10.05.06.

# Введение математической статистики

## §1 Статистический ряд и его разновидности

21, 26, 22, 24, 21, 22, 24, 28, 23, 25
20, 27, 23, 23, 24, 25, 26, 22, 24, 24
28, 29, 19, 31, 22, 24, 26, 22, 23, 29

- экспериментальные данные наблюд. за некот.-ой случ. вел-ну (интервальный)

$x_{min} = 19$ $\quad d = x_{max} - x_{min} =$
$x_{max} = 31$ $\quad = 31 - 19 = 12$

**Замечание:**

при сборе информации нужно собрать её так, чтобы выборка была репрезентативной, т.е. чтобы эта выборка правильно отражала всю генеральную исследуемую совокупность.

## Примеры генеральных совокупностей:

1. Генер. совок. при исслед. времени опозд. студ-ов на лекцию по матем.: это все времена опозданий студентов на данную лекцию. ($N \approx 500$)
2. -"-"-"- при исслед. веса собак опред-ой породы (набор всех весов всех собак данной породы в мире.)

## Примеры репрезентативных выборок:

1. При исслед-ии времени опоздания нужно брать эксперимент-ые данные равномерно по всем дням недели, по всем парам, и т.д.

**Замечание:**

Очень часто необх-о восстанов. по статистич-му ряду интервальный статистический ряд.

## Примеры восстановления

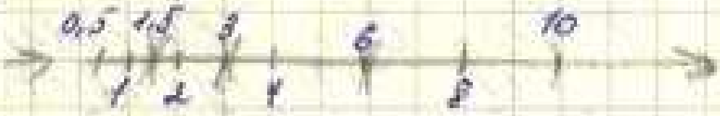
1.

| $x_i^*$ | 1 | 4 | 7 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 2 | 5 | 6 | 8 |


| $x_i \div x_{i+1}$ | $0,5 \div 2,5$ | $2,5 \div 5,5$ | $5,5 \div 8,5$ | $8,5 \div 11,5$ |
|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 2 | 5 | 6 | 8 |

2. Одинаково отстоящих вариант

| $x_i^*$ | 1 | 2 | 4 | 8 |
|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 5 | 6 | 3 | 7 |




| $x_i \div x_{i+1}$ | $0,5 \div 1,5$ | $1,5 \div 3$ | $3 \div 6$ | $6 \div 10$ |
|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 5 | 6 | 3 | 7 |

## Задания для РГР.

1. Изобразить статистич. ряд
2. Найти объем выборки
3. Восстанов. гистогр. статистич.-ий ряд

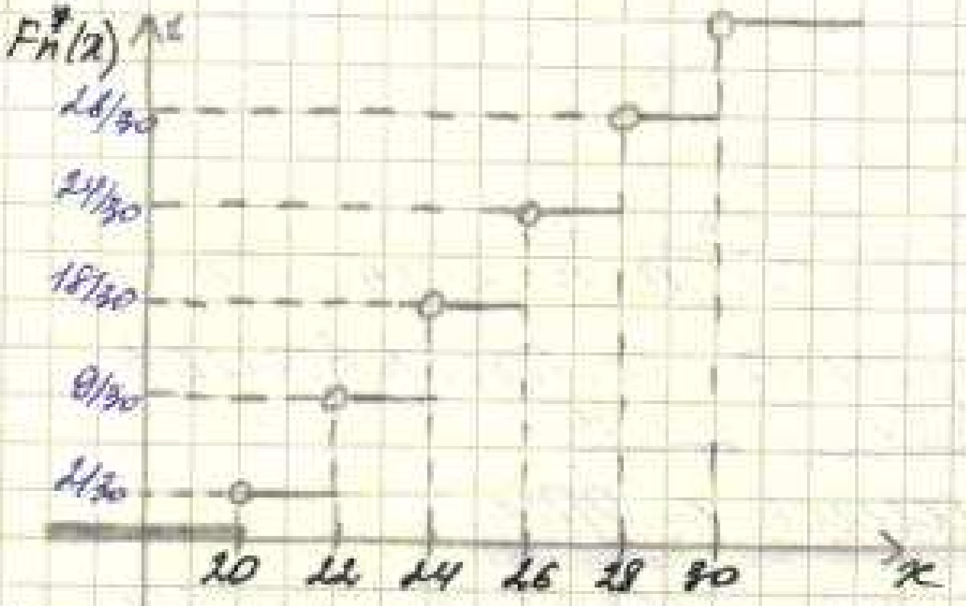
## §2 Эмпирическая функция распределения

$F_n^*(x) = \frac{n_x}{n}$ – числовая ф-ия, опреде-ленная на всей числовой прямой R, где n – объем выбор-ки, $n_x$ – число вариант меньших x.

