Ряды

Числовые ряды

1) Понятие ряда

Пусть $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ – бесконечная числовая последовательность.

Определение. Выражение вида $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$ или $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется числовым рядом, где a_n – наз. общим членом ряда, $a_1, a_2, a_3 \ldots$ наз. 1-ым, 2-ым, 3-м членами.

Пример: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots$

$a_n = \frac{1}{n(n+1)}$ – общий член ряда

2) Понятие сходимости ряда

$S_1 = a_1$; $S_2 = a_1 + a_2$; $S_3 = a_1 + a_2 + a_3$, ... ,

$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$

наз. n-ми частичными суммами ряда

Определение. Если существует $\lim S_n = S$, то говорят, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, где S наз. суммой ряда. В противном случае говорят, что ряд расходится.

Пример. 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

$S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$

$+ \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$

$S = 1$ – сумма ряда и ряд сход.

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (этот ряд наз. гармоническим рядом

Покажем, что этот ряд расходится. От противного пусть сходится.

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = S$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} (S_{2n} - S_n) = S - S = 0$

$S_{2n} - S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} -$

$- \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2n} +$

$\underbrace{+ \frac{1}{2n} + \ldots + \frac{1}{2n}}_{n} = \frac{1}{2}$

$\varepsilon \quad \frac{1}{2} \quad (S_m - S_n)$ противоречие

3) Геометрическая прогрессия

а.р. $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = a + aq + aq^2 + aq^3 + \dots$

$$S_n = \frac{b_1 - b_{n+1}}{1-q} = \frac{a - aq^n}{1-q} = \frac{a(1-q^n)}{1-q}$$

1) $|q| > 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty \Rightarrow$ ряд расход.

2) $|q| < 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-q} \Rightarrow$ ряд сход.

3) $q = 1$ $\quad S_n = \underbrace{a + a + a + \dots}_{n} = na$

$\lim\limits_{n\to\infty} na = \infty \Rightarrow$ ряд расход.

4) $q = -1$ $\quad S_n = a - a + a - a + \dots = \begin{cases} a, & n - \text{нечёт} \\ 0, & n - \text{чётн} \end{cases}$

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не существ $\Rightarrow$ ряд расход.

5. Св-ва сходящихся рядов

Замечание: символ "$\sim$" в выражении

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

будет обозначать, что ряды стоящие слева и справа этого символа будут сходиться и расходиться одновременно.

а) для $k \in N$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sim \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n$

т.е. на сходимость ряда не влияет отбраотбросить первые k чисел, можно не писать начальные и конечные индексы суммирования т.е. $\sum a_n$

б) для любого $c \neq 0$

$$\sum a_n \sim \sum c \cdot a_n$$

$$\sum a_n \sim \sum c \cdot a_n$$

т.е. умножение каждого члена ряда на постоянное число не влияет на сходимость ряда.

Пример: $\sum \frac{2}{3^n} \sim \sum \left(\frac{1}{3}\right)^n$ – геом. прогрессия

$|q| = \frac{1}{3} < 1$ => сходится

в) ряды $\sum a_n$ и $\sum b_n$ сход.

и $\sum a_n = A$ и $\sum b_n = B$

Тогда $\sum (a_n \pm b_n)$ сход и
$\sum (a_n \pm b_n) = A \pm B$

4. Необходимый признак сходимости

Теорема: если $\sum a_n$ сход., то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

Док-во: $\{S_n\}$ $\{S_{n-1}\}$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S \qquad \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S$$

$$\lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0$$

Следствие: если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то $\sum a_n$

расход. док-во методом от противного

Замечание:

Пример $\sum \frac{1}{n}$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, но ряд расход.

Замечание:

Пример $\sum \frac{2n-1}{100n+2}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n-1}{100n+2} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2-\frac{1}{n}}{100+\frac{2}{n}} = \frac{2}{100} = \frac{1}{50} \neq 0 \Rightarrow$ ряд расх.

5. Признак сравнения

Теорема $\sum a_n$, $a_n > 0$, $\sum b_n > 0$
$a_n \le b_n$

Тогда а) если $\sum b_n$ сход. $\Rightarrow \sum a_n$ сход.
б) если $\sum b_n$ расход $\Rightarrow \sum b_n$ расход.

Док-во: Лемма (без док-ва) монотонно возрастающая послед. сходится тогда и только тогда когда она ограничена.

$\{S_n\}$ - n-ая частичная сумма ряда для $\sum a_n$

$\{S_n\}$ - n-ая частичная сумма ряда для $\sum b_n$

это монотонно возрастающие числ. все последовательности а) $\sum b_n$ сход $\Rightarrow \{S_n'\}$ сход $\Rightarrow \{S_n'\}$ ограничена

$S_n \le S_n' \Rightarrow \{S_n\}$ огранич $\Rightarrow \{S_n\}$ сход

$\Rightarrow \sum a_n$ сход.

б) $\sum a_n$ расход $\Rightarrow \{S_n\}$ расход $\Rightarrow \{S_n\}$ не огр.

$\Rightarrow \{S_n'\}$ неогр $\Rightarrow \{S_n'\}$ расх $\Rightarrow \sum b_n$ расх

Пример: $\sum \frac{|\sin n|}{2^n} \le \sum \frac{1}{2^n} = \sum \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$|q| = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow$ сход.

Вариант 2 (признак сравнения)

Пусть $\sum a_n$, $a_n > 0$, $\sum b_n$, $b_n > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c \ne 0$$

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c \Rightarrow$

$c - \varepsilon \le \frac{a_n}{b_n} \le c + \varepsilon$, т.е.

$c_1 \le \frac{a_n}{b_n} \le c_2 \Rightarrow a_n \le c_2 b_n$ и $b_n \le \frac{1}{c_1} a_n$ $\forall n_0$

Пример: $\sum \frac{2n^2-1}{3n^3+n-4} \sim \sum \frac{2n^2}{3n^3} \sim \sum \frac{1}{n}$ – гармон. расх.

Обоснование результата:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n^2-1}{3n^3+n-4} : \frac{1}{n}\right) = \lim \frac{2n^3-n}{3n^3+n-4} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2-\frac{1}{n^2}}{3+\frac{1}{n^2}-\frac{4}{n^3}} = \frac{2}{3} \ne 0 \Rightarrow$$ используем вариан

2 признака сравнения

Ответ: расход.

6. Признак Даламбера

Теорема $\sum a_n$, $a_n > 0$
существ. $d = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$

а) если $d < 1 \Rightarrow$ ряд сход

б) если $d > 1 \Rightarrow$ ряд расх

в) если $d = 1 \Rightarrow$ ничего определ. сказать нельзя

Док-во: в) $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ сход.

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)} \qquad a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

$$d = \lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} : \frac{1}{n(n+1)} =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{n^2+n}{n^2+3n+2} = \lim_{n \to \infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}} = 1$$

$\sum \frac{1}{n}$ расход.

$$a_n = \frac{1}{n}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

$$d = \lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1$$

Вывод: если $d = 1$, то нужно использовать др. признак сходимости.

а) $d < 1$

Для $n \geq N$

$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$

$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q \Rightarrow a_{n+1} \leq q \cdot a_n$

$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} \leq q \Rightarrow a_{n+2} \leq a_{n+1} q \leq a_n q^2$

$\sum a_n \leq \sum a_n q^n$ $\quad |q| < 1 \Rightarrow$
по признаку сравнения $\sum a_n$ сход.

б) $d > 1$

Для $n \geq N$ $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$

$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 \Rightarrow a_{n+1} \geq a_n$

$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} \geq 1 \Rightarrow a_{n+2} \geq a_{n+1} \geq a_n$

$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} U_n \neq 0$ по необходимому призн.
ряд расход.

