\nu_1^3$

$\mu_4 = \nu_4 - 4\nu_3 \nu_2 + 6\nu_2 \nu_1^2 - 3\nu_1^4$.

Перейдём к изучению распред-ий специального вида.

§6 Биномиальное распред-ие

Опр.: Дискретн. случ. вел-на наз. биномиальной распред., если ее ряд распред. имеет след. вид:

x_i	0	1	2	...	n
p_i	$P_n(0)$	$P_n(1)$	$P_n(2)$	...	$P_n(n)$

, где

$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$
(ф-ла Бернулли)
$0 < p < 1$.

Замечание:
Этот класс дискретн. случ. вел-ин важен, т.к. число успехов m в схеме испытаний Бернулли

Вел. биномиальн. случ. вел-ой
(1) Закон биномиального закона: $X \sim B(n, p)$

Теорема:
Если случ. вел-на $X \sim B(n,p)$, то $M(X) = n \cdot p$
$D(X) = npq = M(X) \cdot q$
x - число успехов в серии испытаний
12.04.06

§1 Док-во:
x - число "успехов" в n испытаниях
x_i - число "успехов" в i-ом испытании
$i = 1, 2, \ldots, n$

$x = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ x_i:

x	0	1
P_i	q	p

$M(x_i) = p$
$D(x_i) = p - p^2 = p(1-p) = pq$

$M(x) = M(x_1) + M(x_2) + \ldots = np$
$D(x) = D(x_1) + D(x_2) + \ldots = npq$

Задача

В контр. раб. 7 задач. Решение каждой задачи происх. с вероятн-ью 0,7. Найти мат. ожид., дисперсию, числа решенных задач.

$M(X) = 7 \cdot 0{,}7 = 4{,}9$
$D(X) = 7 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3 = 4{,}9 \cdot 0{,}3 = 1{,}47$

§2 Закон Пуассона

Опр.: Дискретная случ. величина наз. распред-ой по з-ну Пуассона с параметром $\lambda > 0$, если ее ряд распред. имеет вид:

x_i	0	1	2	3	…
p_i	$\frac{\lambda^0}{0!}e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^1}{1!}e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^3}{3!}e^{-\lambda}$	…

Значение закона Пуассона
$X \sim Pu(\lambda)$

Теорема:
$X \sim Pu(\lambda)$, то $M(X) = \lambda$, $D(X) = \lambda$

Док-во:

$$M(X) = 0 \cdot \frac{\lambda^0}{0!}e^{-\lambda} + 1 \cdot \frac{\lambda^1}{1!}e^{-\lambda} + 2 \cdot \frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda} + \ldots =$$

$$= e^{-\lambda}\left(\lambda + \frac{\lambda^2}{1!} + \frac{\lambda^3}{2!} + \ldots\right) = e^{-\lambda}\lambda\underbrace{\left(1 + \frac{\lambda^1}{1!} + \frac{\lambda^2}{2!} + \ldots\right)}_{e^{\lambda}} =$$

$$= e^{-\lambda}\lambda e^{\lambda} = \lambda$$

Замечание:
З-ну Пуассона „почти" подчиняется число успехов в схеме не завис-ых испытаний при „большом n" и при малом p.

Задача
На хлебокомбинате в час готовят булочки с изюмом из расчета 10 изюминок на булочку. Найти мат. ожид. дисп. числа изюминок в булочке.

И - проверка на попадание пробивки в бутылку.
А - пробивка попала
n - известно, но велико
p - вероятн. мала
$\lambda=np$ - среднее число успехов
$\lambda=10$.
m - число "успехов" - дискретная случайная величина

m_i	0	1	2	3	...	n
p_i	$\frac{\lambda^0}{0!e^{\lambda}}$	$\frac{\lambda^1}{1!e^{\lambda}}$	$\frac{\lambda^2}{2!e^{\lambda}}$	...		

$$P_n(m)=\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}$$

Д/вычисл. соотв-их вероятн. будем использ. асимптотич-ую ф-лу Пуассона

$\Rightarrow m \sim Pu(\lambda)$

$M(m)=\lambda=10,\ D(m)=\lambda=10,\ \sigma(m)=3,3$

§3 Геометрическое распред-ие.

Опр. Дискретная случ. вел-на тогд. распред-ся по геом. закону с параметром p, $0<p<1$ если ее ряд распред. имеет след. вид.

x_i	1	2	3	4	5	...
p_i	p	qp	q^2p	q^3p	q^4p	...

Обознач.: $x \sim G(p)$

Теорема:

$x \sim G(p) \Rightarrow M(x) = \frac{1}{p},\ D(x) = \frac{q}{p^2}$

Док-во:

$M(x) = p + 2qp + 3q^2p + 4q^3p + \ldots =$

$= p(1 + 2q + 3q^2 + 4q^3 + \ldots) =$

$= p((q)' + (q^2)' + (q^3)' + \ldots) =$

$= p(q + q^2 + q^3 + \ldots)' = p\left(\frac{q}{1-q}\right)' =$

$= p\,\frac{q'(1-q) - q(1-q)'}{(1-q)^2} = p\,\frac{1-q+q}{(1-q)^2} =$

$= \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}$

Задача

Вероятн. попад. в мишень при 1-ом выстреле $= 1/3$. Найти мат. ож., дисп. числа произведенных выстрелов до 1-ого попад. в мишень

X – число выстрелов до 1-ого попадания.

x_i	1	2	3	.....
p_i	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{3}$	.....

