Математика.

Лекции

Лекция - 1

Комбинаторика

1. Принцип умножения.

Сколькими способами можно добр. из пункта А в п. В.

Принцип умножения:

Пусть осуществление основного действия наход. последов-но соверш. несколько подействий, причем 1-ое под-ие можно соверш. k_1 способами, 2-ое под-ие k_2 способами и т. д. тогда основное действ. можно соверш. $k_1 \cdot k_2 \cdot \ldots$ способами.

В нашей зад. основным действ. был путь из п. А в п. В. Для того, чтобы соверш. этот путь, мы должны дойти до п. С (это 1-ое подейств. оно соверш. 2-мя способами) дойти из п. С в п. Д (это 2-ое подейств. оно соверш. 3 способами),

и дойти из п. D в п. B (это 3-е под-ие, совершаемое 2 способами)
По принц. умножения, число спос. добр-ся из п. A в п. B равно. $2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$

2. Принцип сложения:

Пусть для осуществления некот. основного действия нужно либо осущ-ить 1-ое поддейств. либо 2-ое под-ие, и т.д. причем 1-ое под-ие можно осущ. k_1 способом, 2-ое поддейств. k_2 способом и т.д. тогда основное действие можно осущ. $k_1+k_2+\ldots$ способом.
В нашем случае (для того, чтобы попасть из п. A в п. B (основное действие), нужно пройти либо ч/з п. C (это 1-ое поддействие), либо пройти ч/з п. D (это 2-ое поддействие). По принципу умножения 1-ое под-ие ч/з п. C осущ-ся $2 \cdot 3 = 6$ способами, 2-ое под-ие $3 \cdot 1 = 3$ способами (ч/з п. D). По принц. сложения добраться из п. A в п. B $6+3=9$ способами.

3. Размещения

Пусть имеется множество пронумерованных объектов $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Из этого множества мы можем выбрать k различных объектов, такая выборка наз. выборка без повтора. $n = 7$

Пример выборки длины 3

1 3 5

4 6 7

......

Размещениями из n элементов по m наз. выборки без повтора длины m кот. отлич. друг от друга либо составом элементов либо порядком их следования.

Пример размещ. из 7 по 3.

3 4 2

5 6 7

2 4 3

Теорема

Кол-во всех размещений из n по m опред. по ф-ле

$$A_n^m = \underbrace{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-m+1)}_{m \text{ множит.}} = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Док-во:

Для того, чтобы сформировать размещение из n эл-ов по m (это ценовые действ.) необх. выбрать на

1-е место 1-ый эл-т (1-е действие осущ-ся n способами) осущ-ить 2-е действие: выбрать 2-ой эл-т на 2-е место (это можно осущ-ить n-1 способом) и т.д.

По принципу умножения составить размещ. из n по m можем $n(n-1)(n-2)\ldots$ способами.

В некот. газете 12 страниц. Поместить на стр-ах этой газеты 4 фотографии. Сколькими способами это можно сделать, если ни одна стр. этой газеты не должна содержать более 1 фотографии?!?

{1 2 3 ... 12} - номера страниц.

1	2	3	4	- номера фотографий
3	1	4	11	
~~3~~	~~3~~	~~4~~	~~11~~	
1	3	4	11	

Из этих примеров имеем дело с размещениями из 12 по 4 их общее кол-во опред. $A_{12}^4 = 12\cdot 11\cdot 10\cdot 9 = 11880$

4. Перестановка

Опр: Размещения (эл-ов) из "n" эл-ов n наз. перестановками из n элементов

Теорема

Число всех перестанов из n элем-ов по ф-ле.

$P_n = n!$

1. Сколькими способами могут выйти на эстраду 5 певцов?

{1, 2, 3, 4, 5} – номера певцов

примеры выхода на эстраду

12345
32145
1~~424~~5

= это перестановки

Их общее кол-во опред по ф-ле.

$P_5 = 5! = 120$

2. Сколькими спос. можно расст. 9 различных книг чтобы определенные 4 книги стояли рядом?