Пример: $\sum \frac{n\, 2^{n-1}}{(2n+1)!}$

Пояснение: $3! = 1\cdot2\cdot3 = 6$; $5! = 1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5 = 120 =$
$= 3!\cdot4\cdot5 = 4!\cdot5$

$$\frac{5!}{3!} = \frac{3!\,4\cdot5}{3!} = 4\cdot5 = 20$$

Условие применения признака Даламбера

a_n содержит либо c^n, либо знак "!"

$$a_n = \frac{n\cdot 2^{n-1}}{(2n+1)!} \qquad a_{n+1} = \frac{(n+1)2^{n+1-1}}{(2(n+1)+1)!} = \frac{(n+1)2^n}{(2n+3)!}$$

$$d = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\cdot 2^n}{(2n+3)!} : \frac{n\,2^{n-1}}{(2n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)}{n} \frac{2^n}{2^{n-1}} \frac{(2n+1)!}{(2n+3)!} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right) 2 \underbrace{\frac{1}{(2n+3)(2n+2)}}_{\to 0} = 0 < 1 \Rightarrow \text{сход}$$

2. Радикальный признак Коши

Теорема: $\sum a_n$, $a_n > 0$

Существует $k = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$

тогда

1) $k < 1 \Rightarrow$ сход
2) $k > 1 \Rightarrow$ расход
3) $k = 1 \Rightarrow$ др. признак

Док-во.

1) $k < 1$ $\quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = k$

Для $n \ge N$ $\sqrt[n]{a_n} \le q$

$a_n \le q^n$ $\quad |q| < 1$

⇒ по признаку сравнения $\sum a_n$ сход, т.к. $\sum q^n$ сход.

2) $k>1$

далее $n \geq N$ $\sqrt[n]{a_n} > 1$ $a_n > 1$

⇒ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$ ⇒ по необходимому признаку ряд расход

3) $\sum \frac{1}{n}$

$$k = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = \lim e^{\ln n^{\frac{1}{n}}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}} = 1$$

$$\sum \frac{1}{n(n+1)}$$

$$k = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n(n+1)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^2(1+\frac{1}{n})}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{2/n}}, \to 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+1/n)^{1/n}} \to 1$$

Условие применения радикального признака Коши

$$a_n = (c_n)^n$$

Пример: $\sum \left(\frac{2n+1}{n+3}\right)^n$

$$k = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2n+1}{n+3}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n+3} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+1/n}{1+3/n} = 2 > 1$$

Пример: $\sum \left(\frac{n+2}{n-3}\right)^{n^2} = \sum \left(\left(\frac{n+2}{n-3}\right)^n\right)^n$

$$k = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+2}{n-3}\right)^n \overset{[1^\infty]}{=}$$

Напоминание: $\lim_{v\to a} u^v \overset{[1^\infty]}{=} e^{\lim_{v\to a}(u-1)v}$

$$= e^{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n-3}-1\right)n} = e^{\lim_{n\to\infty}\frac{5n}{n-3}} = e^5 > 1 \Rightarrow$$ расход.

3. Интегральный признак Коши

Теорема: $\sum a_n$, $a_n > 0$

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots$$

Пусть $f(x)$ непрер. ф-ция на $[1, \infty)$.

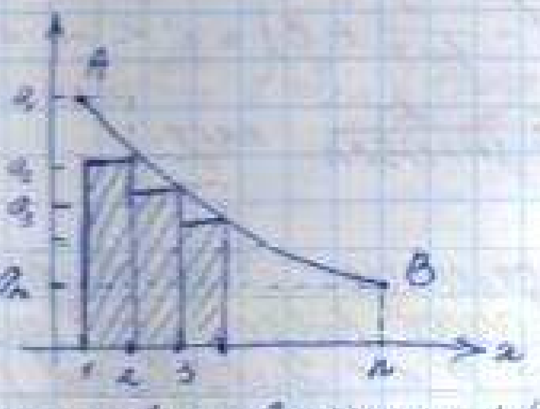
$f(1) = a_1$; $f(2) = a_2$; $f(3) = a_3 \dots$

Тогда $\sum a_n$ сход $\Leftrightarrow \int_1^\infty f(x)dx$ сход

Док-во:

$S_{aABb} = \int_1^n f(x)dx$

(из геометр. смысла опред. интеграла)



$a_2 + a_3 + \dots a_n = S_n - a_1 \leq \int_1^n f(x)dx$

Сумма площадей незаштрихованных прямоуг. равна $a_1 + a_2 + \dots a_{n-1} = S_n - a_n \geq \int_1^n f(x)dx$

Лемма: $\{S_n\}$ - монотонно возрастающ. посл-ть

$\{S_n\}$ сходится $\Leftrightarrow$ $\{S_n\}$ ограничена

$\Rightarrow)$ $\sum a_n$ сход. $\Rightarrow \{S_n\}$ сход $\xrightarrow{\text{лемма}} \{S_n\}$ огран

$\int_1^n f(x)dx \le S_n - a_n$

$\Downarrow$

$\{\int_1^n f(x)dx\}$ огранич $\overset{\text{лем.}}{\Rightarrow} \{\int_1^n f(x)dx\}$ сход $\Rightarrow \int_1^\infty f(x)dx$ с…

$\Leftarrow$ $\int_1^\infty f(x)dx \Rightarrow \{\int_1^n f(x)dx\}$ сходится $\overset{\text{лем.}}{\Rightarrow}$

$\{\int_1^n f(x)dx\}$ ограничена

$S_n \le \int_1^n f(x)dx + a_1 \Rightarrow$

$\{S_n\}$ ограничена $\overset{\text{лем}}{\Rightarrow} \{S_n\}$ сход. $\Rightarrow \sum a_n$ сход

Условие применимости: Если в знаменателе ряда присутств. логарифм, то нужно использов. интеграл. призн. Коши

Пример 1: $\sum \frac{2}{(n+1)\ln^2 n} \sim \sum \frac{1}{n\ln^2 n}$

$\int \frac{1}{x\ln^2 x}dx = \int \frac{d\ln x}{\ln^2 x} = \int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{t}+c = -\frac{1}{\ln x}+c$

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{\ln x}+c\right) = c<\infty \Rightarrow \int_1^\infty \frac{1}{x\ln^2 x}dx$ сход.

$\Rightarrow \sum \frac{2}{(n+1)\ln^2 n}$ сход.

Определение: Ряд вида $\sum\frac{1}{n^p}$ наз. обобщенным гармоническим рядом (рядом Дирихле) с показ…

при $p\le 1$ расходится (см. пред. лекцию)

при $p>1$ используем интегр. пр-к Коши

Пример: $\sum \frac{1}{n^p}$, $p>1$

$\int \frac{1}{x^p}dx = \int x^{-p}dx = \frac{x^{1-p}}{1-p}+c = \frac{1}{(1-p)x^{p-1}}+c$

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{(1-p)x^{p-1}}+c\right) = c<\infty \Rightarrow \int_1^\infty \frac{1}{x^p}dx$ сх $\Rightarrow \sum\frac{1}{n^p}$

Итак $\sum \frac{1}{n^p}$ сх. $\Leftrightarrow p>1$

4. Знакочередующиеся ряды

Определение: Ряд вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}c_n$, где $c_n>0$ будем наз. знакочередующимся рядом.

$$c_1 - c_2 + c_3 - c_4 + \ldots$$

Теорема Лейбница: Пусть $\sum(-1)^{n+1}c_n$,

$c_n>0$; $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$, причем $c_1>c_2>c_3>c_4>\ldots$

т.е. $c_n \searrow 0$ (стремится к нулю монотонно).
Тогда $\sum(-1)^{n+1}c_n$ сходится и сумма ряда $S\le c_1$

Док-во. $S_n = \underbrace{(c_1-c_2)}_{>0}+\underbrace{(c_3-c_4)}_{>0}+\ldots+\underbrace{(c_{2n-1}-c_{2n})}_{>0}$

$\Rightarrow S_{2n}>0$ и $\{S_{2n}\}$ - монотонно возраст. последовательность

С др. стороны: $S_{2n} = c_1 - \underbrace{(c_2-c_3)}_{>0} - \underbrace{(c_4-c_5)}_{>0} - \ldots - \underbrace{c_{2n}}_{>0}$

$\Rightarrow S_{2n} < c_1 \Leftrightarrow \{S_{2n}\}$ ограничен. $\overset{\text{т.В.}}{\Rightarrow} \{S_{2n}\}$ сход., т.е.