$x \sim G\left(\frac{1}{3}\right)$

$M(x) = \frac{1}{1/3} = 3$

$D(x) = \frac{q}{p^2} = \frac{2/3}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} = 6$

§4 Понятие ф-ии распред.

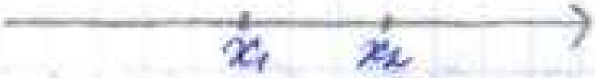
Опр. Ф-ия распред. случ. вел-ны X называется числовая ф-ия опред-ая на всей числовой прямой и равная $F_X(x) = P(X<x)$, $x \in R$

Св-ва:

1. $0 \le F(x) \le 1$
2. $F(x)$ – неубывающая ф-ия

Док. Покажем, что если $x_1 < x_2$, то $F(x_1) \le F(x_2)$

$F(x_2) = P(X<x_2) = P((X<x_1)+(x_1 \le X < x_2)) =$ несовместные события



$= P(X<x_1) + P(x_1 \le X < x_2) = F(x_1) + P(x_1 \le X < x_2) \ge 0$

$\Rightarrow F(x_2) \ge F(x_1)$

3. Вероятн. попад. случ. вел-ны в интервал

$P(\alpha \le X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$

Вывод вытекает из док-ва 2, если $x_1 = \alpha$, $x_2 = \beta$.

4. $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$

Вывод: $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} P(X<x) = P(X<\infty) = P(\Omega) = 1$

Обозначение:

$\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = F(+\infty)$

5. $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$

6. Если возможны знач. случ. вел-ны заключ. на отрезке $[a, b]$

Если $x \in [a, b]$, то при $x \le a$ $F(x) = 0$
при $x > b$ $F(x) = 1$

Вывод: $x \le a$

$F(x) = P(X < x) = P(\varnothing) = 0$

$x \ge b$

$F(x) = P(X < x) = P(\Omega) = 1$

Замечание:
В основном ф-ции распред. использ-ся для вычисл. вер-ти попадания случ. вел-ны в некоторый числовой интервал. (см. св-во 3.)

Задача:

$F(3) = 0{,}8$ Найти: (св-во 3)
$F(1) = 0{,}3$ $P(1 \le x < 3) =$

$= F(3) - F(1) = 0{,}8 - 0{,}3 = 0{,}5$

Задача:
Найти ф-цию распред., построить её график дискр-ой случ-ой вел-ны X

x_i	1	2	3
p_i	1/4	1/2	1/4

Решение:

1) $x \in (-\infty; 1]$

$F(x) = P(X < x) = 0, \quad F(1) = P(x < 1) = 0$

2) $x \in (1; 2]$

$F(x) = P(X < x) = P(x = 1) = \frac{1}{4}$

$F(x) = P(X < 2) = P(x = 1) = \frac{1}{4}$

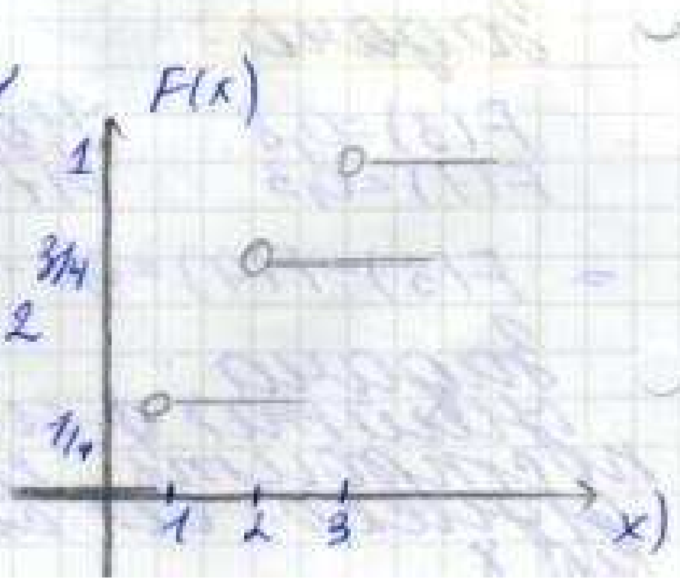
3) $x \in (2; 3]$

$F(x) = P(X < x) = P((X = 1) + (X = 2)) =$
$= P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$

4) $x > 3$

$F(x) = P(X < x) = 1$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1 \\ \frac{1}{4}, & 1 < x \le 2 \\ \frac{3}{4}, & 2 < x \le 3 \\ 1, & x \geq 3 \end{cases}$$



Вывод 1: Графиком ф-ии для дискретн. случ. вел-ны явл. ступенчатая линия; крайняя левая ступенька на уровне 0, крайняя прав. ст. на уровне 1.

Вывод 2: Ф-ия $F(x)$ явл. непрерывн. слева числовой функцией.

Непрер-ть ф-ии слева видна в выколотых (·)-ах на графике.

Вывод 3: Все доказанные св-ва ф-ии распред-ия легко видны на построенном графике.