Для того чтобы расставить книги нужным образом, необх. осущ-ить последов-но 3 поддейств

1 под-ие: выбрать место в данном ряду для 4 томика (6 способами можно сделать)

2 под-ие: упорядочить книги 4 томика

Это можно осущ. 24 спос (4! = 24 способа)

3 поддействие: упорядочить оставшиеся 5 книг.
5! = способами 120

По принципу умнож. распол. 9 книг на полке можно $6 \cdot 24 \cdot 120 = 17280$

Другой способ решения!
Можно разбить решение 9 книг на полке в 3 других поддействия
1 под-ие: считаем 4 книги за одну, можно разместить 6 книг на полке. Сколькими сп. можно это сделать? 6!
2 под-ие: разместим 4 томика. 4! способами (24) можно это сделать.
Тогда по принципу умножения получаем тот же ответ.
$720 \cdot 24 = 17280$

5. Сочетания:

Опр.: Сочетаниями из n эл-ов по m наз. выборки без повторения длины m, кот. отлич. друг от друга только составом эл-та

Пример: сочетания из 7 по 3

1 3 4 = 4 1 3
5 6 7

Теорема:

Число всех сочет. из m по n. опред-ся по ф-ле:

$$C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!m!}$$

Док-во:

Действие составл.: формирование размещений из n по m

1 поддействие: формирование сочетаний из n по m

2 поддействие: упорядочивание m выбранных эл-ов.

По принципу умножения A_n^m = число всех (различ.) сочетаний умноженное умнож. на P_n

$$A_n^m = C_n^m \cdot P_n \Rightarrow C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n!}{(n-m)!n!}$$

Практическое использ. ф-ла

$$C_n^m = \frac{n(n-1)(n-2)\dots}{m(m-1)(m-2)\dots 1}$$

Правило: Вычисляя число сочетаний нужно в числит. и знамен. записать произведение одинакового кол-ва множителей и в числ. m-множ. и в знам. m-множ. это кол-во опред. числом m. В числителе множ. располаг. по убыв. начин. с числа n а в знамен. m множ. начин. с числа m.

Пример:

$$C_7^3 = \frac{7\cdot 6\cdot 5}{3\cdot 2\cdot 1} = 35$$

Необх. выбрать в подарок 4 из 10 имеющихся книг. Сколькими способами можно это сделать?

{1, 2, 3, ..., 10} номера книг

примеры подарков

1234 = 4321

56910

~~1224~~ — это сочетания из 10 по 4

$$C_{10}^4 = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 210$$

Полезные ф-лы для числа сочетаний:

1. $C_n^1 = n$
2. $C_n^n = 1$
3. $C_n^0 = 1$
4. $C_n^m = C_n^{n-m}$

Использование 4-ой ф-лы:

$$C_{10}^8 = C_{10}^2 = \frac{10\cdot 9}{2\cdot 1} = 45$$

6. Размещения с повторами

Опр. Размещ. с повторами из n эл-ов по m назыв. выборки с повторами длины m, кот. отлич. друг от друга

либо составом элементов, либо порядком их следования
принцип размещ-ия с повтором из 7 по 3

{1 2 3 ... 7} – множество выбора
141
237
555
114

Теорема:

Число всех размещ. с повтором из n эл-ов по m опред. по ф-ле:

$$A_n^m = n^m$$

Задача
В некот. царстве нет 2-ух жителей с одинаковым набором зубов. Опред. макс-но возможное кол-во людей в этом царстве.

Лекция-2

15.02.06

{0, 1} состояние зуба
0 – его нет
1 – он есть

1	2	...	32
0	0		0
1	1		1
1	0	1	0
0	1	0	1

размещение с повтором с 2 эл-ов по 32

$\bar{A}_2^{32} = 2^{32} =$

Таблица выборок

№	Выборка	Повтор	Порядок	Формула
1	Сочетания из n по m	—	—	$C_n^m = \frac{n(n-1)(n-2)}{m(m-1)(m-2)}$ $C_n^0 = 1;\ C_n^n = 1;$ $C_n^1 = n;\ C_n^m = \frac{n-m}{n}$
2	Размещение из n по m	—	+	$A_n^m = \frac{n(n-1)\cdot(n-2)\ldots\ldots}{m}$
3	Перестановки из n элементов	—	+	$P_n = n!$
4	Размещение с повтором из n по m	+	+	$\bar{A}_n^m = n^m$