$\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = S$

Покажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n+1} = S$

Действительно, $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim\limits_{n\to\infty}(S_{2n}+c_{2n+1}) =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} + \lim\limits_{n\to\infty} c_{2n+1} = S+0 = S$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} S_n = S \Rightarrow \sum(-1)^{n+1}c_n$ сход. $\quad \xrightarrow{\ S_{2n} \quad c_1\ } \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = S \le c_1$

Комментарии:
1) монотонность стремления к нулю будет выполняться, это проверять не нужно.

2) $\sum (-1)^{n+1} C_n$ сход $\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} C_n = 0$ / с учетом монот.

Пример: $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ - знакочеред. ряд

$C_n = \frac{1}{n}$ $\lim\limits_{n\to\infty} C_n = 0 \Rightarrow$ ряд сход.

Пример: $\sum \frac{(-1)^n n}{\ln n}$ $C_n = \frac{n}{\ln n}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\ln n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} n = \infty \neq 0 \Rightarrow$ ряд расход.

6. Знакопеременные ряды

Определение: Если среди членов ряда имеются как положит. так и отриц., то ряд наз. знакопеременным.

Теорема (достаточный признак сход. для знакопеременных рядов) Если $\sum |a_n|$ сход, то $\sum a_n$ сход.

Док-во: S_n - n-ая частичная сумма ряда $\sum a_n$

S_n' - n-ая частичная сумма ряда

Пусть A_n^+ - сумма всех положит. положит. слагаемых в S_n

A_n^- - сумма всех отрицат слагаемых в S_n

Тогда $S_n = A_n^+ + A_n^-$

$S_n' = A_n^+ + |A_n^-|$

Ряд $\sum |a_n|$ сход. $\Rightarrow \{S_n'\}$ сход. $\Rightarrow$ огран. $\{S_n'\}$

огранич. $\Rightarrow \{A_n^+\}$ и $\{A_n^-\}$ огран. $\Rightarrow$

$\lim\limits_{n\to\infty} A_n^+ = A^+$

$\lim A_n^- = A_n^- \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} (A_n^+ - A_n^-) = A^+ - A^- \Rightarrow \sum a_n$ сход.

1. Знакопеременные ряды

Достаточный пр-к сходимости

$\sum |a_n|$ сход $\Rightarrow \sum a_n$ сход

Пример: $\sum \frac{\sin n}{n^2}$; $\sum \left|\frac{\sin n}{n^2}\right| = \sum \frac{|\sin n|}{n^2}$ -

$\sum \frac{|\sin n|}{n^2} \leq \sum \frac{1}{n^2}$ ряд относится к обобщ. $p = 2 > 1$ сход. по признаку сравнения (вар. 1) $\sum \frac{|\sin n|}{n^2}$ сход. по дост. признаку сх-ти $\sum \frac{\sin n}{n^2}$ сход.

Замечание: этот пр-к явл. достат., но не явл. необход.

Пример: $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ сход, но $\sum \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \sum \frac{1}{n}$ -

гармон. ряд $p = 1 \leq 1$ - расх.

2. Абсолютная и условная сх-ть

Определение: Ряд $\sum a_n$ наз. абсолютно сход., если $\sum |a_n|$ сход.

Определение: Ряд $\sum a_n$, наз. условно сход. если $\sum |a_n|$ - расх., но $\sum a_n$ - сход.

Пример 1. Исслед. на абсол., условн сх-ть ряд $\sum \frac{(-1)^n n}{2^n}$

План:

1) $\sum |a_n|$ - ряд с полож. членами. Если этот ряд сход., то исходный ряд будет абсолютно сход. ряд. Если этот ряд расход, то переходим к пункту 2.

2) Исследуем сам ряд $\sum a_n$

Если он сход, то $\sum a_n$ - условн. сход.
Если этот ряд расход, то в ответе нужно указать, что ряд расход.

1) $\sum |a_n| = \sum \frac{n}{2^n}$

$k = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{2^n}} = \lim\limits_{n\to\infty} (e^{\ln n})^{1/n} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} 1/n}$

$= e^0 = 1$

Пример 2. $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

а) $\sum |a_n| = \sum \frac{1}{n^{1/2}}$ $\quad p = \frac{1}{2} < 1$ расх

б) $\sum a_n = \sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

$c = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ $(\downarrow 0)$ сход.

Ответ: условно сход.

Замечание: В абсолют. сход. рядах члены ряда можно переставлять как угодно (можно группировать) при этом сходимость не нарушается, и сумма ряда остаётся той же самой.

В условно сход. рядах при изменен. порядка суммирован. может изменить-ся сумма ряда.

3. Степенные ряды

Определение: выражение вида $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ наз. степенным рядом, где числа c_n - коэф. ряда.

Замечания:

1) При x равном конкретному числу мы получим обыкновенный числовой ряд

2) Степенной ряд явл. ярким представителем функциональных рядов: $\sum\limits_{n=0} f_n(x)$, где $f_n(x) = c_n x^n$ — степенная ф-ция

3) Если положить вместо x в степенном ряде (вместо x) некотор. ф-ию $f(x)$, то мы получим $\sum c_n (f(x))^n$ который наз. обобщённым степенным рядом, исследование которого явл. исследованием классич. степенного ряда.

Примеры обобщ. степен. рядов:

1) $\sum \frac{(x-a)^n}{n}$; $c_n = \frac{1}{n}$, $f(x) = x-a$

2) $\sum \frac{x^{2n}}{\sqrt{n}}$, $c_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, $f(x) = x^2$

3) $\sum \frac{\sin^n x}{n!}$; $c_n = \frac{1}{n!}$; $f(x) = \sin x$

Определение: Областью сходим. степен. ряда будем наз. множество всех значений x при которых степенной ряд будет сходиться.

4. Теорема Абеля

$\sum c_n x^n$

1) Если при $x = x_0$ $\sum c_n x^n$ сход., то при $|x| < |x_0|$ ряд

2) Если при $x = x_1$ $\sum c_n x_1^n$ расх, то при $|x| > |x_1|$ $\sum c_n x^n$ расх.

