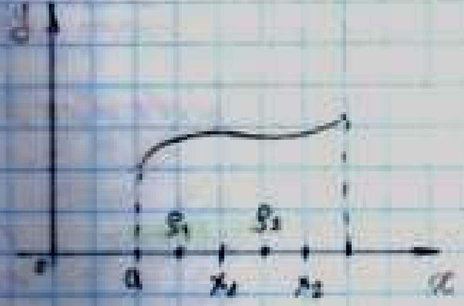
# Кратное интегрирование.
# Двойной интеграл.

## 1. Определение двойного интеграла

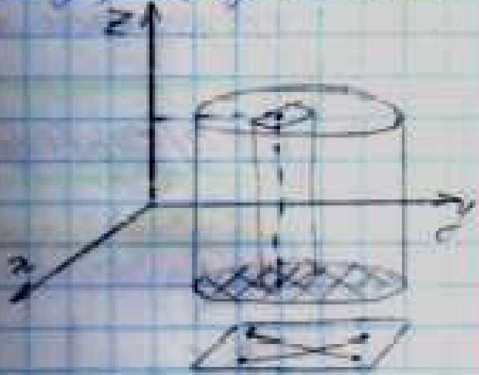
Напоминание

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda_n \to 0} I_n$$



$$I_n = \sum f(\xi_i)\,\Delta x_i$$

Пусть дана $D \subset O_{xy}$ и $z = f(x,y)$, определ. на $D$



Определение диаметра плитки будем наз. max из длин отрезков, лежащих в данной плитке.

Определение диаметра разбиения будем наз. max из диаметров всех плиток разбиения.

Определение:
Если для любой последов. разбиений такой, что диаметр этих разбиений стремится к нулю, существует предел интегральных сумм $\lim \sum f(M_i) S_i = I$, не зависящий от последов. разбиений, то этот предел $I$ наз. двойным интегралом от ф-ции $f(x,y)$ по области $D$.

## 2. Геометрический и физический смысл двойного интеграла

а) Геометрический смысл: $f(x,y) \geq 0$

Каждое слагаемое интегральной суммы представляет собой объем прямой призмы, ание которой явл. $\sigma_i$ ($i$-тая площадка), с высотой $f(M_i)$. Вся интегральная сумма почти равна объему части пространства, лежащей над областью $D$ под графиком ф-ции $z=f(x,y)$. При уменьшении диаметра разбиения точность равенства будет увелич., поэтому

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = V$$

б) Физический смысл $\quad f(x,y)=\rho(x,y)$ – плотность пластины $D$

В этом случае каждое слагаемое интегральной суммы представляет собой почти массу $i$-той площадки.

$$\boxed{\iint_D \rho(x,y)\,dx\,dy = M_D}$$ – масса всей пластины $D$

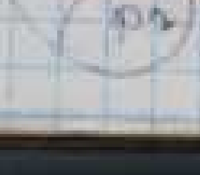

## 3. Св-ва двойного интеграла

а) Линейность

$$\iint_D \left(\alpha f(x,y)\,dx\,dy + \beta g(x,y)\,dx\,dy\right) = \alpha\iint_D f(x,y)\,dx\,dy + \beta\iint_D g(x,y)\,dx\,dy$$

б) Аддитивность

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D_1} f(x,y)\,dx\,dy + \iint_{D_2} f(x,y)\,dx\,dy$$




$D = D_1 \cup D_2,\ D_1 \cap D_2 = \varnothing$

в) $f(x,y) \le g(x,y) \Rightarrow \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy \le \iint\limits_D g(x,y)\,dxdy$

г) $m \le f(x,y) \le M \rightarrow m\cdot S_D \le \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy \le M\cdot S_D$

д) $\iint\limits_D 1\,dxdy = S_D$

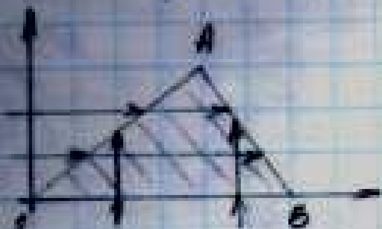
е) Теорема о среднем: если $f(x,y)$ - непрерывна на $D$, то

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = f(M_0)S, \text{ где } M_0 \in D$$

Рассмотрим способы вычисления двойного интеграла

## 4. Характеристики плоской обл.

Определение. Нижней (верхней) границей будем называть линию! входа (выхода) вертикальной прямой в область $D$.




Пример.

НГ. ОБ - нижн. гр.
ВГ. ОАБ - верхн. гр.

Левой (правой) гран. будем наз линию входа (выхода) горизонт. прямой в обл. $D$

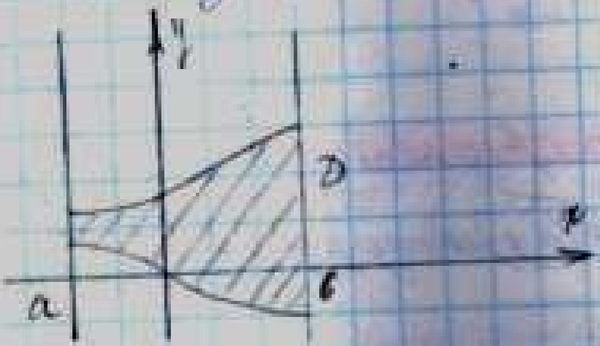
ЛГ. ОА - левая гр.
ПГ. АБ - правая гр.

Граница наз. простой если она задаётся одним уравнением, в противном случае гран. будем наз. сложной или составной.

НГ, ЛГ, ПГ - простая
ВГ - сложная

## 5. Первый способ вычисления двойного интеграла („снизу - вверх")

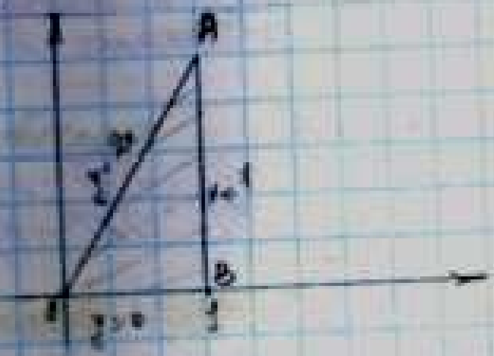
**Теорема** (без док-ва): Пусть область $D$ задается: $a \le x \le b$ и простыми нижней и верхней границей $y = \varphi_1(x)$ и $y = \varphi_2(x)$, тогда




Комментарий: В вышеприведенной ф-ле вычисляется сначала внутренний интеграл, который в общем будет зависеть от x, затем полученная функция подставляется в внешний интеграл и вычисляется, в итоге число ответ.

Пример: $\iint_D (x+y)\,dx\,dy =$

$D: \begin{cases} y = 2x \\ y = 0 \\ x = 1 \end{cases}$




| № | Границы | |
|---|---|---|
| 1 | фиксируем | $0 \le x \le 1$ |
| | Н.г. | $y = 0$ |
| | В.г. | $y = 2x$ |
| | фиксируем | $0 \le y \le 2$ |
| | Л.г. | $x = y/2$ |
| | П.г. | $x = 1$ |

$$= \int_0^1 dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy$$

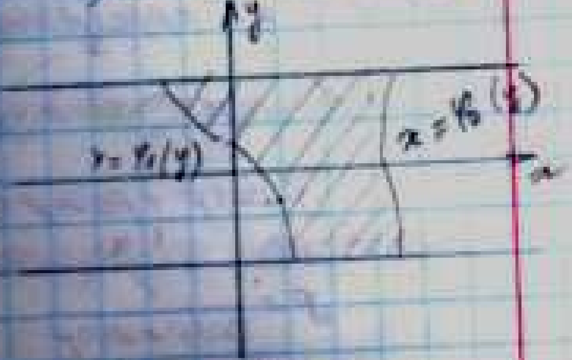
$$1)\ \int_0^{2x} (x+y)\,dy = \int_0^{2x} x\,dy + \int_0^{2x} y\,dy = x\int_0^{2x} dy + \frac{y^2}{2}\Big|_0^{2x} =$$

$$= xy\Big|_0^{2x} + \frac{y^2}{2}\Big|_0^{2x} = 2x^2 - 0 + \frac{4x^2}{2} - 0 = 4x^2$$

б) $\int_0^1 4x^2 dx = \frac{4x^3}{3}\Big|_0^1 = 4/3$

## 6. Второй способ вычисления двойного интеграла („слева-направо")

Теорема (б/у док-ва) Пусть область D задаётся $c \le y \le d$ и ограничена левой и правой границами $x = \psi_1(y)$ и $x = \psi_2(y)$




Тогда $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy =$
$$= \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx$$

Продолжение предыдущего примера:

$$\iint_D (x+y)\,dx\,dy = \int_0^2 dy \int_{y/2}^1 (x+y)\,dx$$

а) $\int_{y/2}^1 (x+y)\,dx = \int_{y/2}^1 x\,dx + \int_{y/2}^1 y\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_{y/2}^1 + yx\Big|_{y/2}^1 =$

$$= \frac{1}{2} - \frac{y^2}{8} + y - \frac{y^2}{2} = y + \frac{1}{2} - \frac{5y^2}{8}$$

$$\int_0^2 \left(y + \frac{1}{2} - \frac{5y^2}{8}\right) dy = \left(\frac{y^2}{2} + \frac{y}{2} - \frac{5y^3}{24}\right)\Big|_0^2 = 2 + 1 - \frac{5}{3} = 3 - \frac{5}{3} = 4/3$$

## 7. Полярная система координат


ρ – полярный радиус (расст. от т. O
φ – полярный угол (угол, на который нужно повернуть ось OX до совмещения с OM)

**Связь между декартовыми и полярными координатами:**

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases}$$

Справедлива ф-ла: $x^2+y^2=\rho^2$

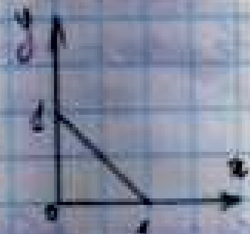
Док-во: $(\rho\cos\varphi)^2+(\rho\sin\varphi)^2=\rho^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)=\rho^2$

Иногда необходимо записать ур-ия данных линий в полярной системе координат

Пример: 1) $x+y=1$ – прямая

$\rho\cos\varphi+\rho\sin\varphi=1$

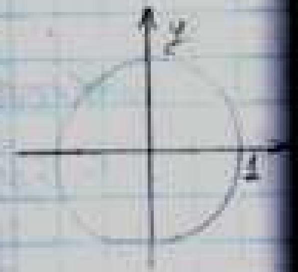
$\rho=\dfrac{1}{\cos\varphi+\sin\varphi}$




2) $y^2+x^2=1$ – окр.

$\rho^2=1$

$\rho=1$

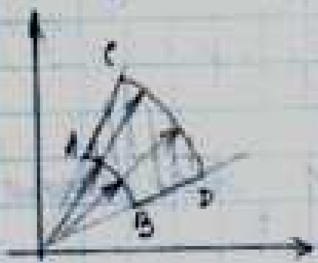



## 3. 3-ий способ вычисления двойного интеграла («от центра»)

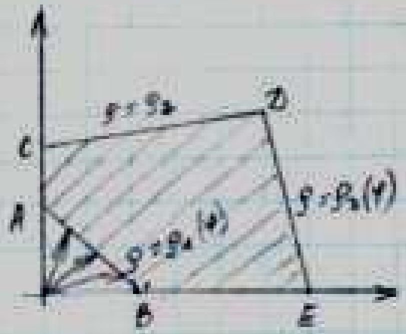
Центральной (периферийной) границей области будем называть линию входа (выхода) лучей идущих от центра

AB – центральная гран.

CE – периферийная гран.




Граница наз. простой, если она задаётся одним ур. вида $\rho=\rho(\varphi)$, в противном случае – сложная




ЦГ: ABP $\rho=\rho_1(\varphi)$ - простая

ВГ: CDE $\rho=\rho_2(\varphi)$ - сложная

$\rho=\rho_2(\varphi)$


**Теорема:** Пусть для обл. $D$ $\varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2$ и $D$ имеет простую центральную и периферийную границы. $\rho=\rho_1(\varphi)$ и $\rho=\rho_2(\varphi)$

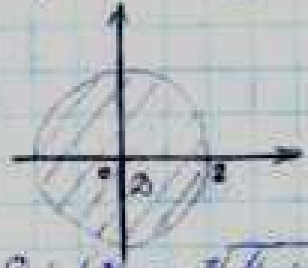
Тогда

$$\iint f(x,y)\,dxdy = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\rho_1}^{\rho_2} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\rho\, d\rho$$

где $\rho$ - якобиан перехода к полярной системе координат.