Пример: $n_x$:

| $x$ | 18 | 20 | 21 | 23 |
|---|---|---|---|---|
| $n_x$ | 0 | 0 | 2 | 9 |

$$F_n^*(x) = \begin{cases} 0, & x \le 20 \\ 2/30, & 20 < x \le 22 \\ 9/30, & 22 < x \le 24 \\ 18/30, & 24 < x \le 26 \\ 24/30, & 26 < x \le 28 \\ 28/30, & 28 < x \le 30 \\ 1, & x > 30 \end{cases}$$



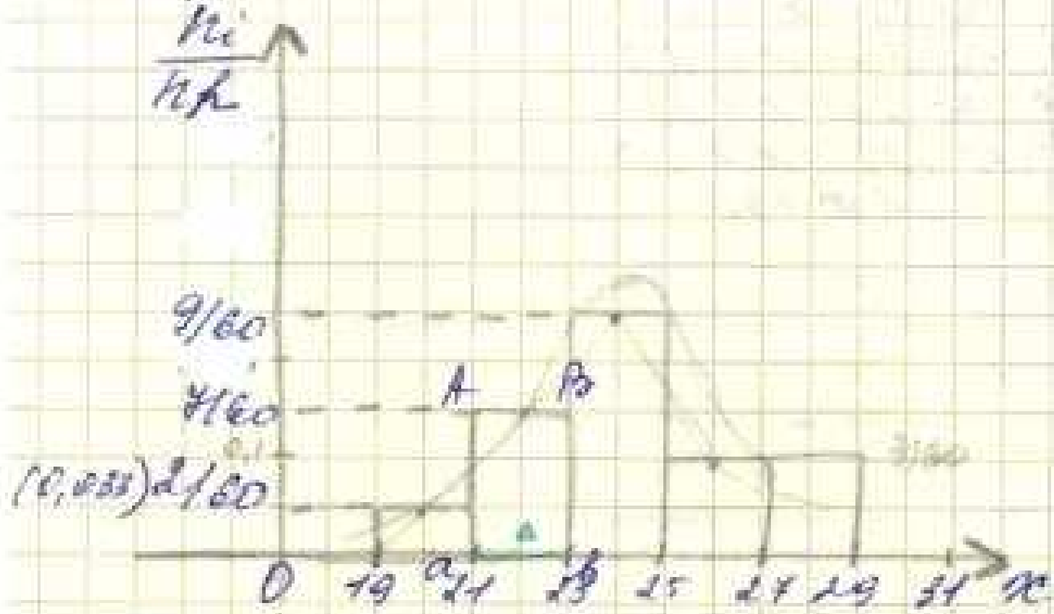

Задание для РГР.

1. Написать общую ф-лу и написать ф-лу для нашего случая
2. Постр. график эмпирич. ф-ии распред.

## §3 Гистограмма относительных частот

Гист отн час будет явл-ся эмпирич аналогом графика ф-ии плот нати распред-ие веро-ятн-ей наблюдаемой случайной вел-ны.

а) Построение гистограммы




h - длина интервалов.

h=2; n=30;

Задание к р/р.

1. Постр. гистограмму д/относит. частот.

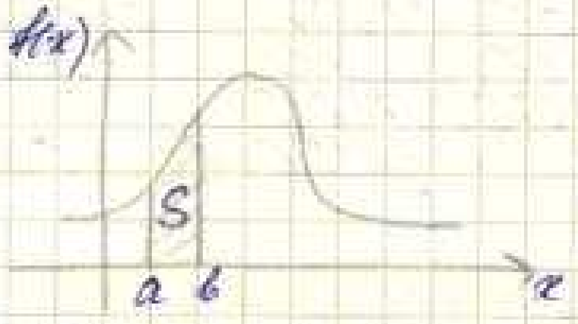
14.05.06.