Непрерывные случайные величины

Опр. Случ. вел-на наз. непрер., если ее ф-ия распред-я явл. непрерывной ф-ией. Все доказанные ф-ии св-ва распр. ост. в силе, появл. лишь новое св-во.

$$P(X=a)=0$$

Док-во:

$$P(X=a)=\lim_{\Delta x\to 0} P(a<x<a+\Delta x)$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}(F(a+\Delta x)-F(a))=F(a)-F(a)=0$$

1) Если x – непрерывная случайная величина, то $P(x=a)=0$, тогда $P(a<x<b)=P(a\le x\le b)=$
$=P(a\le x<b)=P(a<x\le b)$ 19.04.16

Вывод: Для непрерывной случайной величины вероятн-ть попадания в интервал не зависит от того, включены ли концы этого интервала.
Для дискретной случайной вел-ны это не так.

2) **Понятие плотности распределения вероятн-и**

Любую непрерывную случайную вел-ну можно представить как некоторый конкретный материальный одномерный стержень с массой распределенной по некоторому закону вдоль всей длины "стержня".
Действительно, проведя большую серию испытаний случайной вел-ны, мы получим большое число значений - точек на числовой прямой.

Данный набор т. можно представить как материальные т. некоторого тела - "стержня".
Набор т. - часть информации о материал. стержне.

Вероятность (попадания в интервал (α,β)) не используя понятие относит-ой частоты событий можно представить как

$$p \approx \frac{m}{n}$$

n - общее число точек;
m - число точек попавших в интервал (α,β)

Вероятн-ть можно представить как долю всей массы "стержня", сосредоточенной на уч-ке (α,β).
Отсюда мы приходим к введению понятия плотности распределения вероятн-ти.

Опр.: Функцией плотности распределения вероятн. с.в-ы называют ф-цию $f(x) = F'(x)$, если эта производная сущ-ет.

Комментарий:

$$f(x) = F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x < X < x+\Delta x)}{\Delta x}$$ св-во 3 для $F(x)$

$\Rightarrow$ при $\Delta x \approx 0$ $\dfrac{P(x < X < x+\Delta x)}{\Delta x} \approx f(x)$

Плотность вероятн-ей $f(x)$ приближенно равна доле "массы стержня" сосредоточен на уч-ке $(x, x+\Delta x)$ деленной на длину этого уч-ка.

3) Свойства $f(x)$

а) $f(x) \geq 0$, т.к. $f(x) = F'(x)$, где $F(x)$ - неубывающ. ф-ия.

б) вероятн-ть попадания в интервал

$$P(\alpha < x < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx$$

$F(x)$ = первообразная для $f(x)$ =>

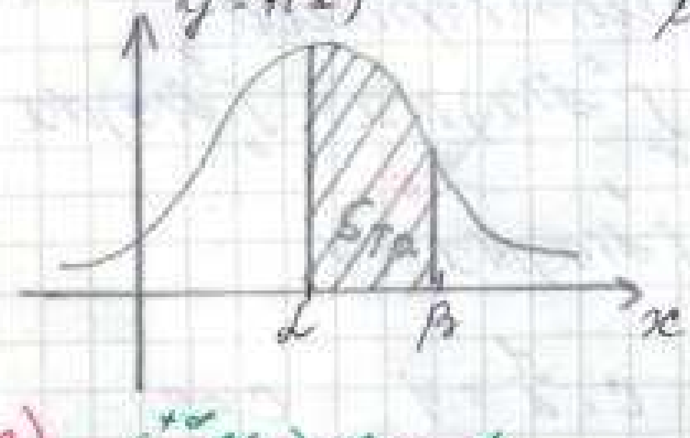
$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = F(\beta) - F(\alpha)$$ (по ф-ле Ньютона-Лейбница)

Из св-ва 3) для $F(x)$

$P(\alpha < x < \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$ => б)

Это св-во позволяет нам "читать" график ф-ии распределения.

$P(\alpha < x < \beta) = S_{тр}$.



в) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = F(+\infty) - F(-\infty) = P(-\infty < x < +\infty) = P(\Omega) = 1$$

г) Если $x \in [a, b]$, то $f(x) = 0$ при $x \notin [a, b]$

Из св-ва 5) $F(x)$ =>

$F(x) = 0$ при $x \leq a \Rightarrow f(x) = (0)' = 0$

$F(x) = 1$ при $x > b \Rightarrow f(x) = (1)' = 0$

4) Восстановление ф-ии $F(x)$ по ф-ии $f(x)$

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

Вывод: по св-ва 5) $\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=$

$=P(-\infty < X < x)=P(X<x)=F(x)$

Задача.

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ Cx, & 0<x<1\\ 0, & x>1\end{cases}$$

Найти: 1) C; 2) $F(x)$; 3) $P(X>0{,}5)$
4) $P\left(\frac{1}{4}<x<\frac{1}{2}\right)$