Док-во: Пусть $\sum c_n x_0^n$ — сход $\Rightarrow \lim c_n x_0^n = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |c_n x_0^n| = 0$

$|x| < |x_0|$ $n \to \infty \Rightarrow |c_n x_0^n| \le M$

$\sum c_n x^n$

Рассмотрим $\sum |c_n x^n| = |c_0| + |c_1 x| + |c_2 x^2| + \ldots =$
$= |c_0| + |c_1 x_0| \left|\frac{x}{x_0}\right| + |c_2 x_0^2| \left|\left(\frac{x}{x_0}\right)^2\right| + \ldots \le = M + M\left|\frac{x}{x_0}\right| +$
$+ M\left|\left(\frac{x}{x_0}\right)^2\right| + \ldots =$

$\left|\frac{x}{x_0}\right| = q < 1$

$= M + Mq + Mq^2 + Mq^3 + \ldots$

- сход., как геометр. прогрессия
По пр-ку сравнен. $\sum |c_n x^n|$ сход. по достат. пр-ку сход. для знакочеред. рядов $\sum c_n x^n$ сход. причем абсолютно

2) Пусть $\sum c_n x^n$, расход. методом от противного предположим, что $\sum c_n x^n$ сход. при $|x| > |x_1|$. По той части теоремы следует что $\sum c_n x_1^n$, сход. Противоречие.

Замечание: Область сход. будет иметь симметрич. относит. начала коорд. вид: либо $(-x_0, x_0)$, либо $(-x_0, x_0]$, либо $[-x_0, x_0)$, либо $[-x_0, x_0]$

6. Понятие радиуса сходимости

Определение. Число $R > 0$ наз. радиусом сход. степенного ряда $\sum c_n x^n$, если для $x: |x| < R$ ряд сходится, а для $x: |x| > R$ ряд расход.

Теорема: Пусть существ. $\tau = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| \ne 0$

Тогда $R = \frac{1}{\tau}$

Док-во: 1) $x: |x|<R \quad \sum C_n x^n$
Рассмотрим $\sum |C_n X^n|$ Используем пр-к Даламбера

$$d = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{C_{n+1}}{C_n} \frac{x^{n+1}}{x^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{C_{n+1}}{C_n} \right| |x| =$$

$$= \ell |x| = \frac{|x|}{R} < 1 \Rightarrow \sum |C_n x^n| \text{ сход.} \Rightarrow \sum C_n x^n$$

сход. (достат. пр-к сходимости знакопер. рядов)

2) $x: |x|>R$

$$d = \lim \frac{|C_{n+1} x^{n+1}|}{|C_n \cdot x^n|} = \frac{|x|}{R} > 1 \Rightarrow |C_{n+1} X^{n+1}| \geq |C_n X^n| \Rightarrow$$

$$|C_n X^n| \geq |C_{n_0} X^{n_0}| > 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} |C_n X^n| \neq 0 \Rightarrow$$

по необходимому признаку ряд расх.

Пример Найти обл. сходимости

$$\sum \frac{x^{2n}}{2n+1} \qquad y = x^2$$

$$\sum \frac{y^n}{2n+1} \qquad C_n = \frac{1}{2n+1}; \; C_{n+1} = \frac{1}{2n+3}$$

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{C_{n+1}}{C_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+3} : \frac{1}{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{2n+3} = 1$$

$$R = \frac{1}{\ell} = 1$$

расх. сход. расх.
$-1 \quad 1 \quad y$

Отдельно исслед. 2 точк: $y=-1$, $y=1$

$y=-1$

$$\sum \frac{(-1)^n}{2n+1} \qquad \ell = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} = 0 \underset{\text{сход}}{(\neq 0)} \Rightarrow y=1$$

$$\sum \frac{1^n}{2n+1} = \sum \frac{1}{2n+1} \sim \sum \frac{1}{n} \quad p = 1 \leq 1 \text{ - расход.}$$

$-1 \le y < 1 \Rightarrow -1 \le x^2 \le 1$

$\begin{cases} x^2 < 1 \\ x^2 \ge -1 \end{cases}$ $\quad x^2 < 1$
$\quad |x| < 1$

Ответ: $(-1; 1)$

Замечание:

1) Радиус сходимости можно искать по ф-ле

$$\boxed{R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|}$$

2) Радиус сход. можно искать по ф-ле

$$\boxed{R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}}}$$

3) Если $R = 0$, то обл. сход состоит из одной точки $x = 0$

4) Если $R = \infty$, то обл. сход. совпадает с числовой прямой

5) По теор. Абеля сход. внутри интервала $(-R; R)$ степенного ряда абсолютная.

1. Св-ва степенных рядов (без док-ва)

Пусть $f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \dots$

$$-R < x < R$$

а) $f(x)$ – бесконечно дифф. функция, причём $f'(x) = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + \dots$

$f''(x) = 2C_2 + 6C_3 x + \ldots$ где $-R < x < R$

б) $f(x)$ - интегрируема на любом отрезке, лежащем на $(-R, R)$

пусть $(a, b) \subset (-R, R)$ тогда

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b C_0 dx + \int_a^b C_1 x dx + \int_a^b C_2 x^2 dx + \ldots$$

частный случай: $(0, x) \in (-R, R) \Rightarrow$

$$\int_0^x f(x)dx = \int_0^x C_0 dx + \int_0^x C_1 x dx + \int_0^x C_2 x^2 dx + \ldots =$$

$$= C_0 x + \frac{C_1 x^2}{2} + \frac{C_2 x^3}{3} + \ldots \quad \text{где } -R < x < R$$

Пример: $1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = \frac{1}{1-x}$

$-1 < x < 1 \quad (|x| < 1)$

По св-ву а

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)' = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots; \quad \frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 \ldots$$

$$-1 < x < 1$$

Внимание: мы в данном примере нашли сумму ряда, стоящего в правой части. По св-ву б

$$\int_0^x \frac{1}{1-x} dx = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \ldots$$

$$-\ln|1-x| \Big|_0^x = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \ldots$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \ldots$$

$$-1 < x < 1$$

Замечание - вывод: При помощи св-ва

а и б мы не только научимся суммировать некотор. степенные ряды, но и раскладывать некотор. элемент. ф-ции в степенные ряды.

2. Ряд Маклорена и ряд Тейлора для ф-ц

Пусть $f(x)$ - бесконечно диф. функция

Пусть $f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \ldots$

$$f(0) = c_0 \Rightarrow c_0 = f(0) = \frac{f^{(0)}(0)}{0!}$$

По свойству а:

$$f'(x) = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + \ldots$$

$$f'(0) = c_1 \Rightarrow c_1 = f'(0) = \frac{f'(0)}{1!}$$

$$f''(x) = 2c_2 + 6c_3 x + \ldots$$

$$f''(0) = 2c_2 \qquad c_2 = \frac{f''(0)}{2} = \frac{f''(0)}{2!}$$

По св-ву а:

$$f'''(x) = 6c_3 + \ldots$$

$$f'''(0) = 6c_3 \Rightarrow c_3 = \frac{f'''(0)}{6} = \frac{f^{(3)}(0)}{3!}$$

. . . .

$$c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

Определение: степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$

наз. рядом Маклорена для ф-ции f

Замечание: если ф-ция разложена в обобщенный степен. ряд $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (x -$

то аналогичные выкладки приведут к

к ряду $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ котор. наз. рядом Тейлора для ф-ции $f(x)$ в т. $x=a$.

3. Сходится ли ряд Маклорена к ф-ции?

Теорема: Пусть $|f^{(n)}(x)| \le M$ для $|x|<\delta$ где M не зависит от n, тогда ряд Маклорена сходится к ф-ции $f(x)$ в т. x для $|x|<\delta$

Лемма (без док-ва) если $f(x)$ - бесконечно дифференц. функция, то справедлива ф-ла Маклорена $f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x +$

$$+\frac{f''(0)x^2}{2!} + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} + \frac{f^{(n+1)}(x\theta)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

$$0<\theta<1$$

$$f(x) = S_n + r_n(x) \qquad 0<x\theta<x$$

где S_n - n-ая частичная сумма ряда Маклорена, $r_n(x)$ - остаточн. член в форме Лагранжа

Утверждение $\Rightarrow$ $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \Rightarrow \lim_{n\to\infty}(f(x) - S_n) = 0$

$\Leftarrow$ $\lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}(f(x) - S_n) = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n =$
$= f(x) \Rightarrow f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$

Доказываем теорему:
Пусть $|f^{(n)}(x)| \le M \Rightarrow \lim_{n\to\infty} r_n(x) =$
$|x|<\delta$

$= \lim_{n\to\infty} f^{(n+1)}(x\theta)\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} =$

$$\left|f^{n+1}(x\theta)\frac{x^{n+1}}{n+1}\right| \le M\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right|$$

Но $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{x^{n+1}}{n+1}\right| = 0$, т.к. $\sum \left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right|$ сход. по признаку Даламбера для любого x.