§1

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i^*$ | 20 | 22 | 24 | 26 | 28 | 30 |
| $n_i$ | 2 | 7 | 9 | 6 | 3 | 3 |

Основание того, что гистогр. представл. собой эмпирич. аналог графика ф-ии плотности распред. вероятности.

Напоминание:




$S = p(a < x < b)$

Рассм. интервал $\Delta$

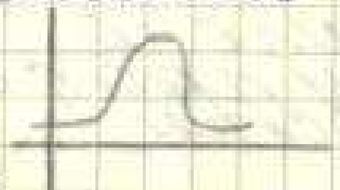
$S_{прям} = \Delta \frac{n_i}{\Delta n} = \frac{n_i}{n} = W_i$ $\Delta = h$

относит-ая частота события попадания исслед. случ-ой вел-ны $x$ в интервал $\Delta$

$W_i = P(X \in \Delta)$

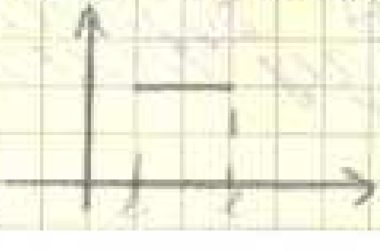
Основные типы гистограмм:

а) гистограмма нормального типа



б) гистограмма показательного типа

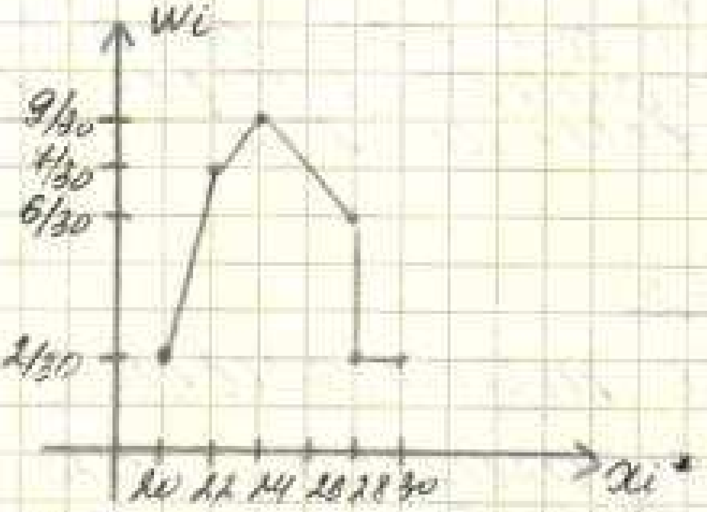
в) гистограмма равномерного типа



Внешний вид многоугольника позволяет выдвинуть гипотезу о виде закона распред-ия наблюд-ой случайной вел-ны.

## §2 Полигон относительных частот

Ломаная линия с вершинами $(x_i^*, w_i)$




Внешний вид полигона отражает форму графика ф-ии плотности распред.

## Точечные оценки числовых хар-ик наблюд. случайной величины.

$M(x)$ - математич. ожид.
$D(x)$ - дисперсия
$\sigma(x)$ - средн. квадр. отклон.

Под символом $\theta$ будем понимать одну из этих характеристик.

**Точечной оценкой параметра θ** наз. **случ. вел-на** $\theta^*(x_1, x_2, \dots, x_n)$, зависящая от рез-ов наблюдений $x_1, x_2, \dots, x_n$, вероятные значения которой ≈ параметру θ.

**Пример точечн. оценки параметра** $\theta = M(x)$

Такая случ. вел-на наз. выборочной средней

$$\bar{x}_в = \frac{x_1 + x_2 + \dots x_n}{n}$$

**Замечание**

Сами точечн. оценки будут обычн. различными, т.к. они явл. случай. вел-ми, их возможн. знач. будут обычн. различными.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i^*$ | 20 | 22 | 24 | 26 | 28 | 30 |
| $n_i$ | 2 | 7 | 9 | 6 | 3 | 3 |

$$\bar{x}_в = \frac{x_1^* \cdot n_1 + x_2^* \cdot n_2 + x_3^* \cdot n_3 + \dots}{n} =$$

$$= \frac{20 \cdot 2 + 22 \cdot 7 + 24 \cdot 9 + 26 \cdot 6 + 28 \cdot 3 + 30 \cdot 3}{30} =$$

$$= \frac{40 + 154 + 216 + 156 + 84 + 90}{30} =$$

$$= \frac{740}{30} = \frac{74}{3} = 24{,}7$$

## 3. Св-ва точечных оценок

а) несмещенность оценки

Точечн. оц. $\theta^*$ наз. несмещенной если её $M(\theta^*) = \theta$ оцениваем. параметру $\theta$.