Примеры обл., для котор. использ. данный метод.

1)

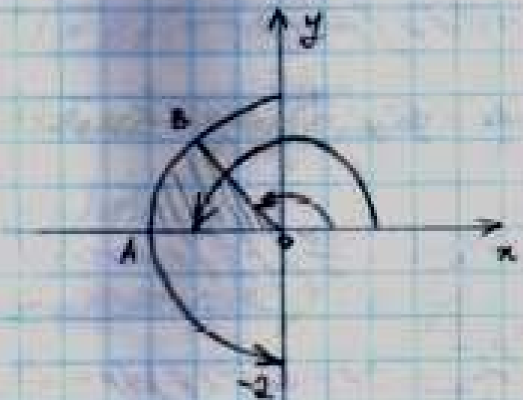



$0 \le \varphi \le 2\pi$

ЦГ: т. O $\rho=0$

ВГ: окр-ть рад. 2 $\rho=2$

2) $D: \begin{cases} x = -\sqrt{4-y^2} \Rightarrow x^2=4-y^2;\ x^2+y^2=2^2 \\ y=0 \\ y=-x \end{cases}$

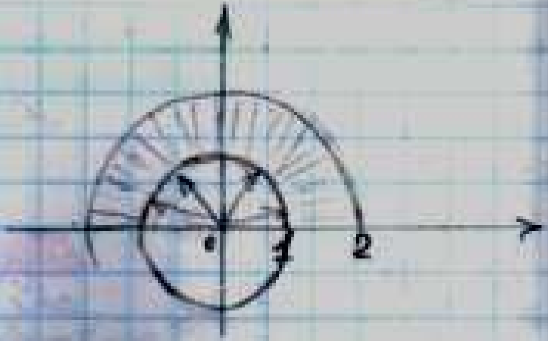



$\frac{3\pi}{4} \le \varphi \le \pi$

ЦГ: $\rho=0$

ВГ: $\rho=2$

5) $D:\ \begin{cases} x^2+y^2=4 \\ x^2+y^2=1 \\ y\geq 0 \end{cases}$




$0\leq\varphi\leq\pi$

$\mathcal{L}_1:\ \rho=1$

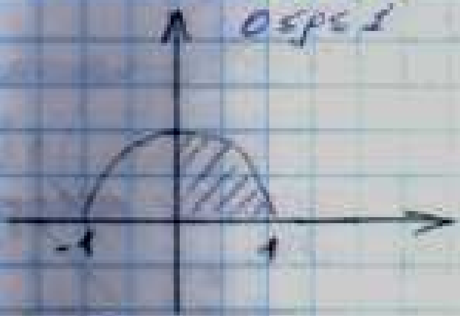
$\mathcal{L}_2:\ \rho=2$

## Примеры вычисления интегралов.

1) $$\iint\frac{dx\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}=\int_0^{\pi/2}d\varphi\int_0^1\frac{1}{\rho}\rho\,d\rho=\int_0^{\pi/2}d\varphi=\frac{\pi}{2}$$

$0\leq\varphi\leq\pi/2$

$0\leq\rho\leq 1$

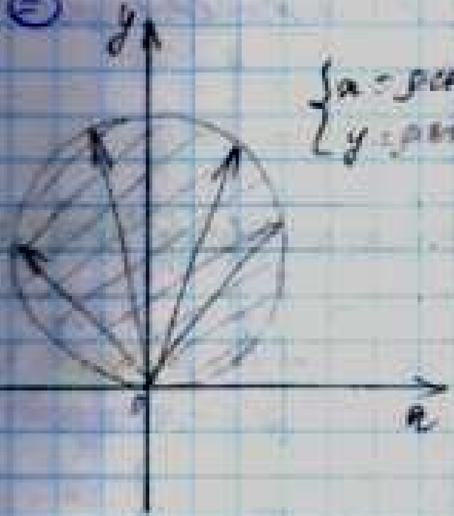



$D:\ \begin{cases} y=\sqrt{1-x^2} \\ x=0 \\ y=0 \end{cases}$

$$\boxed{x^2+y^2=\rho^2}$$

2) $$\iint y\,dx\,dy=\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^{4\sin\varphi}\rho\sin\varphi\,\rho\,d\rho =$$

$\begin{cases} x=\rho\cos\varphi \\ y=\rho\sin\varphi \end{cases}$




$D:\ x^2+y^2=4y$

$x^2+y^2-4y=0$

$x^2+\underbrace{y^2-4y+4}-4=0$

$x^2+(y-2)^2=4$

$$=\int_0^{\pi}\sin\varphi\,d\varphi\int_0^{4\sin\varphi}\rho^2\,d\rho$$

а) $\int_0^{4\sin\varphi}\rho^2\,d\rho=\frac{\rho^3}{3}\Big|_0^{4\sin\varphi}=\frac{64\sin^3\varphi}{3}$

б) $\frac{64}{3}\int_0^{\pi}\sin^4\varphi\,d\varphi=\frac{64}{3}\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{2}(1-\cos 2\varphi)\right)^2=\frac{16}{3}\int_0^{\pi}(1-\cos 2\varphi)^2\,d\varphi=$

$=\frac{16}{3}\int_0^{\pi}(1-2\cos 2\varphi+\cos^2 2\varphi)\,d\varphi=\frac{16}{3}\int_0^{\pi}(1-\cos 2\varphi)^2\,d\varphi=\frac{16}{3}\int_0^{\pi}(1-$

$-2\cos 2\varphi+\cos^2 2\varphi)\,d\varphi=\frac{16}{3}\int_0^{\pi}\left(1-2\cos 2\varphi+\frac{1}{2}(1+\cos 4\varphi)\right)d\varphi=$

$$= \frac{16}{5}\int_0^{2\pi}\left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2}\cos 4\varphi\right)d\varphi = \frac{8}{5}\int_0^{2\pi}(1-\cos 4\varphi)\,d\varphi = 8\left(\varphi - \frac{\sin 4\varphi}{4}\right)\Big|_0^{2\pi} = 8\pi$$

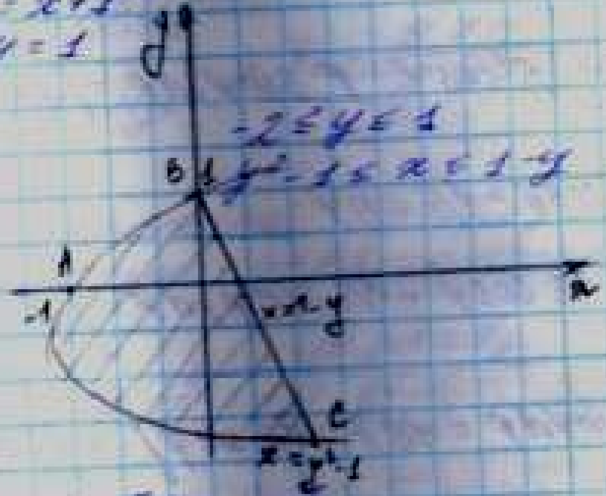
# Приложение двойного интеграла

## 1. Вычисление площадей плоских фигур

$S_D = \iint\limits_D 1\,dx\,dy$ (вытекает из св-ва двойного интеграла)

Пример: Вычислить площадь, ограниченную линиями $\begin{cases} y^2 = x+1 \\ x+y = 1 \end{cases}$

$C: \begin{cases} y^2 = x+1 \\ x+y = 1 \\ 1 = x+y \end{cases}$




$y^2 - 1 = 1 - y$

$y^2 + y - 2 = 0$

$y_{1,2} = -2, 1$

$x_{1,2} = 3, 0$

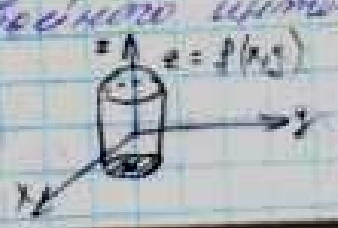
$$S_{ABC} = \iint\limits_{ABC} 1\,dx\,dy = \int_{-2}^{1} dy \int_{y^2-1}^{1-y} dx = \int_{-2}^{1} dy\,(1-y-y^2+1) = \left(2y - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right)\Big|_{-2}^{1}$$

$$= 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \left(-4 - 2 + \frac{8}{3}\right) = 4{,}5$$

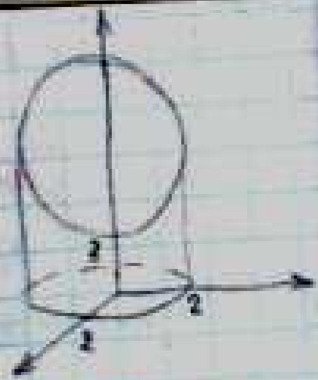
## 2. Вычисление объёма криволин. цилиндр.

$$V_{кр.ц.} = \iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$$

(вытекает из геом. смысла двойного интеграла)



Пример: $\Omega$ $x^2+y^2=4$
$z=0$
$z+x+y=4$



$$\frac{x}{4}+\frac{y}{4}+\frac{z}{4}=1$$

$\Omega$ лежит над кругом рад 2, в $Oxy$ над графиком ф-ции
$z=4-x-y$

$$\Rightarrow V=\iint\limits_{D_{xy}:\ \text{рад } 2}(4-x-y)\,dx\,dy=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^2(4-\rho\cos\varphi-\rho\sin\varphi)\rho\,d\rho$$

а) $\int_0^2(4\rho-\rho^2\cos\varphi-\rho^2\sin\varphi)\,d\rho=\left(2\rho^2-\frac{\cos\varphi}{3}\rho^3-\frac{\sin\varphi}{3}\rho^3\right)\Big|_0^2$

$=8-8/3\cos\varphi-8/3\sin\varphi$

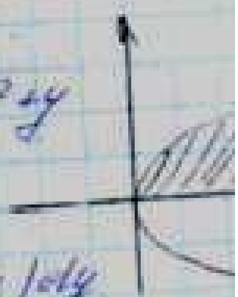
б) $\int_0^{2\pi}(8-8/3\cos\varphi-8/3\sin\varphi)\,d\varphi=\int_0^{2\pi}8\,d\varphi-\int_0^{2\pi}8/3\cos\varphi\,d\varphi$

$-\int_0^{2\pi}8/3\sin\varphi\,d\varphi=16\pi-8/3\sin\varphi\Big|_0^{2\pi}+8/3\cos\varphi\Big|_0^{2\pi}=16\pi$

3. Масса плоской пластина с плотнос
$\rho=\rho(x,y)$

$M_D=\iint\limits_D\rho(x,y)\,dx\,dy$ — следует из физич
из двойного инт
са

Пример 2. $\begin{cases}x=1\\ y=0\\ y^2=4x\ (y\geq 0)\end{cases}$ $\rho=7x^2+y$



$$M_D=\iint\limits_D(7x^2+y)\,dx\,dy=\int_0^1dx\int_0^{2\sqrt{x}}(7x^2+y)\,dy$$

а) $\int_0^{2\sqrt{x}} (7x^2+y)\,dy = \left(7x^2 y + \frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^{2\sqrt{x}} = 14x^2\sqrt{x} + 2x$

б) $\int_0^1 (14x^{5/2} + 2x)\,dx = \left(\frac{14x^{7/2}}{7/2} + x^2\right)\Big|_0^1 = 4+1=5$

## 4. Координаты центра тяжести плоской пластины

$M_c(x_c, y_c)$ – центр тяж. с плотностью $\rho = \rho(x,y)$

$$x_c = \frac{\iint\limits_D x\rho(x,y)\,dx\,dy}{\iint\limits_D \rho(x,y)\,dx\,dy}; \quad y_c = \frac{\iint\limits_D y\rho(x,y)\,dx\,dy}{\iint\limits_D \rho(x,y)\,dx\,dy}$$

Замеч. если пластина однородна $\rho = const$, то ф-лы упрощаются

$$x_c = \frac{\iint\limits_D x\,dx\,dy}{\iint\limits_D dx\,dy} \qquad y_c = \frac{\iint\limits_D y\,dx\,dy}{\iint\limits_D dx\,dy}$$