Решение: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$

по св-ву аддитивности определенного интеграла

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\underbrace{\int_{-\infty}^{0} f(x)dx}_{0}+\int_{0}^{1} f(x)dx+$$

$$+\underbrace{\int_{1}^{+\infty} f(x)dx}_{0}=\int_{0}^{1} f(x)dx=1$$

$$C\frac{x^2}{2}\Big|_0^1=1 \qquad C\cdot\frac{1}{2}=1 \qquad C=2$$

2. $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$

а) $x\in(-\infty;0)$

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} \underbrace{0dt}_{0}=0$$

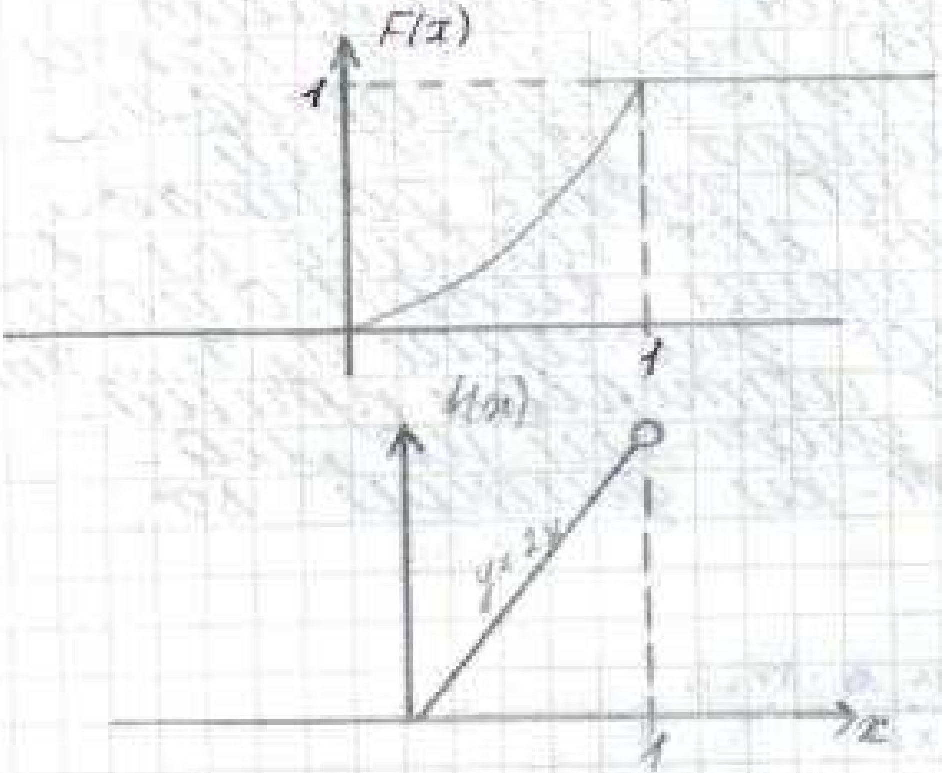
б) $x\in(0;1)$

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\underbrace{\int_{-\infty}^{0} 0dt}_{0}+\int_{0}^{x} 2tdt=t^2\Big|_0^x=x^2$$

в) $x \in (1, +\infty)$

$F(x) = \underbrace{\int_{-\infty}^{0} 0dt}_{0} + \int_0^1 2t dt + \underbrace{\int_1^x 0dt}_{0} = t^2 \Big|_0^1 = 1$

Итак, $F(x) = \begin{cases} 0, & x<0 \\ x^2, & 0<x<1 \\ 1, & x>1 \end{cases}$



3. $P(x>0{,}5) = 1 - P(x<0{,}5) = 1 - F(0{,}5) = 1 - 0{,}25 = 0{,}75$

4. $P\left(\frac{1}{4} < x < \frac{1}{2}\right) = F\left(\frac{1}{2}\right) - F\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{16} = \frac{3}{16}$

4) Математическое ожидание непрерывной случ-ой вел-ны.

Опр.: Мат. ожидание непрерывной случ. величины с плотностью распред. $f(x)$ наз-ся число $M(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx$.

Замечание:

Если непрерывн. случ. велич. $x \in [a, b]$, то

$$M(x) = \int_a^b x f(x)\,dx, \text{ т.к.}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx = \underbrace{\int_{-\infty}^{a} x \cdot 0 \cdot dx}_{0} + \int_a^b x f(x)\,dx + \underbrace{\int_{b}^{+\infty} x \cdot 0\,dx}_{0}$$

Статистич. смысл мат ожид. $M(x)$ такой же как и ранее: $M(x) \approx$ среднеарифм. наблюдаемых знач-ий.

Действ-но пусть данная непр. случ. вел. наблюд-сь в большой серии испытаний, получены значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Разобьем интервал принимаемых знач-ий на маленькие пр-ки длиной Δx.

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \approx \frac{x_1^* n_1 + x_2^* n_2 + \ldots}{n} =$$

$$= x_1^* \frac{n_1}{n} + x_2^* \frac{n_2}{n} + \ldots \approx x_1^* P(x \in I_1) +$$

$$+ x_2^* P(x \in I_2) + \ldots \approx x_1^* f(x_1^*)\Delta x + x_2^* f(x_2^*)\Delta x +$$

$$\approx \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx = M(x)$$ интегр. сумма, которая равна

5) Дисперсия непрерывной случайной вел-ны.