Пример.

$\bar{X}_в$ - несмещенная оценка для мат-го ожид. $M(x)$.

Док-во:

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ - одинаково распред-ые случ-ые вел-ны отлич-ся только временем появления.

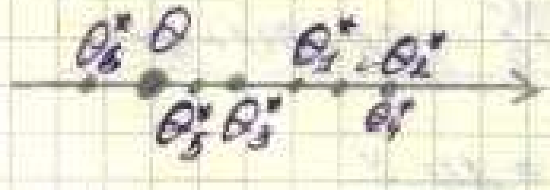
$$M(x_i) = M(x)$$

$$M(\bar{x}_в) = M\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right) =$$

$$= \frac{1}{n}\left(M(x_1) + M(x_2) + \ldots\right) = \frac{1}{n} \cdot n \cdot M(x) = M(x)$$

Геометрическая иллюстрация св-ва несмещенности


несмещенная оценка




смещенная оценка $M(\theta^*) \neq \theta$

б) эффективность оценки

Опр: Оценка $\theta^*$ наз. **эффективной** в некоторой классе оценок, если дисперсия $D(\theta^*)$ наименьшая среди дисперсий заданного класса оценки. Мы эффективной среди всех точечных оценок мат. ожид. без док-ва.

более эффективная оценка по сравнению с нижней

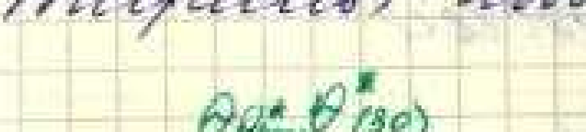
в) состоятельность оц.

Опр: Оц. $\theta^*$ наз. **состоятельной**, если

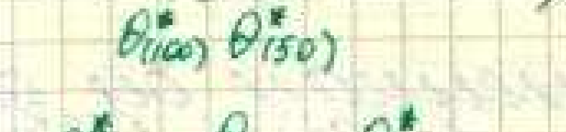
$$\lim_{n\to\infty} P(|\theta_n^* - \theta| < \varepsilon) = 1$$

Пример:

№1 - состоят-ая оц. (следствие из теоремы Чебышева)



состоятельная оценка.



несостоятельная оценка

5. Точечные оценки для $D(x)$, $\sigma(x)$.

а) Выборочная дисперсия

$$D_в = \frac{(x_1-\bar{x}_в)^2+(x_2-\bar{x}_в)^2+\dots}{n}$$

Ф-ла двочисл-ия выборочной дисперсии

$$D_в = \frac{(x_1^*-\bar{x}_в)^2\cdot n_1+(x_2^*-\bar{x}_в)^2\cdot n_2+\dots}{n}$$

альтернативная ф-ла для $D_в$

$$D_в = \frac{(x_1^*)^2\cdot n_1+x_2^{*2}\cdot n_2+\dots}{n}-(\bar{x}_в)^2$$

Для нашего примера

$$D_в = \frac{20^2\cdot 2+22^2\cdot 7+24^2\cdot 9+26^2\cdot 6+28^2\cdot 3+30^2\cdot 3}{30}$$
$$-24,7^2 = 5,01$$

Т.к. $M$и. $D_в$ явл. смещенной оценкой. $M(D_в) = \frac{n-1}{n}\cdot D(x)$ ($\neq$ $D(x)$)

б) Исправленная выборочная дисперсия

$$S^2 = \frac{n}{n-1}\cdot D_в$$

$S^2$ - несмещенная оц. дей-ствит-но, $M(S^2) = M(\frac{n}{n-1}\cdot D_в)$
$= \frac{n}{n-1}\,M(D_в) = \frac{n}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n}\,D(x) = D(x)$

Способы вычисления $S^2$.

1. Можно выч-ить в начале Дв, а затем $S^2 = \frac{n}{n-1} \cdot Дв$.