Пример. Вычислить центр тяж. для однор. пластины

$$D: \begin{cases} y^2 = x \\ x^2 = y \end{cases}$$

D симметр. относит. прямой $y = x$. Поэтому достаточно найти 1 коорд., т.к. $y_c = x_c$

$$\iint\limits_D dx\,dy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} dy = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)\,dx = \left(\frac{x^{3/2}}{3/2} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 =$$

$= 2/3 - 1/3 = 1/3$

$$\iint_D x\,dx\,dy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} x\,dy = \int_0^1 x(\sqrt{x} - x^2)\,dx = \int_0^1 (x^{3/2} - \ldots$$

$$= \left(\frac{x^{5/2}}{5/2} - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^1 = 2/5 - 1/4 = \frac{3}{20}$$

$$x_c = \frac{\frac{3}{20}}{\frac{1}{3}} = \frac{9}{20} \qquad y_c = \frac{9}{20}$$

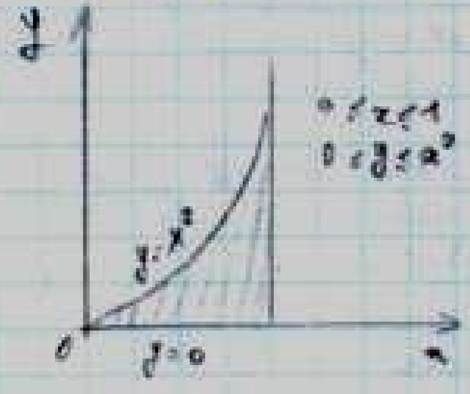
$$M_c\,(9/20\,;\,9/20)$$

5. Вычисление моментов инерции пло... пластины $D$ с плотностью $\rho = \rho(x, y)$

$$I_x = \iint_D y^2 \rho\,dx\,dy \qquad I_y = \iint_D x^2 \rho\,dx\,dy$$

$$I_0 = \iint_D (x^2 + y^2)\,\rho\,dx\,dy$$

Пример: вычислить $I_0$ для $D \begin{cases} y = x^2 \\ y = 0 \\ x = 1 \\ \rho = 5 \end{cases}$




$0 \le x \le 1$
$0 \le y \le x^2$

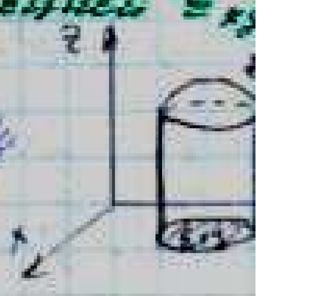
$$I_0 = \int_0^1 dx \int_0^{x^2} (x^2 + y^2)\,5\,dy =$$

$$= 5\int_0^1 dx \left(x^2 y + \frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^{x^2} = 5\int_0^1 (x^4 \ldots$$

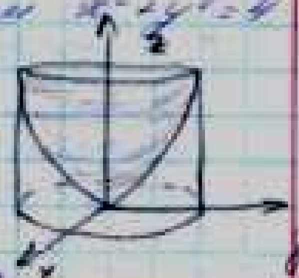
$$= 5\left(\frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{21}\right)\Big|_0^1 = 5\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{21} \ldots\right.$$

6. Вычисление площади пов-ти $\Sigma$, заданной ур-ем $z = \varphi(x, y)$, с проекцией $\Sigma_{xy}$ на пл-ть $Oxy$

$$S_\Sigma = \iint_{\Sigma_{xy}} \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\,dx\,dy$$



Пример: вычислить площадь пов-ти $z = x^2+y^2$, отсекаемой цилиндром $x^2+y^2=4$



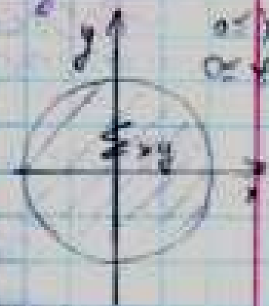

$\Sigma_{xy}$ — круг рад 2

$z = x^2+y^2$ — ур-е пов-ти

$z'_x = 2x \quad z'_y = 2y$

$$S_\Sigma = \iint_{\Sigma_{xy}} \sqrt{1+(2x)^2+(2y)^2}\,dxdy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \sqrt{1+4\rho^2}\,\rho\,d\rho =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\int_0^{2\pi} d\varphi \int \sqrt{1+4\rho^2}\,d(4\rho^2+1) = \frac{1}{8}\int_0^{2\pi} d\varphi\, \frac{(1+4\rho^2)^{3/2}}{3/2}\Big|_0^2 =$$




$0\le\varphi\le 2\pi$
$0\le\rho\le 2$

$$= \frac{1}{12}\int_0^{2\pi} d\varphi\,(17\sqrt{17}-1) = \frac{\pi}{6}(17\sqrt{17}-1)$$

# Тройной интеграл

## 1. Определение, св-ва


а) Задано $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, $u = f(x,y,z)$

б) Разбиение $\Omega$ на n малых параллелепипедов $T_i$
$M_i \in T_i$

в) $I_n = \sum f(M_i)\,V_{T_i}$ — интегральная сумма

г) $\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dxdydz = \lim_{d_n\to 0} I_n$

д) Если $f(x,y,z)\equiv 1$, то $\iiint_\Omega dxdydz = V_\Omega$ (геом. смысл)

е) Если $f(x,y,z) = \rho(x,y,z)$ — плотность $\Omega$, то
$\iiint_\Omega \rho\,dxdydz = M_\Omega$ (физ. смысл)

ж) Св-ва тройного интеграла такие же, как и у двойного интеграла

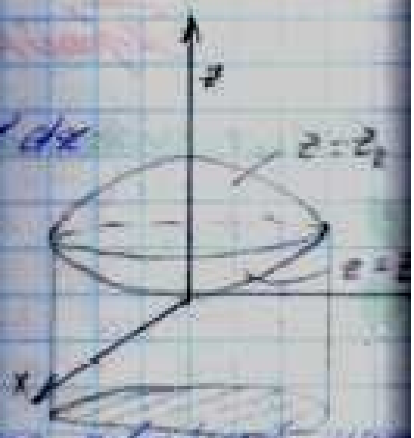
## 2. Основной способ вычисления тройного интеграла

Определение: Нижней (верхней) границей области $\Omega$ будем наз. пов-ть (входа/выхода) вертик. лучей в нашу область

Определение: Граница наз. простой, если она задается одним ур-ием $z=f(x,y)$

Теорема: Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ имеет простые нижнюю и верхнюю границы, $z=z_1(x,y)$ и $z=z_2(x,y)$. Пусть $\Omega$ проектир. на пл-ть $Oxy$ в область $\Omega_{xy}$. Тогда

$$\iiint f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=\iint\limits_{\Omega_{xy}} dx\,dy\int_{z_1}^{z_2} f\,dz$$




### Комментарий

1. Суть ф-лы сост. в том, что тройной интеграл сводится к одному двойному и одному однократному интегралу, решение которого не представит для нас сложностей.

2. Вычисление происходит справа налево, как в случае двойного интеграла

### Замечание

Область $\Omega_{xy}$ и пределы интегрир. $z_1$ и $z_2$ можно находить геометрически, построив пространств. был (самый верный способ отыскания параметров, но и самый трудоемкий), поэтому в решениях ниже следующ. задач будет предложен метод отыскания $\Omega_{xy}, z_1, z_2$ не требующ. построения пространств. фигуры, но предназначенный для достаточно простых задач в тройных интегралах.

Пример 1

$$\iiint 1\,dxdydz = \iint_{\Omega_{xy}} dxdy \int_{z_1}^{z_2} dz =$$

$$\Omega: \begin{cases} x+2y-z=4 \\ z=0 \\ x=0 \\ y=0 \end{cases}$$

Выписываем ур-ния из $\Omega_{xy}$ $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ данных, не содерж. $z$.
И пытаемся построить $x+2y=4$ $\left(\frac{x}{4}+\frac{y}{2}=1\right)$ плоскую обл., ограничен. выписанными линиями. В случае непонимания плоской обл., привлекаем на помощь ур-ия содержащие $z$ и исключаем из них $z$.


Получаем $z_1, z_2$
Выписываем 2-а ур-ия из данных, содерж. $z$ и в них выражаем $z$

$$z_1, z_2 \begin{cases} z = x+2y-4 \\ z=0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} 0 \le y \le 2 \\ 0 \le x \le 4-2y \end{matrix}$$

Одно из этих ур-ний будет задавать НГ, др. ВГ. Подставим пробную точку из $\Omega_{xy}$ — будет задав. ВГ, другая НГ

$x+2y-4<0$ для тчк из $\Omega_{xy}$
(подставляем напр. близкой к 0)

$$\Rightarrow \; z_1 = x + 2y - 4$$
$$z_2 = 0$$

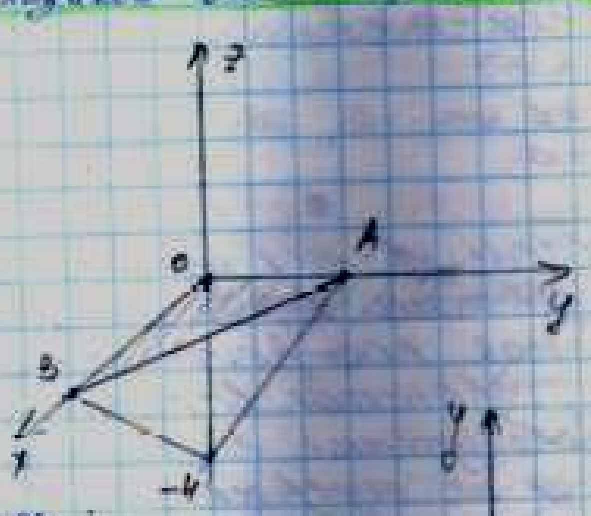
$$= \int_0^2 dy \int_0^{4-2y} dx \int_{x+2y-4}^{0} dz = \int_0^2 dy \int_0^{4-2y} dx\,(4 - x - 2y) =$$

$$= \int_0^2 dy \left(4x - \frac{x^2}{2} - 2xy\right)\Big|_0^{4-2y} = \int_0^2 \left[4(4-2y) - \frac{(4-2y)^2}{2} - 2(4-2y)y\right] dy$$

$$= \int_0^2 (16 - 8y - 8 + 8y - 2y^2 - 8y + 4y^2)\,dy = \int_0^2 (2y^2 - 8y + 8)\,dy$$

$$= \left(\frac{2y^3}{3} - 4y^2 + 8y\right)\Big|_0^2 = \frac{16}{3} - 16 + 16 = \frac{16}{3}$$

Подтверждение геометрически

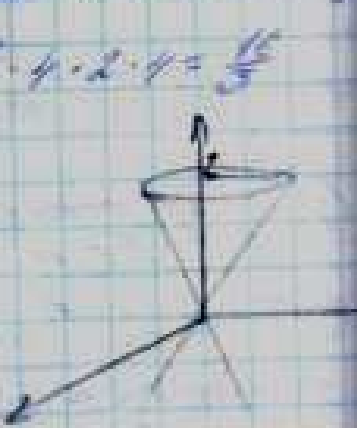




$\Omega_{xy} = \triangle OAB$
$\pi_1: z = x + 2y - 4$
$\pi_2: z = 0$

По школьной формуле объем пирамиды равен

$$\frac{1}{3} S_{осн} H = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} OB \cdot OA \cdot OC = \frac{1}{6} \cdot 4 \cdot 2 \cdot 4 = \frac{16}{3}$$




Пример 2: $\iiint z\,dx\,dy\,dz =$

$$\Omega: \begin{cases} z^2 = x^2 + y^2 \\ z = 2 \end{cases}$$

$= \iint_{D_{xy}} dxdy \int_{z_1}^{z_2} z\,dz =$

$D_{xy}: z^2 = x^2+y^2$

$z_1, z_2: \begin{cases} z=\sqrt{x^2+y^2} \\ z=2 \end{cases}$

$\sqrt{x^2+y^2} < 2$ для т. из $\Omega$ $\qquad 0 \le \varphi \le 2\pi$

$\Rightarrow z_1 = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{\rho^2} = \rho \qquad 0 \le \rho \le 2$