$\Rightarrow 0 \Rightarrow$ ряд Маклорена сход. к ф-ции

4. Разложение элементарных ф-ций в степенные ряды

а) $f(x) = e^x$

1) Ряд Маклорена: $f'(x) = e^x$, $f^{(n)}(x) = e^x$

$f^{(n)}(0) = 1$

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$ – ряд Маклорена для $y = e^x$

2) Пусть $|x| < \delta$ $\;-\delta < x < \delta \Rightarrow |f^{(n)}(x)| = |e^x| \leq e^\delta$ не зависит от n

$\Rightarrow e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

5) Таблица разложений в ряды Маклорена основных элементарных ф-ций.

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \ldots$$

$0! = 1$

$$-\infty < x < \infty$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \ldots$$

$$-\infty < x < \infty$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \dots$$

$$-\infty < x < \infty$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$$

$$-1 < x \le 1$$

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots$$

$$-1 \le x \le 1$$

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \dots$$

$\alpha \ge 0 \quad -1 \le x \le 1$

$-1 < \alpha < 0 \quad -1 < x \le 1$

$\alpha \le -1 \quad -1 < x < 1$

5. Применение степенных рядов к вычислению значений элементарных ф-ций (калькулятор)

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + r_3(x)$$

$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$; $r_3(x) = \frac{f^{(4)}(x\theta)}{4!} x^4$ – погрешность вычислений

$x = 1$

$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{12+3+1}{6} = \frac{16}{6} = 2{,}666 \dots = 2{,}(6) \approx 2{,}7$

Погрешность вычисления

$f^{(n)}(x) = e^x$; $0 < x\theta < 1 \quad 0 < \theta < 1$

$|f^{n}(1)| < e \le 3 \Rightarrow |r_3(x)| \le \frac{3 \cdot 1}{4!} = \frac{1}{8} = 0{,}125$

6. Приближенное вычисление значений производной n-го порядка

$y = \frac{\sin x}{x}$ Найти $y^{(6)}(0)$

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{7!} + \dots}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \frac{x^6}{7!} + \dots$$

$$c_6 = -\frac{1}{7!} = \frac{y^{(6)}(0)}{6!} \Rightarrow y^{(6)}(0) = -\frac{6!}{7!} = -\frac{1}{7}$$

7. Вычисление пределов

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}}{x \sin(x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \dots\right) - 1 - x - \frac{x^2}{2}}{x\left(x^2 - \frac{x^6}{6} + \dots\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^3\left(\frac{1}{6} + \frac{x}{24} + \dots\right)}{x^3\left(1 - \frac{x^4}{6} + \dots\right)} = \frac{1}{6}$$

8. Приближенное вычисление интегр.

$$\int_0^{1/2} \sin(x^2)\,dx = \int_0^{1/2} \left(x^2 - \frac{x^6}{6} + \frac{x^{10}}{120} - \dots\right)dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^{1/2} - \frac{x^7}{42}\Big|_0^{1/2} +$$

$$+ \frac{x^{11}}{120 \cdot 11}\Big|_0^{1/2} - \dots = \frac{1}{24} - \frac{1}{42 \cdot 128} + \dots \approx \frac{1}{24} \quad \text{(погрешность} < \frac{1}{42 \cdot 128} < 0{,}01$$

По теор. Лейбница в знакочеред. ряде можно отбрасывать бесконечный остаток ряда причем погрешность такого отбрасыв. не превосходит 1-го члена отброшенной части.

1. Применение степенных рядов к решению диф. уравнений

а) Использование ряда Маклорена

$$y' = xy + 1 \qquad y(0) = 2$$

Ищем решение в виде

$y(x)=y(0)+\frac{y'(0)}{1!}x+\frac{y''(0)}{2!}x^2+\ldots$

$y(0)=2$

$y'(0)=0\cdot 2+1=1$; $y''=y+xy'$

$y''(0)=2+0=2$; $y'''=y'+y'+xy''$

$y'''(0)=2\cdot 1+0\cdot 2=2$; $y(x)=2+x+x^2+\frac{1}{3}x^3+\ldots$

б) метод неопредел. коэф.

Ищем решение в виде степен. ряда:

$y(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+\ldots$

$y(0)=2 \Rightarrow c_0=2$

$c_1+2c_2x+3c_3x^2+\ldots=c_0x+c_1x^2+c_2x^3+c_3x^4+\ldots+1$

x^0 | $c_1=1$
x | $2c_2=c_0$; $2c_2=2$; $c_2=1$
x^2 | $3c_3=c_1$; $c_3=\frac{1}{3}$

$y(x)=2+x+x^2+\frac{1}{3}x^3+\ldots$

2. Тригонометрический ряд (ряд Фурье)

Определение: Функциональный ряд вида

$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos nx+b_n\sin nx]$ наз. тригоном. рядом Фурье, где a_0, a_n, b_n – наз. коэф. ряда

Свойство: ряд Фурье периодичен с периодом $T=2\pi$, т.е. если он задает ф-цию $f(x)$, то эта ф-ция периодична с периодом $T=2\pi$

Док-во: $\cos n(x+2\pi) = \cos(nx+2\pi n) = \cos(nx)$
$\sin n(x+2\pi) = \sin(nx+2\pi n) = \sin(nx)$

Замечание: о сравнении ряда Фурье со степен. рядом степ. ряд по сравнению с рядом Фурье обладает большей скорост сходимости, т.е. для приближения ф-ции достаточно брать малое число слагаем однако не все ф-ции можно разложить в степенные ряды. На помощь приходит ряд Фурье. С его помощью можно разлож в ряды больший класс ф-ций.

3. Ряд Фурье с периодич. ф-цией $f(x)$ с периодом $T=2\pi$

Пусть $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nx + b_n \sin nx]$

Введем ф-лы для коэф. этого ряда Фурье. Предположение, что ф-ция $f(x)$ на $[-\pi;\pi]$, ряд Фурье можно почленно интегрир. на $[-\pi;\pi]$

Возьмем ряд вспомогат. интегралов

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\,dx = \frac{1}{n}\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{n}(\sin\pi n - \sin(-\pi n)) = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\,dx = -\frac{1}{n}\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi} = -\frac{1}{n}(\cos\pi n - \cos(-\pi n)) = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(1+\cos 2nx)\,dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2n}\sin 2nx\right)\Big|_{-\pi}^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\pi + \frac{1}{2n}\sin 2\pi n\right) - \frac{1}{2}\left(-\pi + \frac{1}{2n}\sin(-2\pi n)\right) = \pi$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(1-\cos 2nx)\,dx = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2n}\sin\ldots\right.$$

$= \frac{1}{2}\left(\pi - \frac{1}{2n}\sin 2\pi n\right) - \frac{1}{2}\left(-\pi - \frac{1}{2n}\sin(-2\pi n)\right) = \pi$

$n \neq m$, $\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cdot \sin mx dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (\sin(mx+nx) +$