Опр. $D(x)$ н.п.с наз-ся число
$$D(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-M(x))^2 f(x)\,dx$$

$D(x)$ хар-ет то же самое, что и для дискретн. случ. величи. (квадр. отклонений)

Ф-ла для $D(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2 f(x)\,dx-M^2(x)$

Вывод формул.

$$D(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2 f(x)\,dx-M^2(x)=(x-M(x))^2$$
$$f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty}(x^2-2xM(x)+M^2(x))f(x)\,dx=$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2 f(x)\,dx-\int_{-\infty}^{+\infty}2xM(x)f(x)\,dx+$$
$$+\int_{-\infty}^{+\infty}M^2(x)f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2 f(x)\,dx-$$
$$-2M^2(x)+M^2(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2 f(x)\,dx-M^2(x)$$

Задача:
$$f(x)\begin{cases}0, & x<0\\ 2x, & 0<x<1\\ 0, & x>1\end{cases}$$

Найти: $M(x)$, $D(x)$

$$M(x)=\int_0^1 x\cdot 2x\,dx=\frac{2x^3}{3}\Big|_0^1=\frac{2}{3}$$
$$D(x)=\int_0^1 x^2\cdot 2x\,dx-\left(\frac{2}{3}\right)^2=2\frac{x^4}{4}\Big|_0^1-\frac{4}{9}=$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{4}{9}=\frac{1}{18}$$
$$\sigma(x)=\sqrt{\frac{1}{18}}=\sqrt{D(x)}=\frac{1}{\sqrt{18}}=\frac{1}{3\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{6}$$

Свойства для мх) дисперсии для непр. случ. велич. точно такие же, как для дискретн. случ. вел-ны.

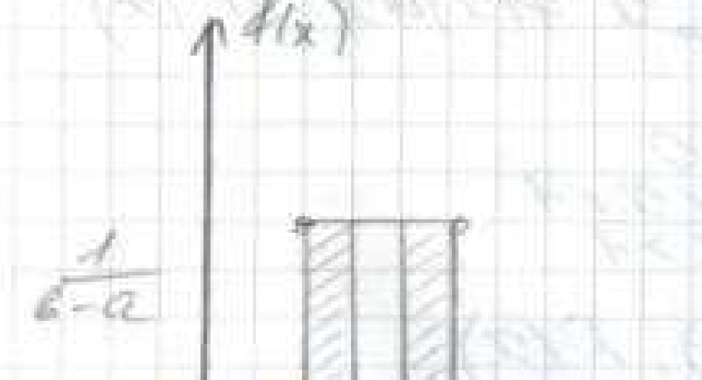
26.04.05.

1. Равномерное распределение.

Опр.: Н.с.в. наз-ся распределенной по равномерному закону на интервале (a, b), если ее плотность распределения имеет следующий вид:

$$X \sim R(a, b)$$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{1}{b-a}, & a < x < b \\ 0, & x > b \end{cases}$$



Выводы:

1. Все возможные значения случ. вел-ны лежат на интервале (a, b).
2. Вероятность попадания в интервалы равной длины, лежащие в (a, b) равна

3. $F(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \dfrac{x}{b-a} + c, & a \le x \le b \\ 1, & x > b \end{cases}$

$F(a) = 0; \quad \dfrac{a}{b-a} + c = 0 \Rightarrow c = -\dfrac{a}{b-a}$

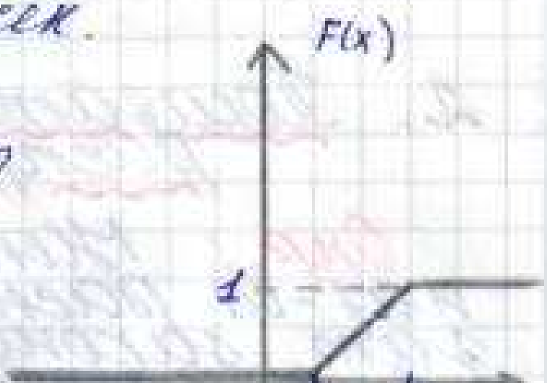
$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a \le x \le b \\ 1, & x \ge b \end{cases}$$

4. $M(x) = \dfrac{a+b}{2}$

5. $D(x) = \dfrac{(b-a)^2}{12}; \quad \sigma(x) = \dfrac{b-a}{2\sqrt{3}}$

Задача

Шкала секундомера имеет деления в 0,2 сек. Какова вероятн-ть сделать по этому секундомеру отсчет времени с ошибкой больше 0,05 сек, если отсчет делается до целого деления с округлением в ближайшую сторону.



$X = T - T_{бл.}$

T – точное время;

$T_{бл.}$ – ближайшее меньшее деление секундомера.

$x \in [0; 0{,}2]$

Предположим, что мы имеем дело с равномерно-распределен. случайной вел-ой на интервале (0; 0,2)

$X \sim R(0; 0{,}2)$

Сделать ошибку в 0,05 сек. означает попадание в заштрихован. интервал случ. величин.

$$P(0{,}05 < x < 0{,}15) = F(0{,}15) - F(0{,}05) =$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \dfrac{x-0}{0{,}2-0} & 0 < x < 0{,}2 \\ 1 & x > 0{,}2 \end{cases}$$

$$= \frac{0{,}15}{0{,}2} - \frac{0{,}05}{0{,}2} = \frac{15}{20} - \frac{5}{20} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$$

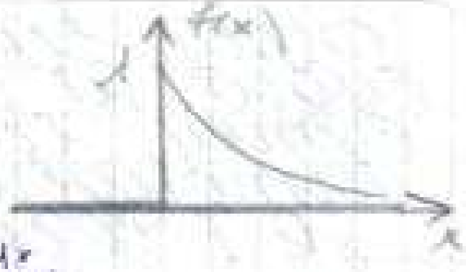
2. Показательный закон распределения.