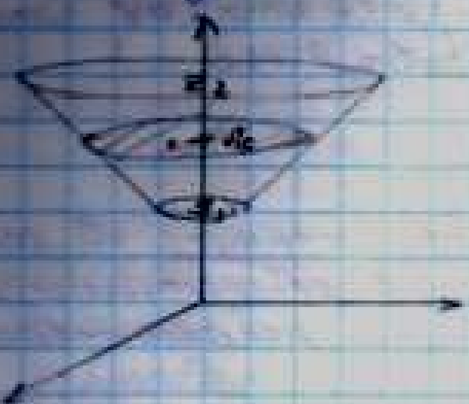
$z_2 = 2$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \rho\,d\rho \int_\rho^2 z\,dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \rho\,d\rho \frac{z^2}{2}\Big|_\rho^2 = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \rho\,d\rho \left(2 - \frac{\rho^2}{2}\right) =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \left(\rho^2 - \frac{\rho^4}{8}\right)\Big|_0^2 = (4-2)\int_0^{2\pi} d\varphi = 4\pi.$$

## 3. Второй метод выч. тройного интеграла.

**Теорема:** Пусть для $\Omega$ $z_1 \le z \le z_2$. Пусть $z=c$, получается плоская обл. $D_c$.

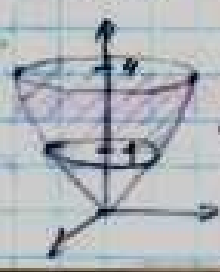



Тогда

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz = \int_{z_1}^{z_2} dz \iint_{D_z} f(x,y,z)\,dxdy$$

Пример. Вычислить объем $z = x^2+y^2$, отсекаемый $z=1$ и $z=4$.

$$V = \iiint_{\Omega} 1\,dxdydz = \int_1^4 dz \iint_{x^2+y^2 \le z} dxdy =$$



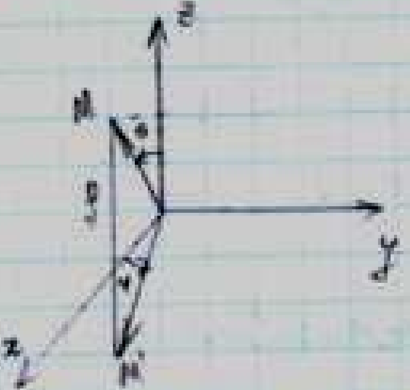

$1 \le z \le 4$

$$\iint\limits_{\Omega_z} dx\,dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{z}} \rho\, d\rho = \int_0^{2\pi} d\varphi\, \frac{\rho^2}{2}\Big|_0^{\sqrt{z}} = \frac{z}{2}\cdot 2\pi = \pi z$$

$0 \le \varphi \le 2\pi$
$0 \le \rho \le \sqrt{z}$


$$\circledcirc \int_1^4 \pi z\, dz = \pi \frac{z^2}{2}\Big|_1^4 = \frac{\pi}{2}(16-1) = \frac{15\pi}{2}$$

## 3. Сферические координаты




$\rho$ – сферич. радиус
$\rho = OM$
$\theta$ – сферич. долгота
$\theta = \widehat{OM, Oz}$
$\varphi$ – сферич. широта
$\varphi = \widehat{OM', Ox}$
$M'$ – проекция $M$ на $Oxy$

Опред.: $(\varphi; \theta; \rho)$ – сферич. коорд.

$$\begin{cases} x = \rho \sin\theta \cos\varphi \\ y = \rho \sin\theta \sin\varphi \\ z = \rho \cos\theta \end{cases}$$

$$\boxed{x^2 + y^2 + z = \rho^2}$$

$$\boxed{x^2 + y^2 = \rho^2 \sin^2\theta}$$

Замечание: В основном мы будем иметь дело с областями, которые описываются тремя неравенствами

$\varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2$
$\theta_1 \le \theta \le \theta_2$
$\rho_1 \le \rho \le \rho_2$, где $\varphi_1, \varphi_2, \theta_1, \theta_2, \rho_1, \rho_2 = con$

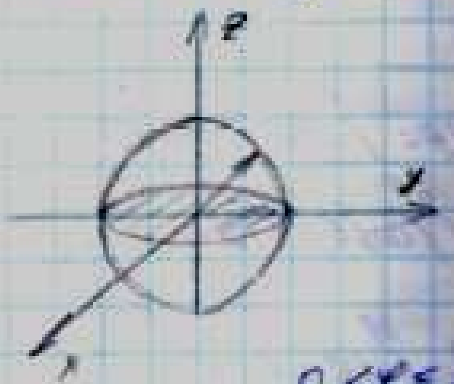
Теорема: Пусть $\Omega: \{\varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2;\ \theta_1 \le \theta \le \theta_2;\ \rho_1 \le \rho \le \rho_2$
Тогда $\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz =$

$$= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \int_{\rho_1}^{\rho_2} f(\rho\sin\theta\cos\varphi, \rho\sin\theta\sin\varphi, \rho\cos\theta)\, \underbrace{\rho^2\sin\theta}_{\text{якобиан перехода к сферич. сис-ме коорд.}}\, d\rho$$

ПРИМЕР 1

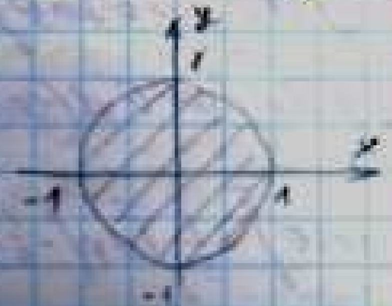
$$\iiint (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz =$$

$$\Omega: x^2+y^2+z^2=1$$




$0 \le \varphi \le 2\pi$

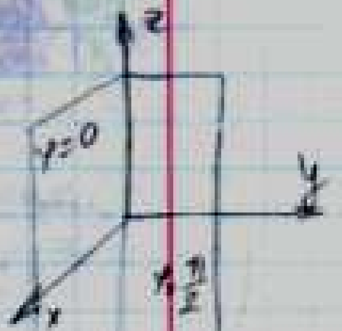
Проекция шара на пл-сть Oxy:




Правило 1. Для того чтобы определить диапазон изменения угла $\varphi$ нужно найти проекцию на плоскость Oxy, затем определить диапазон изменения полярного угла $\varphi$ для полученной проекции.

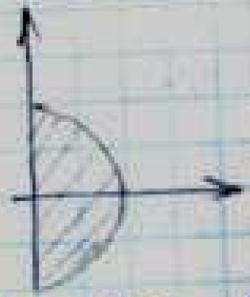
Тогда рассмотрим пол-ть $\varphi = const$

Это полуплоскость, граница которой совпадает с Oz.




Правило 2. Для опред. диапазона изменения угла $\theta$ необход. сделать сечение данного тела полуплоскостью $\varphi = const$ и определить (обычно удобно сечение $\varphi = \pi/2$) диапазон изменения угла $\theta$ для точек этого сечения.

В нашем случае сечением полуплоскости будет полукруг



$0 \le \theta \le \pi$

Правило 5. Для опред. диапазона изменения φ ... радиуса r, исходящие проводятся луч, выходящ... из начала координат и на этом ... и определить min и max значения сферич. радиуса.

$0 \le r \le 1$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta \int_0^1 r^2 \sin^2\theta\, r^2 dr = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin^3\theta\, d\theta \frac{r^5}{5} \ldots$$

$$= \frac{1}{5}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin^2\theta\, d(\cos\theta) = \frac{1}{5}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} (\cos^2\theta - 1)\, d\cos\theta = \frac{1}{5}\int_0^{2\pi} d\varphi \ldots$$

$$- \cos\theta \Big|_0^{\pi} = \frac{1}{5}\int_0^{2\pi} d\varphi\left(-\frac{1}{3}+1-\frac{1}{3}+1\right) = \frac{4}{15}\int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{4}{15}\cdot 2\pi = \frac{8\pi}{15}$$

## 2. Приложения тройного интеграла

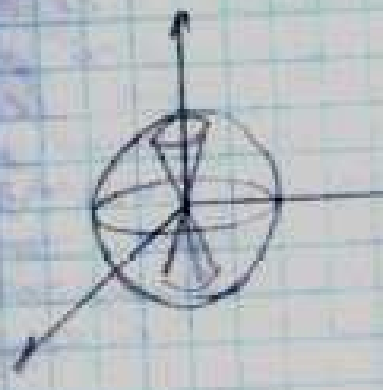
Приложения

а) объём тела $V_\Omega$: $V_\Omega = \iiint dxdydz$

б) масса тела $\Omega$ с заданной плотностью $\rho$

в) центр тяжести $M_c(x_c, y_c, z_c)$

$$x_c = \frac{\iiint_\Omega x\rho\, dxdydz}{\iiint_\Omega \rho\, dxdydz}, \quad y_c = \frac{\iiint_\Omega y\rho\, dxdydz}{\iiint_\Omega \rho\, dxdydz}, \ldots$$



г) моменты инерции

$$I_x = \iiint_\Omega (y^2+z^2)\rho\, dxdydz$$

$$I_y = \iiint_\Omega (x^2+z^2)\rho\, dxdydz$$

...

**Пример:** Вычислить объём тела, ограниченного поверхностями

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=4 \\ z=-\sqrt{x^2+y^2} \\ x=0 \quad (x>0) \\ y=0 \quad (y>0) \end{cases}$$

$$z^2=x^2+y^2$$

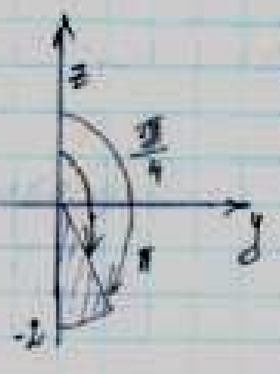

Проекцией $\Omega$ на $Oxy$ явл. четверть круга

$0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$

Сделаем сечение $\varphi = \frac{\pi}{2}$

$\frac{3\pi}{4} \le \theta \le \pi$

$0 \le \rho \le 2$




$$\frac{V}{2} = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_{3\pi/4}^{\pi} \sin\theta \, d\theta \int_0^2 \rho^2 d\rho = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_{3\pi/4}^{\pi} \sin\theta \, d\theta \, \frac{\rho^3}{3}\Big|_0^2 =$$

$$= \frac{8}{3}\int_0^{\pi/2} d\varphi \left(-\cos\theta\right)\Big|_{3\pi/4}^{\pi} = \frac{8}{3}\int_0^{\pi/2} d\varphi \left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{8}{3}\cdot\frac{2-\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{2}{3}\left(2-\sqrt{2}\right)\pi$$

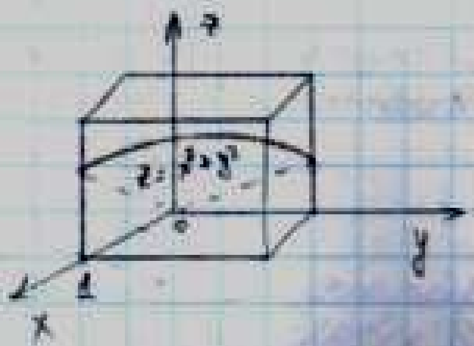
## 3. Метод Монте-Карло как приближенный метод вычисления двойного интеграла

$$\iint\limits_D (x^2+y^2)\,dx\,dy = \frac{m}{n} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

$D: \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1 \end{cases}$

$n$ - общее число точек $M_1, M_2, \ldots$
$m$ - число точек котор. будут вс-полняться нер-ва $\le$

В нашем случае подинтегральная ф-ция должна быть неотрицательна.




Поместим наше тело в прямоугольный параллелепипед с высотой равной 1.
Получим n-псевдослучайных чисел в этом прямоуг. параллелепипеде: $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$

$x_1 = 0,15$ $\quad$ $x_2 = 0,502$
$y_1 = 0,885$ $\quad$ $y_2 = 0,851$
$z_1 = 1,276$ $\quad$ $z_2 = 1,914$
$x_1^2 + y_1^2 = 0,806 < z_1$
$x_2^2 + y_2^2 = 0,6758 < z_2$

## Криволинейный интеграл I рода

### 1. Определение

а) Дано:

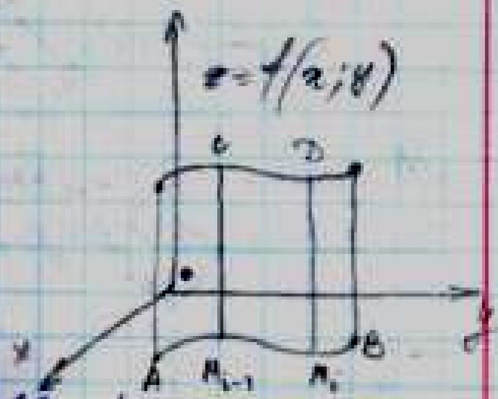
$f(x,y)$ - определена на $\gamma$


б) Разбиение кривой: уч-ки кривой $M_0M_1$, $M_1M_2$ и внутренние точки $N_1, N_2, N_3$...