$+ \sin(mx - nx)) dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(m+n) x dx + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(m-n) x dx = 0$

$n \neq m$

$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cdot \cos mx dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (\cos(mx+nx) + \cos(mx-nx)) dx =$

$= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(m+n) x dx + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(m-n) x dx = 0$

$n \neq m$, $\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (\cos(mx+nx) -$

$- \cos(mx-nx)) dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(m+n) x dx - \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(m-n) x dx = 0$

$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nx + b_n \sin nx]$

$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} dx + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx]$

$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{a_0}{2} 2\pi = \pi a_0$, $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$

$f(x) \cos mx = \frac{a_0}{2} \cos mx + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nx \cdot \cos mx +$

$+ b_n \sin nx \cos mx]$

$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} \cos mx dx + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx +$

$+ b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx dx]$

$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx = a_m \pi$

$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx$

Аналогично, $b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mx\,dx$

Итог: Ряд Фурье для ф-ции $y = f(x)$:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos x + b_n \sin x\right],$$

где $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$$

4. При каких условиях ряд Фурье для ф-ции сходится

Теорема: Пусть периодич. ф-ция $y = f(x$
с периодом $T = 2\pi$ непрерывна вместе с
$f'(x)$ на $(-\pi; \pi)$ кроме может быть коне
ного числа точек разрыва первого рода

Напоминание:

x_0 – т. разрыва I-ого род

Тогда ряд Фурье для
ф-ции сходится к самой ф-ции в точ
ках непрерывности, а в т. разрыва зна
чении суммы ряда равно

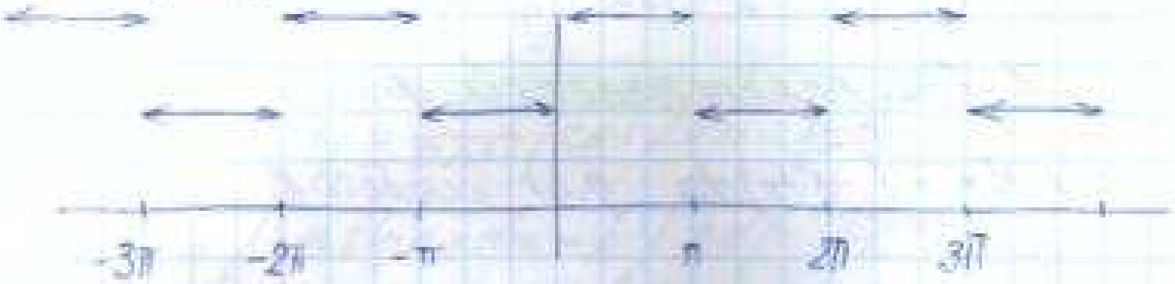
$$\frac{f(x_0-) + f(x_0+)}{2}$$

Пример: Разложить ф-цию

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -\pi < x < 0 \\ 2, & 0 < x < \pi \end{cases}$$ в ряд Фурье

Решение:

Превратим нашу ф-ию в непериодич. с периодом $T=2\pi$



$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) =$$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}1dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}2dx=\frac{\pi}{\pi}+\frac{2\pi}{\pi}=3\pi$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\cos nx\,dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}2\cos nx\,dx=$$

$$=\frac{1}{\pi n}\sin nx\Big|_{-\pi}^{0}+\frac{2}{\pi n}\sin nx\Big|_{0}^{\pi}=0$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\sin nx\,dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}2\sin nx\,dx=$$

$$=-\frac{1}{\pi n}(\cos nx)\Big|_{-\pi}^{0}-\frac{2}{\pi n}\cos nx\Big|_{0}^{\pi}=-\frac{1}{\pi n}(1-\cos \pi n)-\frac{2}{\pi n}\cdot$$

$$\cdot(\cos \pi n-1) =$$

$$\cos \pi n=(-1)^n$$

$$= -\frac{1}{\pi n}(+1-(-1)^n+2(-1)^n-2)=-\frac{1}{\pi n}((-1)^n-1)$$

$$= \frac{3}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{\pi n}\sin nx=\frac{3}{2}+\frac{2}{\pi}\sin x+\frac{2}{3\pi}\sin 3x+\dots$$

Комментарий: по теор., если $x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow$

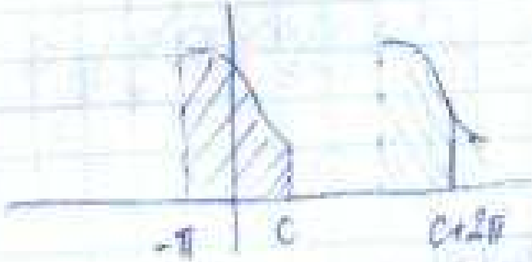
$$2=\frac{3}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{\pi n}\sin\frac{\pi n}{2}$$

по теор., если $x=0$

$1{,}5 = \frac{3}{2}$

Св-ва периодической ф-ции

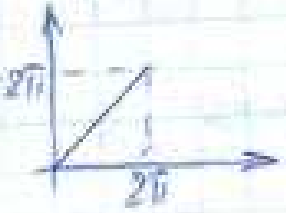
$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \int_{c}^{c+2\pi} f(x)\,dx$$ для любого c

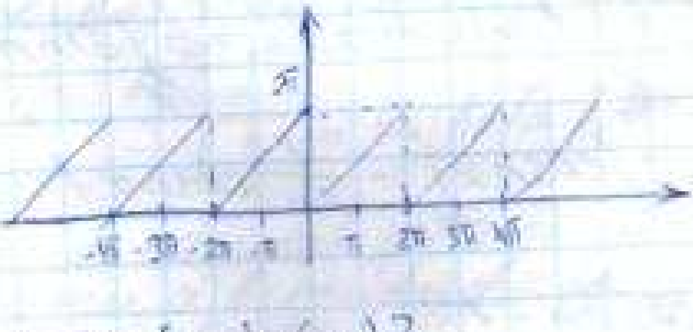


Пример: Разложите в ряд Фурье ф-цию $f(x)=x$ на $[0;2\pi]$

Периодич. продолжение

$F(x)=f(x)$ на $[0;2\pi]$





$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)\right]$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\,dx \; ; \; a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\cos nx\,dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\sin nx\,dx$$

По св-ву (см. конец прошлой лекции)

$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\,dx = \frac{1}{\pi}\frac{x^2}{2}\Big|_0^{2\pi} = 2\pi$

$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\,d\frac{\sin nx}{n} = \frac{1}{\pi}\Big(\underbrace{x\frac{\sin nx}{n}\Big|_0^{2\pi}}_{0} - \int_0^{2\pi}\frac{\sin nx}{n}dx\Big) =$

$= \frac{1}{\pi n^2}\cos nx\Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{\pi n^2}(\overset{1}{\cos 2\pi n} - \overset{1}{\cos 0}) = 0$

$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\,d\left(-\frac{\cos nx}{n}\right) = \frac{1}{\pi}\Big(-\frac{x\cos nx}{n}\Big|_0^{2\pi} +$

$+\int_0^{2\pi}\frac{\cos nx}{n}dx\Big) = \frac{1}{\pi}\Big(-\frac{2\pi\cos 2\pi n}{n} - 0 + \underbrace{\frac{\sin nx}{n^2}\Big|_0^{2\pi}}_{0}\Big) = -\frac{2}{n}$

$x = \pi + \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{2}{n}\right)\sin nx = \pi - 2\sin x - \sin 2x - \frac{2}{3}\sin 3x - \dots$

1. Разложение чётных ф-ций в ряд Фурье

Теорема: $F(x)$ - чётная периодич. ф-ция с $T=2\pi$. Тогда $b_n = 0$, $a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx$, $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cdot\cos nx\,dx$