Опр.: Непр. случ. велич. наз-ся распредел. по показат. закону с параметром $\lambda > 0$, если ее плотность распределения имеет следующий вид:

$$f(x) = \begin{cases} 0; & x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}; & x > 0 \end{cases}$$

Обозначение $X \sim P(\lambda)$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ -e^{-\lambda x} + c; & x \ge 0 \end{cases}$$



$$\lambda e^{-\lambda x} = \int e^{-\lambda x} d\lambda x = -\int e^{-\lambda x} d(-\lambda x) = -e^{-\lambda x} + C$$

$$F(0) = 0; \quad -e^{0} + C = 0 \Rightarrow C = 1$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & x \ge 0 \end{cases}$$

2. $M(x) = \dfrac{1}{\lambda}$

Вывод: $M(x) = \int_0^{+\infty} x \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx = \int_0^{+\infty} x\, d(-e^{-\lambda x})$

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du$$

$$= x(-e^{-\lambda x})\Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} -e^{-\lambda x} dx =$$

$$\lim x(-e^{-\lambda x}) = \lim_{x \to +\infty} \frac{-x}{e^{\lambda x}} \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{-1}{\lambda e^{\lambda x}} = 0.$$

$$= -\frac{1}{\lambda} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} d(-\lambda x) = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty} =$$

$$= 0 + \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}$$

3) $D(x) = \dfrac{1}{\lambda^2}; \quad \sigma(x) = \dfrac{1}{\lambda}$

Задача

Вероятность обнаружения затонувшего судна за время поиска t задается фор-ой.

$P(t) = 1 - e^{-\gamma t} \quad (\gamma > 0)$.

Опред. вероятн-ть того, что судно не будет найдено за сутки, если около 40% всех затонувших судов находят за 8 часов

T - время поиска судна

$P(T<t)=F(t)=1-e^{-\gamma t} \Rightarrow T\sim P(\gamma)$

$F(8)=0{,}4$

$1-e^{-8\gamma}=0{,}4$

$0{,}6=e^{-8\gamma}$

$-8\gamma=\ln 0{,}6$

$\gamma=\frac{\ln 0{,}6}{-8}=0{,}06$

$$F(t)=\begin{cases}0, & t\le 0\\ 1-e^{-0{,}06t} & t>0\end{cases}$$

$P(T>24)=1-F(24)=1-(1-e^{-0{,}06\cdot 24})=$

$=-e^{-1{,}44}=0{,}237 \Rightarrow 23{,}7\%$

3. Нормальный закон распределения.

Опр.: Непр. случ. вел-на наз-ся распределенной по нормальному закону с параметрами $a\in R$, $\sigma>0$, если плотность распределения имеет вид:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

Замечание: при $a=0$, $\sigma=1$ нормальный закон наз-ся центрированным.

Обознач. $X\sim N(a;\sigma)$

Построим график плот-ти:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

1. $D(f)=R$

2. $f(x)$ – четная

3. $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}(-x)$

$x=0$ – т. max.

$y_{max}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$

4. $f''(x)=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot$

$\cdot\left(1\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}+xe^{-\frac{x^2}{2}}(-x)\right)=\frac{-e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}(1-x^2)=$

$=-\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}(1-x)(1+x)$

5. Асимптота

$f(x)>0$

6. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=0 \Rightarrow y=0$ – горизонтальн. асимптота.

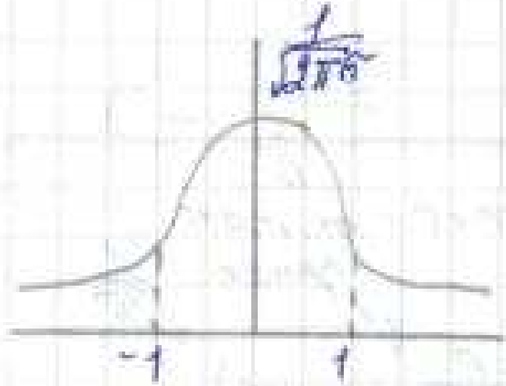
$y=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

Эта кривая называется кривой Гаусса.

Построим график $y=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma}}$

$y=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{x^2}{2}}$ Если $\sigma>1$, то сжатие к оси Ox.

Если $\sigma<1$, то растяжение от оси Ox.



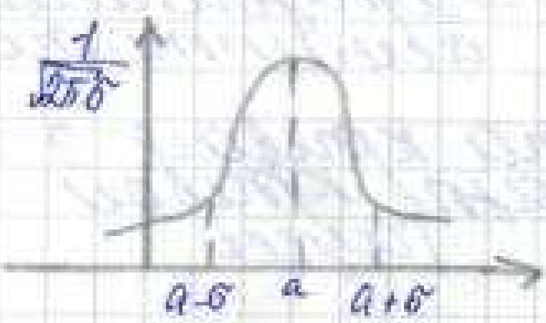
$$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{\left(-\frac{x}{\sigma}\right)^2 / 2}, \text{ т. е.}$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

Если $\sigma > 1$, то идет растяжение от оси OY.

Если $\sigma < 1$, то сжатие к оси OY.

$$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$



если $a > 0$ то сдвиг вправо на „a" ед. если $a < 0$ то сдвиг влево на „$(-a)$" ед.