в) Диаметр разбиения: наибольший из длин участков разбиений.

г) Интегральная сумма: $I_n = \sum f(N_i) l_{M_{i-1}M_i}$
где $l_{M_{i-1}M_i}$ - длина уч-ка $M_{i-1}M_i$

д) Геометрич. смысл интегральной суммы $I_n$.




Каждое слагаемое интегральной суммы почти равно площади уч-ка „флага", соот-его $M_{i-1}M_i$. Сама же интегральная сумма почти равна площади „флага".

е) Физический смысл. Пусть $f(x;y)$ - плотность „проволоки" $\gamma$, тогда $I_n \approx$ массе проволоки.

ж) Криволинейный интеграл I рода

$$\int_\gamma f(x;y)\,dl = \lim_{d\to 0} I_n$$

## 2. Способы вычисления криволинейного интеграла I рода

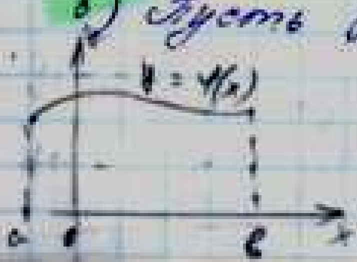
а) Основной способ

$$\gamma: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \qquad t_1 \le t \le t_2$$

$$\int_\gamma f(x;y)\,dl = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t), y(t))\sqrt{(x')^2 + (y')^2}\,dt$$

Замечание: Эта ф-ла будет действовать и для криволинейного интеграла по пространственной кривой $\gamma$

б) Пусть $\gamma$ - часть графика $y = \varphi(x)$
$x_1 \le x \le x_2$




В этом случае кривую $\gamma$ можно параметризовать так: $\begin{cases} x = x \\ y = \varphi(x) \end{cases}$ $\quad x_1 \le x \le x_2$, $t = x$

тогда основная ф-ла превратится в сле
ф-лу:

$$\int_\gamma f(x,y)\,dl = \int_{x_1}^{x_2} f(x,\varphi(x))\sqrt{1+(\varphi')^2}\,dx$$

в) Пусть $\gamma$ - часть линии, заданной ур-ием
$x = \varphi(y)$, $y_1 \le y \le y_2$
$t = y$

$$\begin{cases} x = \varphi(y) \\ y = y \end{cases}$$


$y_1 \le y \le y_2$

$$\int_\gamma f(x,y)\,dl = \int_{y_1}^{y_2} f(\varphi(y), y)\sqrt{1+}$$

## 3. Св-ва криволинейного интеграла I рода

а) $\int_\gamma c f\,dl = c\int_\gamma f\,dl$

б) $\int_\gamma (f \pm g)\,dl = \int_\gamma f\,dl \pm \int_\gamma g\,dl$

в) (св-во аддитивности): $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$

$$\int_\gamma f\,dl = \int_{\gamma_1} f\,dl + \int_{\gamma_2} f\,dl$$

г) криволин. интегр. I рода не зависи
направления кривой $\gamma$

## 4 Приложения криволинейного интегр
## I рода

а) $\int_\gamma f\,dl = L_\gamma$ - длина кривой б) $\int\limits_{\Gamma} \rho(x,y)\,dl = M_\Gamma$ - масса кривой

в) $\int\limits_{\Gamma} f(x,y)\,dl = S_{\text{„флага"}}$ $f(x,y) \geq 0$

г) $M_c(x_c, y_c)$ - центр тяж. проволки $\Gamma$ с плотностью $\rho$

$$x_c = \frac{\int\limits_{\Gamma} x\rho\,dl}{\int\limits_{\Gamma} \rho\,dl}; \quad y_c = \frac{\int\limits_{\Gamma} y\rho\,dl}{\int\limits_{\Gamma} \rho\,dl}$$

Если $\rho = const$ (проволока однородна), то $\rho$ сокращается и пропадает в ф-ле.

д) Момент инерции:

$$I_x = \int\limits_{\Gamma} y^2 \rho\,dl; \quad I_y = \int\limits_{\Gamma} x^2 \rho\,dl; \quad I_0 = \int\limits_{\Gamma} (x^2+y^2)\rho\,dl$$

## 5. Примеры

Пример 1. $\int (x-2y)\,dl$ AB - отр. прям. $A(0;2)$ $B(-1;3)$. Параметр. ур-ие прямой на пл-ти проходит через т. $M_0(x_0;y_0)$ с направл. вект. $\vec{a} = \{\alpha;\beta\}$

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \end{cases} \qquad M_0 = A(0;2) \qquad \vec{a} = \vec{AB} = \{\underset{\alpha}{-1};\underset{\beta}{1}\}$$

$$\begin{cases} x = 0 - t \\ y = 2 + t \end{cases} \qquad A(0;2) \quad t_A - ? \quad 0 = 0 - t \Rightarrow t_A = 0$$

$B(-1;3)$ $\quad t_B - ?$ $\quad -1 = 0 - t \Rightarrow t_B = 1$

$$0 \leq t \leq 1$$

$$\int\limits_{AB} (x-2y)\,dl = \int\limits_0^1 (-t - 2(2+t))\sqrt{[(-t)']^2 + [(2+t)']^2}\,dt =$$

$$= \int\limits_0^1 (-3t-4)\sqrt{2}\,dt = -\sqrt{2}\int\limits_0^1 (3t+4)\,dt = -\sqrt{2}\left(\frac{3t^2}{2} + 4t\right)\Big|_0^1 = -\sqrt{2}\left(\frac{3}{2}+4\right)$$

$$= -\sqrt{2}\cdot\frac{11}{2}$$

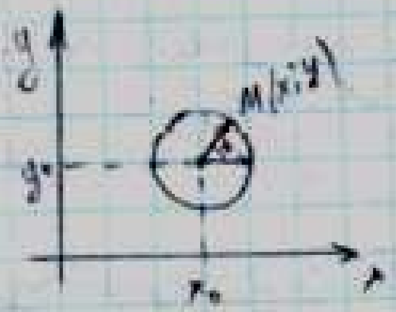
Пример 2: $\int\limits_{\gamma} y^2 dl =$

$\gamma$: часть окр. $x^2+y^2=4$ между т. $A(0,2)$ и $O($

Параметр. ур-ия окр. с центром в т. $M_0(x_0;y_0)$ и радиуса $R$ имеют вид

$$\begin{cases} x = x_0 + R\cos t \\ y = y_0 + R\sin t \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi$$

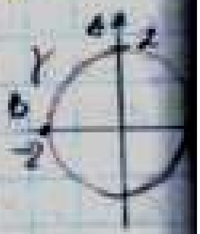
где $t$ - выполняет роль полярного угла $\varphi$




В нашем случае

$$\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases}$$

$$\frac{\pi}{2} \le t \le \pi$$




$$= \int (2\sin t)^2 \sqrt{[(2\cos t)']^2 + [(2\sin t)']^2}\, dt =$$

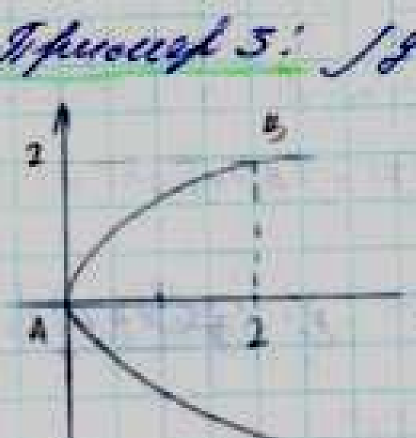
Замечание: Необходимо следить за тем, чтобы нижний предел интегрирования был < верхнего предела интегрирования

$4\sin^2 t + 4\cos^2 t = 4$

$$= 4 \cdot 2 \int\limits_{\pi/2}^{\pi} \sin^2 t\, dt = 2 \cdot \frac{1}{2} \int\limits_{\pi/2}^{\pi} (1 + \cos 2t)\, dt = 4\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right)$$

$$= 4(\pi + 0) - 4\left(\frac{\pi}{2} + 0\right) = 4\pi - 2\pi = 2\pi$$

Пример 3: $\int\limits_{\gamma} y\, dl =$




$\gamma$: $y^2 = 2x$ между $A(0,0)$ и $B(2,2)$

$$= \int\limits_0^2 y \sqrt{1 + \left(\left(\frac{y^2}{2}\right)'\right)^2}\, dy =$$

$$= \int_0^2 y\sqrt{1+y^2}\,dy = \int_0^2 \sqrt{1+y^2}\, d\frac{y^2}{2} = \frac{1}{2}\int_0^2 \sqrt{1+y^2}\, d(1+y^2) =$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{(1+y^2)^{3/2}}{3/2}\Big|_0^2 = \frac{1}{3}\sqrt{(1+y^2)^3}\Big|_0^2 = 1/3\,(5\sqrt{5}-1)$$

Пример 4: Вычислить $m$ проволоки, где $\gamma$ - замкнутый квадрат.

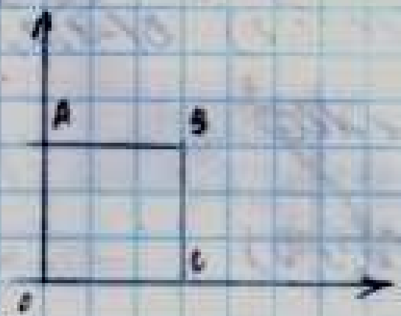
$\rho = x^2+y^2$

$M_\gamma - ?$

$$M_\gamma = \int_\gamma (x^2+y^2)\,dl =$$

$$= \int_{OA} (x^2+y^2)\,dl + \int_{AB} -\text{"}- +$$

$$+ \int_{BC} -\text{"}- + \int_{OC} -\text{"}-$$




1) OA $x=0$ $0 \le y \le 1$ $\Rightarrow$ используем 3-ю ф-лу

$$\int_{OA} (x^2+y^2)\,dl = \int_0^1 y^2\sqrt{1+((0)')^2}\,dy = \int_0^1 y^2\,dy = \frac{y^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

2) AB: $y=1$; $0 \le x \le 1$ $\Rightarrow$ используем 2-ю ф-лу

$$\int_{AB} (x^2+y^2)\,dl = \int_0^1 (x^2+1)\sqrt{1+(1')^2}\,dx = \int_0^1 (x^2+1)\,dx =$$

$$= \left(\frac{x^3}{3}+x\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{3}+1 = \frac{4}{3}$$

3) BC: $x=1$ $0 \le y \le 1$ - исп 3-ю ф-лу

$$\int_{BC} (x^2+y^2)\,dl = \int_0^1 (1+y^2)\sqrt{1+(1')^2}\,dy = \int_0^1 (1+y^2)\,dy =$$

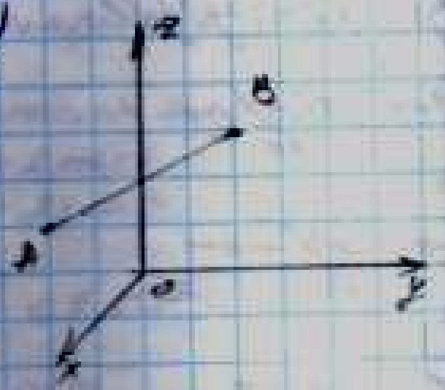
$$= \left(y+\frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^1 = 1 + 1/3 = 4/3$$

4) OC: $y=0$ $\quad 0 \le x \le 1 \Rightarrow$ исп. 2-ую ф-лу

$$\int_{OC}(x^2+y^2)\,dl = \int_0^1 x^2\sqrt{1+(0')^2}\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$M_l = \frac{1}{3}+\frac{4}{3}+\frac{4}{3}+\frac{1}{3} = \frac{10}{3}$$

Пример 5: Найти $M_{AB}$ с плотностью $\rho = z$ $\quad A(0;1;2)$ $\quad B(-1;2;4)$



$$M_{AB} = \int_{AB} z\,dl \;\ominus$$

$$M_0 = A(0;1;2)$$

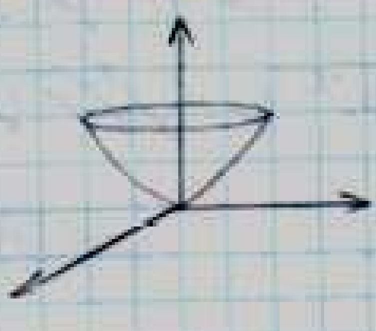
$$\bar{a} = \overline{AB} = \{-1;1;2\}$$

$$\begin{cases} x = 0 - t \\ y = 1 + t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$$

$A(0;1;2)$
$t_A = 0$
$B(-1;2;4)$
$t_B = 1$

$$\ominus \int_0^1 (2+2t)\sqrt{((-t)')^2+((1+t)')^2+((2+2t)')^2}\,dt =$$
$$= 2\sqrt{6}\int_0^1 (1+t)\,dt = 2\sqrt{6}\left(t+\frac{t^2}{2}\right)\Big|_0^1 = 2\sqrt{6}\cdot\frac{3}{2} = 3\sqrt{6}$$

Пример 6. Найти $M_l$, где $l: \begin{cases} z = x^2+y^2 \\ z = 4 \end{cases}$



$\rho = 5$

$$M_l = \int_l 5\,dl = 5L_l =$$
$$= 5\cdot 2\pi\cdot 2 = 20\pi$$

Если бы мы вычисляли интеграл, то кривая следующая:

$$\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t \\ z = 4 \end{cases} \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

# Криволинейный интеграл II рода

## 1. Определение

а) Дано: ориентиров. кривая $\gamma$

на $\gamma$ задаётся вектор-функция $F(P(x,y), Q(x,y))$


б) Разбиение кривой: набор уч-ов $M_{i-1}M_i$ и внутренних точек $N_1, N_2, \ldots$

Диаметр разбиения – max из длин всех уч-ов разбиения.