2. $\frac{(x_1^* - \bar{x}_в^2)^2 n_1 + (x_2^* - \bar{x}_в^2)^2 n_2 + \ldots}{n-1}$

б) Выборочное среднее квадратическое отклонение

$\sigma_в = \sqrt{Дв}$

2) Исправленное выборочное среднее квадр-ое отклонение.

$S = \sqrt{S^2}$

6. Дополнит-ые способы вычисления точечных оценок для параметров.

а) Если из наблюд. знач. вычесть одно и то же число, то мат. ож уменьшится на это число, а дисперсия не изменится. Все это следует из св-тв $M(x)$ и $D(x)$:

$M(x+c) = M(x) + c$
$D(x+c) = D(x)$

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i^*$ | 20 | 22 | 24 | 26 | 28 | 30 |
| $n_i$ | 2 | 7 | 9 | 6 | 3 | 3 |

$x_i^* - 24$

| $x_i^*$ | -4 | -2 | 0 | 2 | 4 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 2 | 7 | 9 | 6 | 3 | 3 |

б) Если уменьш. варианты знач. на одно и то же число, то мх) умен. на то же самое число, а Dx) уменьш. на квадрат этого числа

| $x_i^*$ | -4 | -2 | 0 | 2 | 4 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 2 | 7 | 9 | 6 | 3 | 3 |

$\xrightarrow{x_i^*/2}$

| $x_i^*$ | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 2 | 7 | 9 | 6 | 3 | 3 |

Д/з.

1) состав. полигон относит. частот.
2) Вычисл. точечн. оц. $\bar{X}_в$
3) Выч. знач. точечн. оц. Дисп. $D_в$
4) Выч. точ. оц. $S^2$
5) $\sigma_в$
6) $S$

## I. Понятие доверительного интервала, доверит-ой вер-ти

Точечная оценка дает лишь приближенное значение оцениваемого параметра, при этом мы не знаем степень точности этой оценки, поэтому вводят понятие доверит-ого интервала.

**Опр.**: Интервал $(\theta_1^*, \theta_2^*)$, где

$$\theta_1^* = \theta_1^*(x_1, x_2, \dots, x_n)$$
$$\theta_2^* = \theta_2^*(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

наз-ся доверительным интервалом (интервальной оценкой) для оцениваемого парам-ра $\theta$ с доверит. вероятн-тью (с уровнем надежности)

$\gamma$ ($\gamma = 0{,}9;\ 0{,}95;\ 0{,}99;\ 0{,}999$), если $P(\theta_1^* < \theta < \theta_2^*) = \gamma$

### Комментарий:

Пусть в рез-те наблюдений будет найден доверит-ый интервал для матем. ожид-ия $(2{,}1;\ 4{,}2)$ с $\gamma = 0{,}95$. К этому интервалу надо отн-ся следующим образом: доверять этому инт-ву нужно на 95%.

Допустим проведены сто серий наблюдений (экспериментов), каждая серия состоит из большого кол-ва наблюдений и в 5 случаях из 100 $M(x)$ проскочит мимо наименьшего доверит-ого интервала

II Пример вычисления доверит-ого интервала для $M(x)$, где $x \sim N(a, \sigma)$ причем $\sigma$ - известный параметр.

Найдем значение $\delta > 0$:

$$P\left(\left|\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n} - a\right| < \delta\right) = \gamma$$

Утв

случайная вел-на

$$\bar{X} = \frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n} \sim N\left(a, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Док-во:

1) Наблюд-ые случ-ые велич.

$X \sim N(a, \sigma) \Rightarrow X_i \sim N(a, \sigma) =$ по св-ву норм. случ. велич.

$= x_1+x_2+\ldots+x_n \sim N(na, \sqrt{n}\,\sigma)$; - по св-ву норм. случ. величин

$$\Rightarrow \bar{X} = \frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n} \sim N\left(a, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Найдем $\delta$.