Док-во: $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\Big(\int_{-\pi}^{0} f(x)\sin nx\,dx +$

$+\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx\Big)$

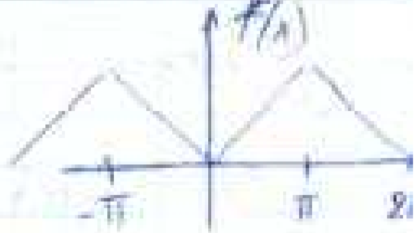
$\int_{-\pi}^{0} f(x)\sin nx\,dx \underset{x=-t}{=} \int_{\pi}^{0} f(-t)\sin(-nt)\,d(-t) = \int_{\pi}^{0} f(t)\sin(nt)\,dt =$

$= -\int_0^{\pi} f(t)\sin nt\,dt \Rightarrow b_n = 0$

Аналогично разбиваем интегралы в сумму 2-х интегралов, получим формулы для a_0 и a_n

Пример: разложить в ряд по косинусам

Решение:



$b_n = 0$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\,dx = \frac{2}{\pi}\frac{x^2}{2}\Big|_0^\pi = \pi$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\,d\frac{\sin nx}{n} = \frac{2}{\pi}\Big(x\frac{\sin nx}{n}\Big|_0^\pi -$$

$$- \int_0^\pi \frac{\sin nx}{n}dx\Big) = \frac{2}{\pi}\frac{\cos nx}{n^2}\Big|_0^\pi = \frac{2}{\pi n^2}\left((-1)^n - 1\right)$$

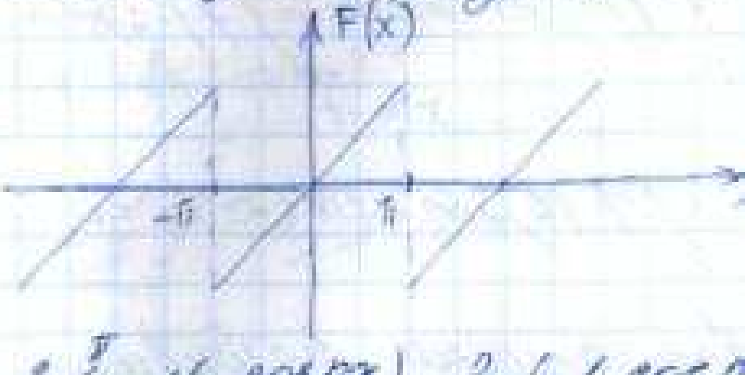
$$x = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^\infty \frac{2}{\pi n^2}\left((-1)^n - 1\right)\cos nx = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\cos x - \frac{4}{9\pi}\cos$$

2. Разложение нечетных ф-ций

Теорема. Если $F(x)$ - нечетная, то
$a_0 = a_n = 0$, $b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi F(x)\sin nx\,dx$

Док-во: (аналогично пред. док-ву)

Пример: разложить $y=x$ в ряд по син
сам



$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\,d\Big(-\frac{\cos nx}{n}\Big) = \frac{2}{\pi}\Big(x\Big(-\frac{\cos n}{n}$$

$$+\int_0^\pi \frac{\cos nx}{n}dx\Big) = \frac{2}{\pi}\Big(\pi\Big(-\frac{\cos \pi n}{n}\Big) + \frac{\sin nx}{n^2}\Big|_0^\pi\Big) = -\frac{2}{n}$$

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2}{n}(-1)^n \sin nx = 2\sin x - \sin 2x + \frac{2}{3}\sin 3x - \ldots$$

3. Разложение в ряд Фурье периодических ф-ций с произвольным периодом $T = 2l$

Теорема: Пусть $F(x)$ - периодич. с $T = 2l$, $F(x)$, $F'(x)$ непрерывна на $[-l; l]$ кроме, может быть, конечного числа точек разрыва I-го рода. Тогда, если т-т. непрерывности, то

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos\frac{\pi n x}{l} + b_n \sin\frac{\pi n x}{l}\right], \text{ где}$$

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} F(x)\,dx \; ; \; a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} F(x)\cos\frac{\pi n x}{l}\,dx$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} F(x)\sin\frac{\pi n x}{l}\,dx$$ если т-т. разрыва, то

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos\frac{\pi n x}{l} + b_n \sin\frac{\pi n x}{l}\right] = \frac{F(x-) + F(x+)}{2}$$

Причем, если $F(x)$ - четная функция, то $b_n = 0$, $a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l F(x)\,dx$

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l F(x)\cos\frac{\pi n x}{l}\,dx$$ если $F(x)$ - нечетная, то

$$a_0 = 0, \; a_n = 0, \; b_n = \frac{2}{l}\int_0^l F(l)\sin\frac{\pi n x}{l}\,dx$$

Док-во: $F(x)$ - период с $T = 2l$

$$F_1(\xi) = F\left(\frac{l\xi}{\pi}\right) \text{ - период с } T = 2\pi$$

$$F_1(\xi + 2\pi) = F\left(\frac{l(\xi + 2\pi)}{\pi}\right) = F\left(\frac{l\xi}{\pi} + 2l\right) = F\left(\frac{l\xi}{\pi}\right) = F_1(\xi)$$

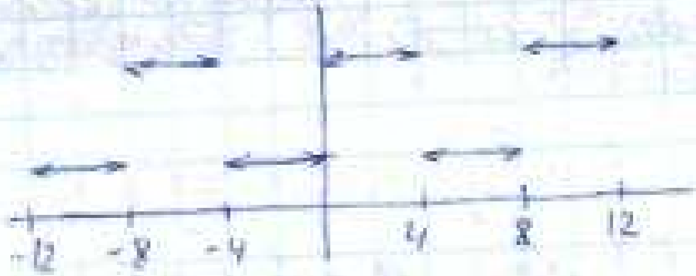
Но по пред. лекции

$F_1(\xi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos n\xi + b_n \sin n\xi]$

Но $x = \frac{l\xi}{\pi} \Rightarrow \xi = \frac{\pi x}{l}$

Задача: Разложить в ряд Фурье ф-цию

$f(x) = \begin{cases} 2; & -4<x<0 \\ 6; & 0<x<4 \end{cases}$



$l=4$ $\quad F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n \cos\frac{\pi n x}{4} + b_n \sin\frac{\pi n x}{4}]$

$a_0 = \frac{1}{4}\int_{-4}^{4} F(x)\,dx = \frac{1}{4}\left(\int_{-4}^{0} 2\,dx + \int_{0}^{4} 6\,dx\right) = \frac{1}{4}(8+24) = 8$

$a_n = \frac{1}{4}\int_{-4}^{4} F(x)\cos\frac{\pi n x}{4}\,dx = \frac{1}{4}\left(\int_{-4}^{0} 2\cos\frac{\pi n x}{4}\,dx + \int_{0}^{4} 6\cos\right.$

$= \frac{1}{4}\left(\frac{2\sin\frac{\pi n x}{4}}{\frac{\pi n}{4}}\Big|_{-4}^{0} + \frac{6\sin\frac{\pi n x}{4}}{\frac{\pi n}{4}}\Big|_{0}^{4}\right) = 0$

$b_n = \frac{1}{4}\int_{-4}^{4} F(x)\sin\frac{\pi n x}{4}\,dx = \frac{1}{4}\left(\int_{-4}^{0} 2\sin\frac{\pi n x}{4}\,dx + \int_{0}^{4} 6\right.$