$d_n$ – диаметр разбиения

в) Интегральная сумма

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} F(N_i) \cdot \overline{M_{i-1}M_i}$$

г) Опр. предела интегральной суммы.

Каждое слагаемое в интегральной сумме работе данной силы по перемещению тела единичной массы вдоль вектора $M_{i-1}M_i$

д) $\int\limits_{\gamma} \bar{F}\cdot d\bar{l} = \lim\limits_{d_n\to 0} I_n$

Альтернативное обозначение:

$\int\limits_{\gamma} P\,dx + Q\,dy$

2. Св-ва криволинейного интеграла II рода

а) $\int\limits_{AB} \bar{F}\,d\bar{l} = -\int\limits_{BA} \bar{F}\cdot d\bar{l}$

б) $\int\limits_{AB} c\bar{F}\,d\bar{l} = c\int\limits_{AB} \bar{F}\,d\bar{l}$

в) $\int\limits_{AB} (\bar{F}_1+\bar{F}_2)\,d\bar{l} = \int\limits_{AB} \bar{F}_1\,d\bar{l} + \int\limits_{AB} \bar{F}_2\cdot d\bar{l}$

г) (Св-во аддитивности) $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$

$\int\limits_{\gamma} \bar{F}\,d\bar{l} = \int\limits_{\gamma_1} \bar{F}\,d\bar{l} + \int\limits_{\gamma_2} \bar{F}\,d\bar{l}$

3. Способы вычисления криволинейного интеграла II рода

а) основной: $\gamma \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ $\begin{matrix} A \to t_1 \\ B \to t_2 \end{matrix}$

$\int\limits_{\gamma} \bar{F}\,d\bar{l} = \int\limits_{t_1}^{t_2} [P(x(t), y(t))x' + Q(x(t), y(t))y']\,dt$

Комментарий: 1) При вычислен. криволин. интеграла II рода нижний предел $t_A$ может быть больше верхнего предела $t_B$.

2) Подынтегральное выраж. в правой части ф-лы получается из $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ заменой

$x$ и $y$ на $x(t)$, $y(t)$

$$= P(x(t),y(t))\,d\overset{x'dt}{x(t)} + Q(x(t),y(t))\,d\overset{y'dt}{y(t)} = \left[P(x(t),y(t))x' + Q(x(t),y(t))y'\right]dt$$

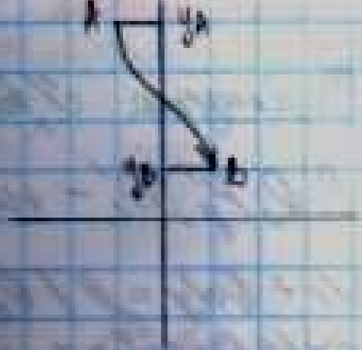
б) Пусть $\gamma: y = y(x)$

$$\gamma: \begin{cases} x = x \\ y = y(x) \end{cases}$$

Если бы мы вычислили интеграл, то кривой следующая:

$$\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t \\ z = 4 \end{cases} \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

$$\int_\gamma \bar{F}\,d\bar{\ell} = \int_{x_A}^{x_B} [P(x, y(x)) + Q(x, y(x))\,y']\,dx$$




б) $\gamma: x = x(y)$

$$\int_\gamma \bar{F}\cdot d\bar{\ell} = \int_{y_A}^{y_B} [P(x(y), y)\,x' +$$

$$+ Q(x(y), y)]\,dy$$

Пример 1. $\int (3x^2y\,dx + (x^3+1)\,dy) =$

Вычислить $\gamma: y = x^2$ от $A(0;0)$ до $B(1;1)$

$x_A = 0 \quad x_B = 1$

$$= \int_0^1 3x^4dx + (x^3+1)\,d(x^2) = \int_0^1 (3x^4 + 2x(x^3+1))\,dx =$$

$$= \int_0^1 (5x^4 + 2x)\,dx = (x^5 + x^2)\Big|_0^1 = 1 + 1 = 2$$


Пример 2: $\oint_{ABCD} (2x - y)\,dx + x\,dy =$

$$= \int_{AB} + \int_{BC} + \int_{CD} + \int_{DA} =$$

| $AB$ | $BC$ | $CD$ | $DA$ |
|---|---|---|---|
| $x = 0$ | $y = 1$ | $x = 1$ | $y = 0$ |
| $y_A = 0$ | $x_B = 0$ | $y_C = 1$ | $x_D = 1$ |
| $y_B = 1$ | $x_C = 1$ | $y_D = 0$ | $x_A = 0$ |

$$= \int_0^1 (2\cdot 0 - y)\,d0 + 0\,dy + \int_0^1 (2x-1)\,dx + x\,d1 +$$

$$+ \int_1^0 (2\cdot 1 - y)\,d1 + 1\,dy + \int_1^0 (2x-0)\,dx + x\,d0 =$$

$$= 0 + \int_0^1 (2x-1)\,dx + \int_1^0 dy + \int_1^0 2x\,dx = (x^2 - x)\Big|_0^1 + y\Big|_1^0$$

$$+ x^2\Big|_1^0 = 1-1-0+0-1+0-1 = -2$$

## 4. Формула Грина (без док-ва)

$P, Q, P'_y, Q'_x$ — непрерывные $\Rightarrow$

$$\oint_\gamma P\,dx + Q\,dy = \iint_{D_\gamma} (Q'_x - P'_y)\,dx\,dy$$

$\gamma$ — направление $\circlearrowleft$ против часовой стрелки

Следствие: $S_{D_\gamma} = \frac{1}{2} \oint_\gamma x\,dy - y\,dx$

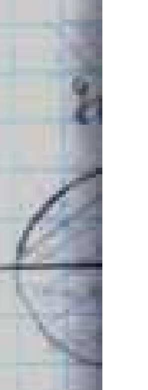
Док-во: Положим в ф-ле Грина $P = -y$, $Q = x$

$$\oint -y\,dx + x\,dy = \iint_{D_\gamma} \left((x)'_x - (-y)'_y\right) dx\,dy =$$

$$= 2 \iint_{D_\gamma} dx\,dy = 2 \cdot S_{D_\gamma} \Rightarrow \text{ч.т.д.}$$

Пример 1: Вычислить $S$ эллипса

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ Параметрич. ур-ие эллипса выглядит так: $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$



$t_A = 0$; $t_B = 2\pi$

$t$ = полярный угол

$$S_{эл} = \frac{1}{2}\oint x\,dy - y\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} a\cos t\, d\, b\sin t - b\sin t\, d\, a\cos t =$$

$$\gamma: \begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} ab\cos t\cos t\,dt - b\sin t\, a(-\sin t)\,dt =$$

$$= \frac{ab}{2}\int_0^{2\pi}(\cos^2 t + \sin^2 t)\,dt = \frac{ab}{2}\,2\pi = \pi ab$$

Пример 2: Вернёмся к примеру у преды-дущего § с квадратом

$$\int_{ABCA}(2x-y)\,dx + x\,dy = \iint_D \left((x)'_x - (2x-y)'_y\right)dx\,dy =$$

$$= 2\iint_D dx\,dy = 2 \Rightarrow \int_{ABC} = 2$$

## 5. Условия независимости криволинейного интеграла II рода от пути интегрирования

**Теорема**: Пусть $P, Q, P'_y, Q'_x$ – непрерыв. ф

1) $\int_\gamma P\,dx + Q\,dy$ – не зависит от пути интегрирования

2) $\oint_\gamma P\,dx + Q\,dy = 0$ – для любого замкнутого контура $\gamma$

3) $P'_y = Q'_x$

4) Существует $U = U(x,y)$ такие что

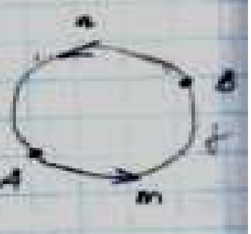
$$dU = P\,dx + Q\,dy$$

тогда $(1) \Leftrightarrow (2) \Leftrightarrow (3) \Leftrightarrow (4)$

Док-во проведём по кольцу

$(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4) \Rightarrow (1)$

Док-во: $(1) \Rightarrow (2)$




$$\oint_\gamma P\,dx + Q\,dy = \int_{AmB} + \int_{BnA} = \int_{AmB} - \int_{AnB}$$

$(2) \Rightarrow (3)$ $\oint\limits_{\gamma} Pdx + Qdy = 0$ для любого $\gamma$

Из ф-лы Грина вытекает

$$\oint\limits_{\gamma} Pdx + Qdy = \iint\limits_{D_\gamma} (Q_x' - P_y')\,dx\,dy$$

$D_\gamma$ $\gamma$

$- x_0 y_0$

Если в т. $M_0(x_0 y_0)$ $Q_x' - P_y' > 0$

$\Rightarrow$ в силу непрерывности этой разности существует $D_\gamma$ такая что $Q_x' - P_y' > 0$ для $(x,y) \in D_\gamma \Rightarrow$

$$\iint\limits_{D_\gamma} (Q_x' - P_y')\,dx\,dy > 0$$

Противоречие $\Rightarrow$ $\boxed{Q_x' = P_y'}$

$(5) \Rightarrow (4)$ Пусть $P_y' = Q_x'$, докажем что существует ф-ция-потенциал $u = u(x,y)$

$$du = Pdx + Qdy$$

Док-во: $u(x;y) = \int\limits_{x_0}^{x} P(t, y_0)\,dt + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x,t)\,dt$

где $M_0(x_0 y_0)$ – точка из области определения ф-ции $P$ и $Q$

Докажем, что $U_x' = P$ и $U_y' = Q$

$$U_x' = P(x, y_0) + \int\limits_{y_0}^{y} Q_x'(x,t)\,dt = P(x y_0) + \int\limits_{y_0}^{y} P_t'(x t)\,dt =$$

$$= P(x,y_0) + P(x,t)\Big|_{y_0}^{y} = P(x y_0) + P(x y) - P(x y_0) = P(x,y)$$

$U'_y = Q(x,y)$ — ч.т.д.

(1) ⇒ (2) Пусть $U = U(x,y)$ такова, что $dU = Pdx + Qdy$, покажем что

$\int_{AB} Pdx + Qdy$ не зависит от пути интегрирования.