напомним ф-лу: если $X \sim N(a, \sigma)$, то

$P(|\bar{x}-a|<\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$

Получим $P(|\bar{x}-a|<\delta)=$
$=2\Phi\left(\frac{\delta}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)=\gamma$ $\qquad \gamma-1$

$$\Phi\left(\frac{\sqrt{n}\cdot\delta}{\sigma}\right)=\frac{\gamma}{2}$$

По табл. знач. $\Phi(x)$ находим

$$\frac{\sqrt{n}\cdot\delta}{\sigma}=t_{\gamma/2};\quad \delta=\frac{t_{\gamma/2}\cdot\sigma}{\sqrt{n}}$$

Итак: $P\left(|\bar{x}-a|<\frac{t_{\gamma/2}\sigma}{\sqrt{n}}\right)=\gamma$

$$P\left(-\frac{t_{\gamma/2}\sigma}{\sqrt{n}}<\bar{x}-a<\frac{t_{\gamma/2}\sigma}{\sqrt{n}}\right)=\gamma$$

$$P\Big(\underbrace{\bar{x}-\frac{t_{\gamma/2}\sigma}{\sqrt{n}}}_{\theta_1^*}<a<\underbrace{\bar{x}+\frac{t_{\gamma/2}\sigma}{\sqrt{n}}}_{\theta_2^*}\Big)=\gamma$$

Доверительным интервалом для $M(X)$ наблюд. нормальн. случ. величины с уровнем надежности $\gamma$ явл. следующий интервал.

$$\left(\bar{x}-\frac{t_{\gamma/2}\sigma}{\sqrt{n}};\ \bar{x}+\frac{t_{\gamma/2}\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

**III.** Доверит-ые интервалы для $M(x)$, $D(x)$, наблюдаемое норм-ой случ-ой вел-ой (без вывода).

а) Для $M(x)$

$$\bar{x}_в-\frac{t_{\gamma,n}\cdot S}{\sqrt{n}}<M(x)<\bar{x}_в+\frac{t_{\gamma,n}\cdot S}{\sqrt{n}}$$

$\bar{x}_в$ - выборочное среднее
$S$ - исправленное выборочное среднее квадратич-е отклонение
$n$ - объем выборки.
$t_{\gamma,n}$ - табличное значение зависимое от $\gamma$ - уровня надежн-и
$n$ - объема выборки
прил-ие №3.

Наш пример $\bar{x}_в = 24,7$

$D_в = 5,91$; $S^2 = \frac{30}{29} \cdot 5,91 = 6,11 = 2,47$

$S = \sqrt{S^2} = 2,47$; $n = 30$; $\sqrt{n} = 5,48$

$t_{\gamma,n} = t_{0,95;30} = 2,045$

$\frac{t_{\gamma,n} \cdot S}{\sqrt{n}} = \frac{2,045 \cdot 2,47}{5,48} = 0,92$

$24,7 - 0,92 < M(x) < 24,7 + 0,92$

$23,78 < M(x) < 25,62$

б) для дисперсии

$(S - q_{\gamma,n} \cdot S)^2 < D(x) < (S + q_{\gamma,n} \cdot S) =$

$S = 2,47$

$q_{\gamma,n} =$ (прил. IV) $= 0,28$

$q_{\gamma,n} \cdot S = 0,28 \cdot 2,47 = 0,69 =$

$(2,47 - 0,69)^2 < D(x) < (2,47 + 0,69)^2$

$3,17 < D(x) < 9,99$

Д/З 1) Нужно доверит. интерв. для $M(x)$.
2) $D(x)$ оформить на отдельн. странице поместить в конец.

## IV. Проверка статистич-х гипотез. Виды гипотез.

Статистич. гипотеза наз-ся гипотеза по поводу закона распред-ия наблюд. случ. вел-ны, либо ее параметр.

Пример: 1) X - распределена по норм-ому закону
2) $M(X) > 5$

Гипотезы бывают простыми и сложными. Сложная гипотеза состоит из неск. гипотез.
2-ой прив. пример - сложн. гипотеза

Примеры простых гипотез

1) $X \sim N(0,1)$
2) $M(X) = 6$.

Гипотезы бывают основными и альтернативными

Обозначения

$H_0$ - основная гипотеза
$H_1$ - альтернативн. гипотеза
$H_0, H_1$ - противоположн. друг другу события

## V. Ошибки 1 и 2 родов при принятии гипотез

Опр.: Ошибкой 1-ого рода наз-ся ошибка, при которой отверг-ся верная гипотеза.

Ошибкой 2 рода наз-ся ошибка при которой прин-ся неверная гипотеза.