4. Функция распределения нормального закона.

$$F(x) = 0{,}5 + \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right), \text{ где}$$

$$\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^y e^{-\frac{t^2}{2}}$$

dt — интегральная ф-ия Лапласа (затабулир)

Для этой функции создана таблица значений $0<y<5$

Эта функция обладает следующими свойствами:

1. $\Phi(-y) = -\Phi(y)$, т.е. $\Phi(-1{,}25) = -\Phi(1{,}25)$

2. $\Phi(0)=0$

3. $\Phi(y>5)\approx 0{,}5$

Формула для вычисления вероятностей.

1. $P(\alpha<x<\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right)$

2. $P(x<\beta)=F(\beta)=0{,}5+\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)$

3. $P(x>\alpha)=1-F(\alpha)=0{,}5-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right)$

4. Вероятность того, что нормальн. случайная величина отклонится от среднего значения a по абсолютной величине, не более чем на δ.

$$P(|x-a|<\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$$

Св-во нормальной распр. случ. величи.

$(X\sim\cancel{M})$ $X\sim N(a,\sigma)$

1) $M(x)=a$
2) $D(x)=\sigma^2$
3) $\sigma(x)=\sigma$

03.05.06

1. $M(x) = a$, если $X \sim N(a, \sigma)$

$$M(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} (x-a+a)\, e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} (x-a)\, e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx}_{=0} +$$

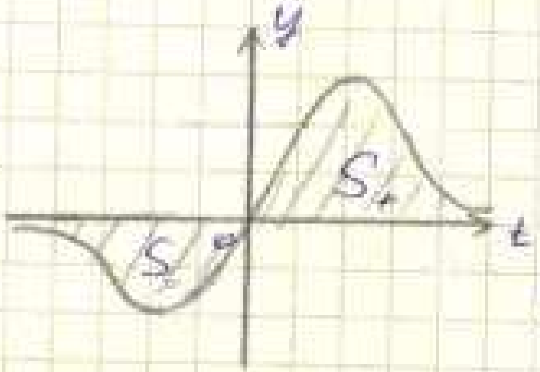
$$+ \frac{a}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx}_{=1}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (x-a)\, e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} t\, e^{-\frac{t^2}{2}} dt =$$

$x - a = t$

$dx = d(t+a) = dt$

$y = t\, e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ — нечетная функция



$S_+ = S_-$

$$= \int_{-\infty}^{0} t e^{-\frac{t^2}{2}} dt + \int_{0}^{+\infty} t e^{-\frac{t^2}{2}} dt = -S_- + S_+ = 0$$

Задача №9.1

20% яблок в некой партии имеют вес больше чем 300г и 10% имеют вес меньше чем 100г. Найти средний вес яблок и среднее отклонение веса яблок, вес яблок распределен по нормальному закону считая

$w \sim N(a,\sigma)$ - вес яблока

$$\begin{cases} P(w>300)=0{,}2 \\ P(w<100)=0{,}1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0{,}5-\Phi\left(\frac{300-a}{\sigma}\right)=0{,}2 \\ 0{,}5+\Phi\left(\frac{100-a}{\sigma}\right)=0{,}1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Phi\left(\frac{300-a}{\sigma}\right)=0{,}3 \\ -\Phi\left(\frac{100-a}{\sigma}\right)=0{,}4 \end{cases} \qquad \Phi\left(\frac{a-100}{\sigma}\right)=0{,}4$$

$$\begin{cases} \frac{300-a}{\sigma}=0{,}84 \\ \frac{100-a}{\sigma}=1{,}28 \end{cases} \qquad \begin{cases} 300-a=0{,}84\sigma \\ a-100=1{,}28\sigma \end{cases} +$$

$$200=2{,}12\sigma$$

$$\sigma=\frac{200}{2{,}12}=94{,}34$$

$$a=300-0{,}84\sigma=$$
$$=300-0{,}84\cdot 94{,}34=220{,}75$$

Ответ: $a=221$
$\sigma=94$

2. Св-ва нормальной случайной величины.

а) Правило 3-х сигм $X \sim N(a,\sigma)$

$$P(a-3\sigma<X<a+3\sigma)\approx 1$$

Комментарий:
Практич. все значения норм. случ. величины сосредоточены в интервале $(a-3\sigma, a+3\sigma)$

Вывод:

$P(a-3\sigma < x < a+3\sigma) = P(-3\sigma < X-a < 3\sigma)$
$= P(|X-a| < 3\sigma) = 2\Phi(3\sigma/\sigma) = 2\Phi(3) =$
$= 2\cdot 0{,}49865 = 0{,}99730 \approx 99{,}7\%$

б) Если $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$, то
$\alpha X + \beta \sim N(\alpha a + \beta, \alpha\sigma)$

в) Если $Y \sim N(\beta, \gamma)$, то
$X \pm Y \sim N(a \pm \beta, \sqrt{\sigma^2+\gamma^2})$

Задача №2

Пусть вес яблок нормальная случ. вел-на, возможные знач. кот. сосредоточены в интервале от 100 до 200 гр. Найти % яблок с весом больше 180 гр.