Док-во: $\boxed{\int_{AB} Pdx + Qdy = U(B) - U(A)}$

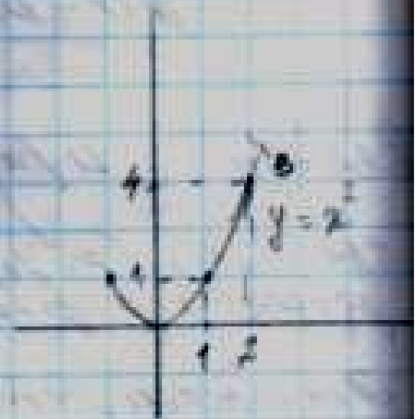
$$\int_{AB} Pdx + Qdy = \int U'_x dx + U'_y dy = \int_{t_0}^{t_1} (U'_x x' + U'_y$$

$$U = U(x;y) = U(x(t), y(t)) \qquad U'_t = U'_x x' + U'_y y'$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} U'_t dt = U\Big|_{t_0}^{t_1} = U(t_1) - U(t_0) = U(B) - U(A)$$

2) Задача: $\int (x+3y)dx + (y+3x)dy =$

$AB: y = x^2$ от $A(1;1)$
до $B(2;4)$




Решение: Покажем что
$P'_y = Q'_x$

$P = x+3y$, $Q = y+3x$

$P'_y = 3 \qquad Q'_x = 3$

$$= \int_1^2 (x+3x^2)dx + (x^2+3x)dx^2 = \int_1^2 (x+3x^2+2x(x^2+3x))d$$

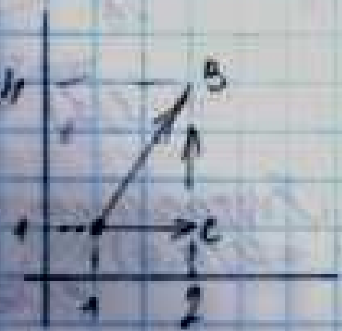
$$= \int_1^2 (2x^3 + 9x^2 + x)\,dx = \left(\frac{2x^4}{4_2} + 3x^3 + \frac{x^2}{2}\right)\Big|_1^2 =$$

$$= 8 + 24 + 2 - 1/2 - 3 - 1/2 = 30$$

Задача $\int\limits_{AB} (x+3y)\,dx + (y+3x)\,dy =$

AB – отрезок прямой

$M_0(x_0, y_0)$ $\bar{a} = \{\alpha, \beta\}$




$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \end{cases}$$

$M_0 = A(1;1)$ $\bar{a} = \overline{AB} = \{1;3\}$

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 3t \end{cases}$$

Если $M_0 = A$, а $\bar{a} = \overline{AB}$, то $t_A = 0$; $t_B = 1$

$$= \int_0^1 (1 + t + 3(1+3t))\,\underbrace{d(t+1)}_{dt} + (1 + 3t + 3(1+t)) \cdot$$

$$\cdot \underbrace{d(1+3t)}_{3dt} = \int_0^1 (4 + 10t + 12 + 18t)\,dt =$$

$$= \int_0^1 (28t + 16)\,dt = (14t^2 + 16t)\Big|_0^1 = 14 + 16 = 30$$

Задача: $\int\limits_{ACB} (x+3y)\,dx + (y+3x)\,dy = \int\limits_{AC} + \int\limits_{CB} =$

ACB – ломаная

| AC | CB |
|---|---|
| $y = 1$ | $x = 2$ |
| $x_A = 1$ | $y_C = 1$ |
| $x_C = 2$ | $y_B = 4$ |

$$= \int_1^2 (x+3)\,dx + (1+3x)\,\underbrace{d1}_{0} + \int_1^4 (2+3y)\,\underbrace{d2}_{0} + (y+6)\,dy =$$

$= \int_1^2 (x+3)\,dx + \int_1^4 (y+6)\,dy = \left(\frac{x^2}{2}+3x\right)\Big|_1^2 + \left(\frac{y^2}{2}+6y\right)\Big|_1^4 =$

$= 2+\cancel{6}-\frac{1}{2}+3+8+24-\frac{1}{2}-\cancel{6} = 30$

Задача: $\int_{AB} (x+3y)\,dx + (y+3x)\,dy =$

$A(1;1)\quad B(2;4)$

Вычислим при помощи ф-ции потенциала $u = u(x,y)$

$u(x;y) = \int_{x_0}^{x} P(t,y_0)\,dt + \int_{y_0}^{y} Q(x,t)\,dt =$

$P, Q$ — определены и непрерывны везде $\Rightarrow x_0 = 0,\ y_0 = 0$

$= \int_0^x (t+3\cdot 0)\,dt + \int_0^y (t+3x)\,dt = \frac{t^2}{2}\Big|_0^x + \left(\frac{t^2}{2}+3xt\right)\Big|_0^y =$

$= \frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+3xy$

$= u(B) - u(A) = \frac{2^2}{2}+\frac{4^2}{2}+3\cdot 2\cdot 4 - \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+3\cdot 1\cdot 1\right) =$

$= 2+8+24-4 = 30$

$P'_y = Q'_x$

Задача: $\int_{(1,1)}^{(2,2)} \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)dx + \left(\frac{2}{y}-\frac{x}{y^2}\right)dy =$

В этой задаче нет пути $\gamma$, есть начальн. т. $A$ и конечн. т. $B$. Такая формулировка подсказывает, что этот интеграл не зависит от пути интегрирования

$$P'_y = \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)'_y = -\frac{1}{y^2}$$

$$Q'_x = \left(\frac{2}{y}-\frac{x}{y^2}\right)'_x = -\frac{1}{y^2}$$

Используем метод потенциала:

$(x_0, y_0) = (1, 1)$

$$U(x,y) = \int_1^x \left(\frac{1}{t}+\frac{1}{1}\right)dt + \int_1^y \left(\frac{2}{t}-\frac{x}{t^2}\right)dt =$$

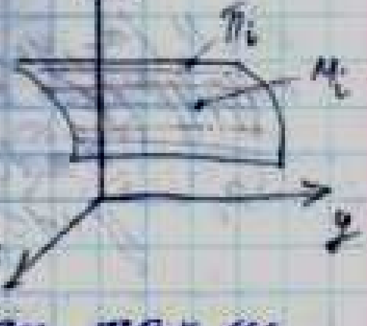
$$= (\ln|t|+t)\Big|_1^x + \left(2\ln|t|+\frac{x}{t}\right)\Big|_1^y = \ln|x|+x-(\cancel{\ln 1}^{\,0}+1)+$$

$$+2\ln|y|+\frac{x}{y}-(2\ln 1+x/1) = \ln|x|-1+2\ln|y|+x/y$$

$\textcircled{=}$ $U(B)-U(A) = \ln 2 - 1 + 2\ln 2 + 2/2 - (\ln 1_0 - 1 + 2\ln 1 + 1/1) = 3\ln 2$

## Поверхностный интеграл 1 рода

### 1 Определение




а) Дано: поверхность $\Sigma$
$f(x, y, z)$ определена на $\Sigma$

б) Разбиение $\Sigma$: набор площадок $\pi_i$ с выбранными в каждой площадке $\pi_i$ внутр. точки $M_i$

$d_n$ - диаметр разбиения - это max из площадей всех площадок разбиения.

в) Интегральная сумма

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\cdot S_{\pi_i}, \text{ где } S_{\pi_i} \text{ - площадь } \pi_i$$

9) Физический смысл: если $f(x,y,z)$ - плотность масс пластины $\Sigma$, то $I_n \approx$ масса изогнутой пластины.

8) Поверхностный интеграл I-ого рода

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,d\sigma = \lim_{d_n \to 0} I_n$$

2. Св-ва и приложения

а) $\iint_{\Sigma} c f\,d\sigma = c\iint_{\Sigma} f\,d\sigma$

б) $\iint_{\Sigma} (f \pm g)\,d\sigma = \iint_{\Sigma} f\,d\sigma \pm \iint_{\Sigma} g\,d\sigma$

1) $\Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2$

$$\iint_{\Sigma} f\,d\sigma = \iint_{\Sigma_1} f\,d\sigma + \iint_{\Sigma_2} f\,d\sigma$$

2) $\iint_{\Sigma} 1\,d\sigma = S_{\Sigma}$ - площадь пов-ти

д) $p(x,y,z)$ - плотность

$$\iint_{\Sigma} p\,d\sigma = M_{\Sigma}$$ - масса пластины

е) $M_c(x_c, y_c, z_c)$ - центр тяжести для однор пластины $\Sigma$

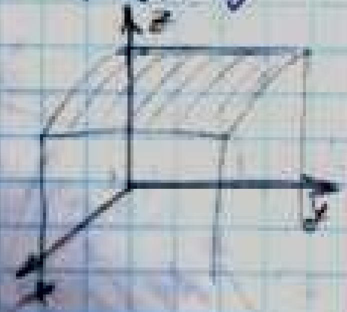
$$x_c = \frac{\iint_{\Sigma} x\,d\sigma}{\iint_{\Sigma} 1\,d\sigma}\ ;\ y_c = \frac{\iint_{\Sigma} y\,d\sigma}{\iint_{\Sigma} 1\,d\sigma}\ ;\ z_c = \frac{\iint_{\Sigma} z\,d\sigma}{\iint_{\Sigma} 1\,d\sigma}$$

ж) Моменты инерции пластины $\Sigma$ с плотностью $p = p(x,y,z)$

$$I_x = \iint\limits_{\Sigma} (y^2 + z^2)\rho\, d\sigma; \quad I_y = \iint\limits_{\Sigma} (x^2 + z^2)\rho\, d\sigma;$$

## 3. Способы вычисления

а) Пусть $\Sigma$ задаётся ур-нием $z = z(x, y)$, где $(x,y) \in D_{xy}$



Осн. св-во $\Sigma$: с любой вертик. прямой пов-ть должна пересек. в неболее чем 1-ой точке

$D_{xy}$ - проекция $\Sigma$ на $Oxy$

тогда $\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\, d\sigma = \iint\limits_{D_{xy}} f(x,y,z(x,y)) \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\, dx\, dy$

б) Пусть $\Sigma$ задаётся ур-нием $y = y(x,z)$, где $(x,z) \in D_{xz}$ - проекц. $\Sigma$ на $Oxz$

Основное св-во $\Sigma$: с любой прямой $\parallel$ оси $Oy$ пов-ть $\cap$ в неболее чем 1-ой т.

Тогда: $\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\, d\sigma = \iint f(x, y(x,z); z) \sqrt{1 + (y'_x)^2 + (y'_z)^2}\, dx\, dz$

в) $\Sigma \Rightarrow x(y,z)$

$D_{yz}$ - проекц. $\Sigma$ на $Oyz$

$\Sigma$ перес. с прям. $\parallel Ox$ в неболее чем 1 т.

тогда $\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\, d\sigma = \iint\limits_{D_{yz}} f(x(y,z); y; z) \sqrt{1 + (x'_y)^2 + (x'_z)^2}\, dy\, dz$

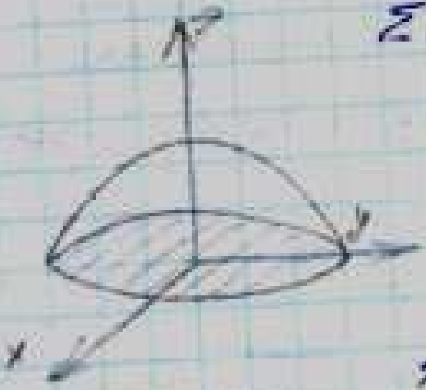
$$\iint\limits_{\Sigma:\, z = z(x,y)} f(x,y,z)\, d\sigma = \iint f(x,y,z(x,y)) \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\, dx\, dy$$

$E_{xy}$ - проекция $\Sigma$ на $Oxy$

Примеры:

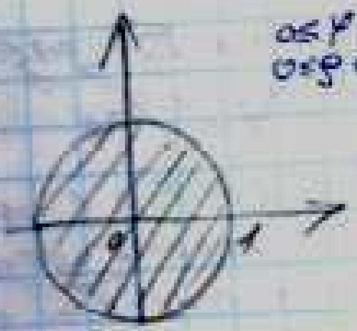
а) Вычислить $\iint\limits_{\Sigma} \sqrt{1+4x^2+4y^2}\,d\sigma =$