Вероятность ошибки 1-го типа наз-ся уровень значимости критерия и обозн-ся через $\alpha$.

$\alpha = 0{,}1;\ \underline{0{,}05};\ 0{,}01;\ 0{,}001$

Нельзя увлек-ся уменьшением уровня значимости критерия.

Уменьшая вероятн. ошибки 1-го рода мы начинаем принимать больше гипотез в том числе и неверных, это значит увелич-ся вероятн-ть ошибки второго рода (невер. гипотез).

## 2. Понятие критерия

Опр.: К критерием при проверке гипот. будем называть случайн. вел-ну $K \le (x_1, x_2, \dots, x_n)$ зависящ. от по значению которой мы будем либо принимать гипотезу либо ее отвергать.

Опр.: Критич. обл-тью критерия будем наз-ть некотор. числовой интервал при попадании в который критерия гипотеза будет отверг-ся.

Критич-ие обл-и бывают правосторон. $(K_р; +\infty)$

2. левосторонний $(-\infty; k_{кр})$.


3. двусторонний $(-\infty; k_{кр}) \cup (k^2_{кр}; +\infty)$


Граничн. точки критич. обл-ей наз-ся критич-ми точками. Областью принятия гипот-зы наз-ся числовой интервал при попадании критерия в который гипотеза принимается.

3. $\chi^2$- критерий Пирсона для проверки гипотезы о законе распределения наблюдаемой случ. величины.

Опр: Случайная вел-на $\chi^2_{набл.} = \sum_{i=1}^{m} \frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'}$

где $m$ - число интервалов знач-ий наблюдаемой случ-ой вел-ны.

| $x_i \div x_{i+1}$ | $19 \div 21$ | $21 \div 23$ | $23 \div 25$ | $25 \div 27$ | $27 \div 29$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 2 | 7 | 9 | 6 | 3 |

для которых частота $n_i > 5$

$n_i$ - эмпирич-ие частота

$n_i'$ - теоретич-ие частота, вычисленные в предположении того, что выдвинутая гипотеза о законе распределения будет верной

наз-ся $\chi^2$- квадрат критерием Пирсона.

Комментарий: каждое слагаемое в сумме представляет собой относит-ую погрешность эмпирич-х и теоретич-х частот при выполнении гипотезы значение $\chi^2$ не должно быть большим.

Критич-ой обл-ью для данного критерия будет правосторонняя обл-ть типа $(\text{кр}, +\infty)$ в математ-ой статистике вывод-ся закон случайной величины $\chi^2$ плотн-ть распред-ия которого имеет следующ. вид (рис. 1) и зависит от парам-ов $n$.

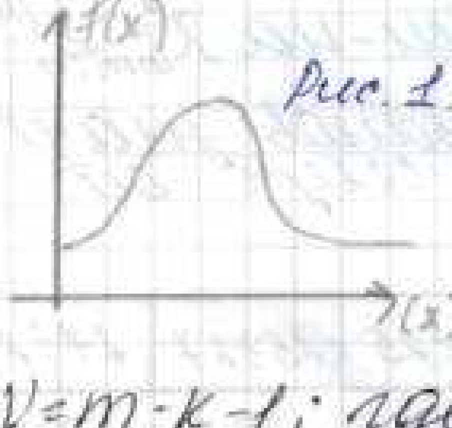


Рис. 1

В учебниках привод-ся табл. критич-х точек $\text{кр}(\alpha, V)$, где

$\alpha$ - уровень знач-сти критерия

$V = m - k - 1$; где $m$ - число интервал.

$k$ - число неизвестн. парам. в з-не распред-ия

## 8.4 Пример проверки гипотезы о нормальном распределении с уровнем значимости $\alpha = 0,05$

а) На основании внешнего вида гистограмм выдвигаем гипотезу о законе распределения наблюд-ых случ-ых величин.