$X \sim N(a, \sigma)$
$x \in (100, 200) \Rightarrow$
по правилу 3 сигм

$\begin{cases} a-3\sigma = 100 \\ a+3\sigma = 200 \end{cases} + \quad 2a = 300, \quad a = 150$

$6\sigma = 100$
$\sigma = \frac{100}{6} = \frac{50}{3} = 16{,}7$

$X \sim N(150, 16{,}7)$

$P(X > 180) = 0{,}5 - \Phi\left(\frac{180-150}{16{,}7}\right) =$

$= 0{,}5 - \Phi\left(\frac{30}{16{,}7}\right) = 0{,}5 - \Phi(1{,}80) =$
$= 0{,}5 - 0{,}4641 = 0{,}0359$

Ответ: 3,6%.

Закон больших чисел

Под з-ом больших чисел понимают ряд утвержд. касающихся поведения большого кол-ва случ-ых величин

I. Предельная теорема Ляпунова

Пусть $x_1, x_2, \dots, x_n$ большое кол-во одинаково распределенных случ-ых величин $(n>10)$

$M(x_i)=a \quad D(x_i)=\sigma^2$

тогда $X = x_1+x_2+\dots+x_n$ (почти по норм-ому закону) $N(n\cdot a, \sqrt{n}\cdot\sigma)$

Задача

На тестировании 1-ин студент на решение 1-ой задачи тратит 8 мин. со средним отклон. в 2 мин. Найти вероятн. того, что среди 20 зад. он потратит не более 3 часов.

T_i – время решения i-ой задачи $i=1,2,\dots,20$

$T = T_1+T_2+\dots+T_{20}$

$M(T_i)=8 \quad \sigma(T_i)=2$

$T \overset{\text{почти}}{\sim} N(20\cdot 8, \sqrt{20}\cdot 2)$

$T \sim N(160;\ 8{,}9)$

$P(T<180) = 0{,}5+\Phi\left(\frac{180-160}{8{,}9}\right) = 0{,}5+\Phi(2{,}24) =$
$= 0{,}5+0{,}4881 = 0{,}9881$

98,8%

II. Следствие из предельной теоремы Ляпунова

Пусть **m** - это число успехов в схеме независимых испытаний с параметрами **n** - число испытаний, **p** - вероятность успеха в 1-ом испытании

$(n \to \infty,\ n > 10)$

Тогда $m \sim N(np, \sqrt{npq})$

Вывод:

x_i - число успехов в i-ом испытании

тогда $m = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$

x_i:

x_i	0	1
p_i	q	p

$M(x_i) = p$

$D(x_i) = p - p^2 = pq$

по теореме Ляпунова

$m \overset{\text{почти}}{\sim} N(np, \sqrt{n}\sqrt{pq})$

$m \sim N(np, \sqrt{npq})$

Задача

Вероятность решения каждой задачи из 20 предложенных = 0,7. Найти в-ть абитуриентов решающих более 18 задач, используя схему независимых испытаний с параметрами

$n = 20$ - число реш. задач

$p = 0{,}7$ (число успехов)

по следствию (число)

$m \overset{\text{почти}}{\sim} N(20 \cdot 0{,}7;\ \sqrt{20 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3})$

$m \sim N(14;\ 2{,}05)$

$P(m>18) = 0{,}5 - \Phi\left(\frac{18-14}{2{,}1}\right) =$
$= 0{,}5 - \Phi(1{,}90) = 0{,}5 - 0{,}4713 = 0{,}0287$
$\Rightarrow$ 2,9%

III. Неравенство Чебышева

Пусть $M(x)=a$, $D(x)=\sigma^2$ (з-ны x неизвестны), тогда

$$P(|x-a|<\varepsilon) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

Следствие: $P(|x-a| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$

Вывод следствия:

$$1 - P(|x-a| \geq \varepsilon) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

$$P(|x-a| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

Комментарий. Этим неравенством целесообразно польз-ся если $\sigma<\varepsilon$

Задача

Средняя t-ра воздуха в отопит. период $= 20°C$, а среднее отклонение $= 2°C$. С помощью н-ва Чебышева оценить снизу вероятность того, что t-ра отклонится от средней по абсолют. вел-не менее чем на 4°

$$P(|T-a|<4) \geq 1 - \frac{2^2}{4^2} = 1 - \frac{4}{16} = \frac{3}{4} = 0{,}75$$

в 70% случаях, t в отопит

будет лежать в пред. от 16,90 (20) 24° (не меньше чем в 75% случаях)

Задача

При помощи нерав-ва Чебышева найти диапазон изменения t-ры $(20-t;\ 20+t)$ в котором t-ра в будущих. будет более чем в 90%-ах случаев

$$0{,}9 = 1 - \frac{2^2}{\varepsilon^2} \qquad \frac{4}{\varepsilon^2} = 0{,}1 \qquad \varepsilon^2 = 40$$

$$\varepsilon = \sqrt{40} = 6{,}3 \Rightarrow t = 6{,}3$$

Действительно, по неравенству Чебышева

$$P(|T-20| < 6{,}3) \geq 1 - \frac{2^2}{6{,}3^2} = 0{,}9$$

более чем 90% случаев t-ра в действительности отклон. от среднего значения не более чем на 6,3°, т. е. будет лежать в пред-ах

$$(20-6{,}3;\ 20+6{,}3) = (13{,}7;\ 26{,}3)$$