$\left.\cdot\frac{\pi n x}{4}\,dx\right) = \frac{1}{4}\left(-\frac{2\cos\frac{\pi n x}{4}}{\frac{\pi n}{4}}\Big|_{-4}^{0} - \frac{6\cos\frac{\pi n x}{4}}{\frac{\pi n}{4}}\Big|_{0}^{4}\right) =$

$= \frac{1}{4}\left(-\frac{8}{\pi n}\left(1-(-1)^n\right) - \frac{24}{\pi n}\left((-1)^n-1\right)\right) = -\frac{2}{\pi n}\left(1-(-1)^n +\right.$

$\left. + 3(-1)^n - 3\right) = -\frac{2}{\pi n}\left(2(-1)^n - 2\right) = -\frac{4}{\pi n}\left((-1)^n - 1\right)$

$F(x) = 4 + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{4}{\pi n}\left((-1)^n-1\right)\sin\frac{\pi n x}{4} = 4 + \frac{8}{\pi}\sin\frac{\pi x}{4} +$

$+ \frac{8}{3\pi}\sin\frac{3\pi x}{4} + \dots$

Приложение рядов Фурье

1) Понятие ур-ия в частных производных

Определение: ур. вида $aU''_{xx} + 2bU''_{xy} + cU''_{yy} + dU'_x + eU'_y + fU = g(x,y)$, где $a,b,c,d,e,f \in \mathbb{R}$ наз. линейным ДУ 2-го порядка в частных производных с пост. коэф.

2) Классификация ур-ий

$\Delta = ac - b^2$

Определение: Если $\Delta < 0$, то ур-ие наз. ур. гиперболического типа.

Определение: Если $\Delta > 0$, то ур. наз. ур-ием эллиптического типа.

3. Примеры ур-ий матем. физики

а) Волновое ур-ие

$$U''_{tt} = a^2 U''_{xx}$$

Это ур-ие описывает поперечные колебания струны и продольные колебания стержня.

$U''_{tt} - a^2 U''_{xx} = 0$

$a = 1,\ b = 0,\ c = -a^2$

$\Delta = ac - b^2 = 1(-a^2) - 0 = -a^2 < 0 \Rightarrow$ это ур. гиперболич. типа

б) $U'_t = a^2 U''_{xx}$ - ур. теплопроводности. Опис
процесс распределения тепла в стер

$a^2 U''_{xx} - U'_t = 0$; $a = 0$; $b = 0$; $c = a^2$

$\Delta = 0 \cdot a^2 - 0^2 = 0 \Rightarrow$ ур. параболич. типа

в) Ур-ие Лапласа

$U''_{xx} + U''_{yy} = f(x,y)$ - описывает процесс деформации мембраны (пластины)

$a = 1$, $b = 0$, $c = 1$

$\Delta = 1 \cdot 1 - 0^2 = 1 > 0 \Rightarrow$ это ур-ие эллиптич. типа

2. Метод Фурье для решения смешанной задачи для ур-ия теплопроводно

$U'_t = a^2 U''_{xx}$, $0 \le x \le l$, $t \ge 0$

$U(0,x) = \varphi(x)$ - начальное ур-ие

$U(t,0) = U(t,l) = 0$ - краевые ур-ия

Используем метод Фурье. Ищем реш в виде $U(x,t) = X(x) \cdot T(t)$

$$X(x) \cdot T'(t) = a^2 X''(x)\, T(t) \,/\, X(x)\, T(t)$$

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = a^2 \frac{X''(x)}{X(x)}$$

Левая часть зависит от t, правая ч зависит от x, значит и левая и части равны абсолютной констант

а) $X'' = -\frac{\lambda^2}{a^2} X$; $X'' + \left(\frac{\lambda}{a}\right)^2 X = 0$ - линейное ДУ 2-го пор с пост. коэф

$k^2 + \left(\frac{\lambda}{a}\right)^2 = 0$ - характеристич. ур-ие

$k^2 = -\left(\frac{\lambda}{a}\right)^2 \Rightarrow k_{1,2} = \pm \frac{\lambda}{a} i$

$X = c_1\cos\frac{\lambda}{a}x + c_2\sin\frac{\lambda}{a}x$

$u(t;0)=0 \Rightarrow x(0)=0 \Rightarrow 0=c_1 \Rightarrow x = c_2\sin\frac{\lambda}{a}x$

$u(t;l)=0 \Rightarrow x(l)=0 \Rightarrow 0=c_2\sin\frac{\lambda}{a}l \Rightarrow \sin\frac{\lambda}{a}l=0 \Rightarrow$

$\frac{\lambda}{a}l=\pi n$, $n=\cancel{0},1,2,\dots$ т.к. нулевые решения нам не нужны

$\lambda=\frac{\pi n a}{l}$

Определение: Числа $\lambda_n=\frac{\pi n a}{l}$, $n=1,2,\dots$ наз. собственными числами данной задачи.

Определение: Ф-ии $X_n=\sin\frac{\pi n x}{l}$, $n=1,2,\dots$ наз. собственными функциями данной задачи.

б) $T'=-\lambda^2 T$, $T'=-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 T$ - ДУ 1-ого порядка с разделенными переменными

$$\int\frac{dT}{T}=\int-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 dt;\quad \ln|T|=-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t + c$$

$$T=e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t+c};\quad T(t)=c\cdot e^{\left(-\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t}$$

в) Итак, $u(x,t)=c\cdot e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t}\sin\frac{\pi n x}{l}$. Все эти функции удовлетв. краевым услов., но мы должны получить решение удовлетв. также начальному услов. Для этого будем искать решение в виде линейной комбинации полученных решений, т.е. $V(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t}\sin\frac{\pi n x}{l}$

$V(x,0)=\varphi(x) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} c_n\sin\frac{\pi n x}{l}=\varphi(x)$

Разложим $\varphi(x)$ в ряд по синусам $\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n\sin\frac{\pi n x}{l}$, где $\varphi_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{\pi n x}{l}dx \Rightarrow c_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{\pi n x}{l}dx$

г) Решение найдено:

$$V(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{\pi n x}{l}dx\cdot e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t}\sin\frac{\pi n x}{l}$$

Замечание: если вместо $-\lambda^2$ взять λ^2, то решение $u(x,t)$ найти нельзя.

Док-во: $a^2X''=\lambda^2 X$

$$x'' - \left(\frac{\lambda}{a}\right)^2 = 0$$

$$k^2 - \left(\frac{\lambda}{a}\right)^2 = 0$$

$$k_1 = \pm \frac{\lambda}{a}$$

$$X(x) = C_1 e^{\frac{\lambda}{a}x} + C_2 e^{-\frac{\lambda}{a}x}$$

$$X(0) = 0 \Rightarrow 0 = C_1 + C_2$$
$$X(l) = 0 \Rightarrow 0 = C_1 e^{\frac{\lambda}{a}l} + C_2 e^{-\frac{\lambda}{a}l}$$

Получили однородную сист-му лин. ур.

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ e^{\frac{\lambda}{a}l} C_1 + e^{-\frac{\lambda}{a}l} C_2 = 0 \end{cases}$$

Ненулевое решение этой системы су
тогда и т.т., когда определитель сис
равен нулю, т.е.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\frac{\lambda}{a}l} & e^{-\frac{\lambda}{a}l} \end{vmatrix} = 0$$ (см. си

$$e^{-\frac{\lambda}{a}l} - e^{\frac{\lambda}{a}l} = 0$$

$$e^{-\frac{\lambda}{a}l} = e^{\frac{\lambda}{a}l} \quad \Big/ e^{-\frac{\lambda}{a}l}$$

$$1 = e^{\frac{2\lambda}{a}l} \Rightarrow \lambda = 0$$

$$x = C_1 + C_2, \text{ но } x(0) = 0 \Rightarrow x = 0$$