$H_0: X \sim N(24{,}7; 2{,}4)$

$\bar{x}_B = 24{,}7 \quad \sigma_B = 2{,}4$

$(24{,}7 - 7{,}2; 24{,}7 + 7{,}2) = (17{,}5; 31{,}9)$

$(\bar{x}_B - 3\sigma_B; \bar{x}_B + 3\sigma_B)$

б) Модификация интервального статистического ряда (укрупнение малочислен. интервалов $n_i < 5$, и замена крайних интервалов на полубесконечн.

| $x_i \div x_{i+1}$ | $-\infty \div 23$ | $23 \div 25$ | $25 \div 27$ | $27 \div \infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 9 | 9 | 6 | 6 |

в) Вычисление теоретич-х частот.

$$n_i' = n\left(\Phi\left(\frac{x_{i+1} - \bar{x}_B}{\sigma_B}\right) - \Phi\left(\frac{x_i - \bar{x}_B}{\sigma_B}\right)\right)$$

Комментарий: вероятность попадания в интервал распред. по случ величин.

$$P(x_i < x < x_{i+1}) = \Phi\left(\frac{x_{i+1} - \bar{x}_B}{\sigma_B}\right) - \Phi\left(\frac{x_i - \bar{x}_B}{\sigma_B}\right),$$

если $X \sim N(\bar{x}_B; \sigma_B)$ $p_i = P(x_i < x < x_{i+1})$

Но $P(x_i < x < x_{i+1}) \approx w_i = \frac{n_i'}{n}$

Если $H_0: X \sim P(\lambda_B)$, где $\lambda_B = \frac{1}{\bar{x}_B}$

$n_i' = n(e^{-\lambda_B x_i} - e^{-\lambda_B x_{i+1}})$

Если $H_0$ $X \sim R(a; b)$: $a = x_{min}$, $b = x_{max}$, тогда

$n_i' = n \frac{x_{i+1} - x_i}{b-a}$

$X \sim N(24,7; 2,4)$ $n = 30$

| $N$ | $x_i$ | $x_{i+1}$ | $y_i = \frac{x_i - \bar{x}_в}{\sigma_в}$ | $y_{i+1} = \frac{x_{i+1} - \bar{x}_в}{\sigma_в}$ | $\Phi(y_i)$ | $\Phi(y_{i+1})$ | $n_i' = np_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $-\infty$ | 23 | $-\infty$ | $-0,71$ | $-0,5$ | $-0,2611$ | 7,2 |
| 2 | 23 | 25 | $-0,71$ | 0,13 | $-0,2611$ | 0,0517 | 9,4 |
| 3 | 25 | 27 | 0,13 | 0,96 | 0,0517 | 0,3315 | 8,4 |
| 4 | 27 | $+\infty$ | 0,96 | $+\infty$ | 0,3315 | 0,5 | 5,1 |

2) Вычисление значения критерия

$\chi^2_{набл.} = \sum_{i=1}^{4} \frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'}$;

| $N$ | $n_i$ | $n_i'$ | $\frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'}$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 9 | 7,2 | 0,45 |
| 2 | 9 | 9,4 | 0,02 |
| 3 | 6 | 8,4 | 0,69 |
| 4 | 6 | 5,1 | 0,16 |

$\chi^2_{набл.} = 1,32$

3) Поиск критич-ой точки $\chi^2_{кр}(\alpha, \nu)$, $\alpha = 0,05$ - ур-нь значимости критерия (вероятн-ть ошибки 1-го рода)

$\nu$ – число степеней свободы критерия $\chi^2$

$\nu = m - 2 - 1 = 4 - 2 - 1 = 1$

$\chi^2_{кр.} = 3,8$ по табл.

е) **Вывод:** $\chi^2_{набл.} < \chi^2_{кр.} \Rightarrow$ гипотеза не может быть принята

ж) Отклонение теоретич-ой кривой плотности распределения от гистограммы относительных частот.

Теоретическая плотн-сть распределения имеет вид:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_в} e^{-\frac{(x-\bar{x}_в)^2}{2\sigma_в}}$$

$\bar{x}_в = 24,7$; $\sigma_в = 2,4$ $h = 2$, $n = 30$

| $x_i^*$ | 20 | 22 | 24 | 26 | 28 | 30 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\omega_i = \frac{n_i}{nh}$ | 0,033 | 0,117 | 0,150 | 0,1 | 0,05 | 0,05 |
| $y_i = \frac{x_i^* - \bar{x}_в}{\sigma_в}$ | -1,96 | -1,13 | -0,29 | 0,54 | 1,38 | 2,21 |
| $\frac{\varphi(y_i)}{\sigma_в}$ | | | | | | |

Восстанавливаем гисто-
грамму.