$\Sigma:\ z = 1-x^2-y^2$



$z'_x = -2x$

$z'_y = -2y$



$0 \le \varphi \le 2\pi$

$0 \le \rho \le 1$

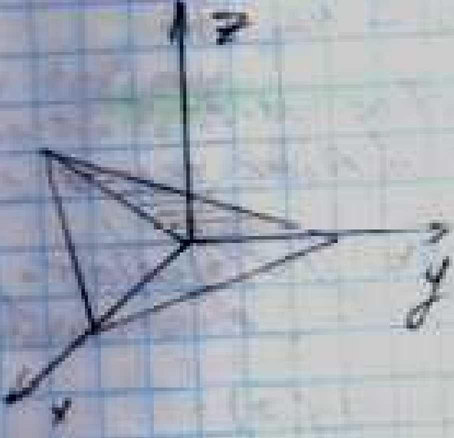
$x^2+y^2=1$

$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho\, d\rho \sqrt{1+4\rho^2}\,\sqrt{1+4\rho^2} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho(1+4\rho^2)\,d\rho =$

$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (\rho+4\rho^3)\,d\rho = \int_0^{2\pi} d\varphi \left(\frac{\rho^2}{2}+\rho^4\right)\Big|_0^1 = \frac{3}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{3}{2}\,2\pi = 3$

б) Вычислить коорд. центра тяжести $g=1$

$\Sigma:\ \begin{cases} z = x \\ x+y = 1 \\ y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$

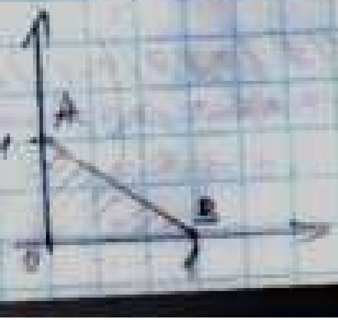


$x_c = \dfrac{\iint\limits_{\Sigma} x\,d\sigma}{\iint\limits_{\Sigma} d\sigma}$; $y_c = \dfrac{\iint\limits_{\Sigma} y\,d\sigma}{\iint\limits_{\Sigma} d\sigma}$

$z_c = \dfrac{\iint\limits_{\Sigma} z\,d\sigma}{\iint\limits_{\Sigma} d\sigma}$ $\quad z = x;\ z'_x = 1;\ z'_y = 0 \Rightarrow \sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2} =$

$= \sqrt{2}$

$\Sigma_{xy}$



$$\iint_{\Sigma} d\sigma = \iint_{\Sigma_{xy}} \sqrt{2}\, dx\, dy = \sqrt{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\iint_{\Sigma} x\, d\sigma = \int_0^1 x\, dx \int_0^{1-x} dy = \int_0^1 x\, dx (1-x) = \sqrt{2}\int_0^1 (x - x^2)\, dx =$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \sqrt{2}/6$$

$$\iint_{\Sigma} y\, d\sigma = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} y\, dy = \int_0^1 dx\, \frac{y^2}{2}\Big|_0^{1-x} = \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^1 (1-x)^2\, dx =$$

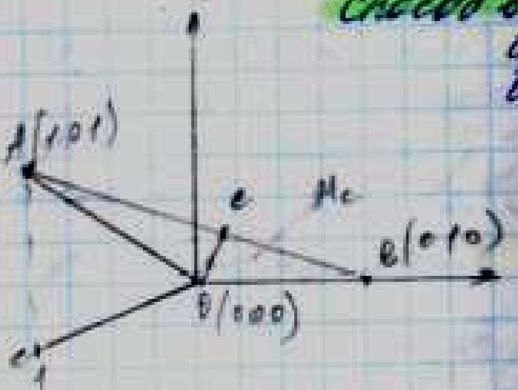
$$= \frac{1}{2}\int_0^1 (x-1)^2\, d(x-1) = \frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{(x-1)^3}{3}\Big|_0^1 = 0 - \frac{1}{6}(-1) = \frac{\sqrt{2}}{6}$$

$$\iint_{\Sigma} z\, d\sigma = \iint_{\Sigma} x\, d\sigma = \ldots = \frac{\sqrt{2}}{6}$$

$$x_c = \frac{\sqrt{2}/6}{\sqrt{2}/2} = \frac{1}{3};\ y_c = \frac{1}{3},\ z_c = \frac{1}{3}$$

$$M_c\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

**Способ вычисления центра тяжести без интегралов**




$\vec{OA} = \{1\ 0\ 1\}$

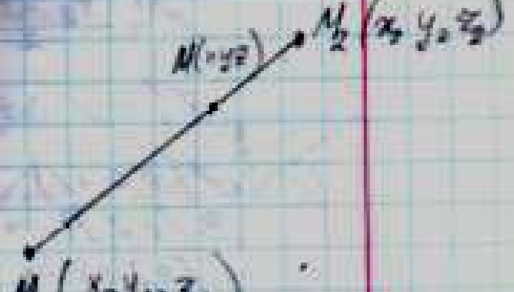
$\vec{OB} = \{0, 1, 0\}$

C - сер. отр. $C(1/2;\ 1/2;\ 1/2)$

$x_2\ \ y_2\ \ z_2$

$$\frac{M_1 M}{M M_2} = \lambda \qquad \lambda = 2$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda} \\ y = \dfrac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda} \\ z = \dfrac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda} \end{cases}$$



$x_c = \frac{0+2\cdot 1/2}{1+2} = 1/3$ $\qquad$ $y_c = \frac{0+2\cdot\frac{1}{2}}{1+2} = \frac{1}{3}$

$$z_c = \frac{0+2\cdot 1/2}{1+2} = 1/3$$

б) Вычислить массу треугольника $\Delta ABC$

$A(0\,0\,1)\ B(0\,2\,1)\ C(2\,2\,0)$

$\rho = x$ — плотность

$M_{\Delta ABC} = \iint_S \rho\, d\sigma$

Ур-ие плоскости, проход. через 3-и т. $M_1(x_1$

$M_2(x_2\, y_2\, z_2)$; $M_3(x_3\, y_3\, z_3)$

$$\begin{vmatrix} x-x_1; & y-y_1; & z-z_1 \\ x_2-x_1; & y_2-y_1; & z_2-z_1 \\ x_3-x_1; & y_3-y_1; & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z+1 \\ 0-0 & 2-0 & 2+1 \\ 2-0 & 2-0 & 0+1 \end{vmatrix} = 0$$

$x(2-6) - y(0-6) + (z-1)(0-4) = 0$

$-4x + 6y - 4z - 4 = 0$

$-2x + 3y - 2z - 2 = 0$

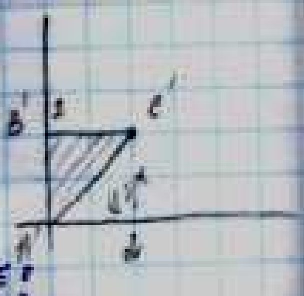
$z = \frac{3y-2x-2}{2}$ ; $z = -x + \frac{3}{2}y - 1$

$z'_x = 1 \quad z'_y = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{17}}{2}$

$A(0\,0\,-1) \Rightarrow A'(0\,0)$

$B(0\,2\,1) \Rightarrow B'(0\,2)$

$C(2\,2\,0) \Rightarrow C'(2;2)$




$0 \le x \le 2$

$x \le y \le 2$

$$M = \iint_{OA'B'C'} x\,\frac{\sqrt{17}}{2}\,dx\,dy = \frac{\sqrt{17}}{2}\int_0^2 x\,dx\int_x^2 dy = \frac{\sqrt{17}}{2}\int_0^2 x\,dx\,(2-x) =$$

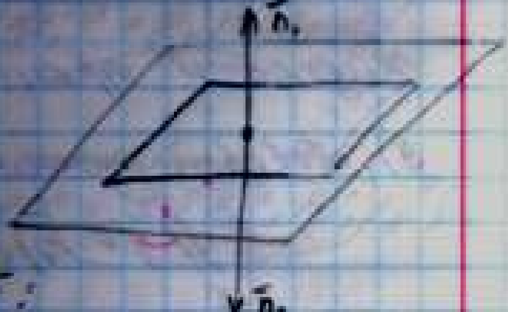
$$= \frac{\sqrt{17}}{2}\int_0^2 (2x - x^2)\,dx = \frac{\sqrt{17}}{2}\left(x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^2 = \frac{2\sqrt{17}}{3}$$

# Поверхностный интеграл II рода

## 1. Определение

а) Дано: ориентиров-ая пов-ть $\Sigma$. Ориентация пов-ти может задаваться выбором 1 из 2-х сторон пов-ти

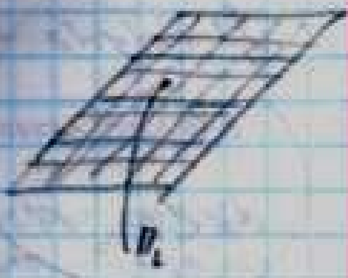
Также ориентация пов-ти может задаваться выбором вектора нормали пов-ти




Вектор ф-ия:

$\bar v = \{P(xyz), Q(xyz), R(xyz)\}$ на $\Sigma$ - вектор скорости

б) Разбиение пов-ти на $\Sigma_i$:
набор площадок $\Sigma_i$ с выбранными внутренними точками $M_i$;
$d_n$ - диаметр разбиения




в) Интегральная сумма

$$J_n = \sum_{i=1}^{n} (\bar v(M_i)\bar n_i)\,S_{\Sigma_i}, \text{ где}$$

$S_{\Sigma_i}$ - площадь площадки $\Sigma_i$;
$\bar n_0$ - ед. вектор выбранной нормали $(\bar v(M_i)\cdot \bar n_0)$ - скалярное пр-ние векторов $\bar v(M_i)$ и $\bar n_0(M_i)$


$M = (x_s; y_s; \cancel{z_s})$; $M_s(x_s\ y_s\ z_s)$

г) Физический (гидродинамический) смысл интегральной суммы


В каждой т. площадки $\Pi_i$ восстановим вектор $\bar{v}(M_i)$, получим наклонную "призму". Можно ассоциировать с кол-вом жидкости протекающей через площадку $\Pi_i$ за ед. времени. В гидродинамике кол-во жид. протек. за ед. вр. называют потоком векторного поля через данную пов-ть

$$V_{призм} = S_{\Pi_i} \cdot H = S_{\Pi_i}\, пр_{\bar{n}_0} \bar{v} = S_{\Pi_i} \frac{\bar{v}\cdot\bar{n}_0}{|\bar{n}_0|} = (\bar{v}\cdot\bar{n}_0)\, S_{\Pi_i}$$

Вывод: Интегр. сумма почти равна кол-ву жидкости протек. через пов-ть $\Sigma$ в ед. времени

д) Поверхностный интеграл II рода

$$\iint_\Sigma (\bar{v}\cdot\bar{n}_0)\, d\sigma = \lim_{diam \to 0} I_n$$

Альтернативное обозначение.

$$\iint_\Sigma P\,dydz + Q\,dxdz + R\,dxdy$$

Логический способ запоминания

$dydz$: не хватает $dx$ ⇒ приписываем от $\bar{v}$, т.е. $P$

$dxdz$: не хват. $dy$ ⇒ припис. коорд $y$ от $\bar{v}$, т.е. $Q$...

## Способы вычисления поверхностного интеграла II рода

### 1) Формула №1

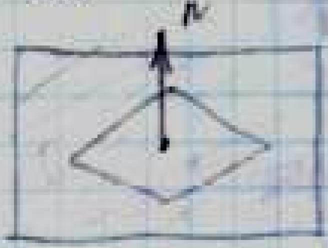
$$\iint_{\Sigma} (\bar v\cdot \bar n_0)\,d\sigma = \iint_{\Sigma_{xy}} (\mp P z'_x \mp Q z'_y \pm R)\,dx\,dy$$

где $\bar v = \{P\, Q\, R\}$

Верхний ряд знаков выбир. в случае, если $\bar n$ образует острый угол с осью $Oz$, в противном случае...

Док-во: Поверхн. инт. II рода — это пов. инт. I рода вычисленный от ф-ции $(\bar v\cdot \bar n_0)$, тогда

$$\iint_{\Sigma_{\bar n}} (\bar v\cdot \bar n_0)\,d\sigma = \iint_{\Sigma_{xy}} (\bar v\cdot \bar n_0)\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\,dx\,dy$$




$F(x y z)=0$ — пов-ть

$\bar n = \pm \operatorname{grad} F = \pm\{F'_x; F'_y; F'_z\}$

В нашем случае:

$F(x y z)=0$

$z = z(x y)$

$z - z(x y) = 0 \Rightarrow F(x y z) = z - z(x y)$

$\operatorname{grad} F = \{-z'_x;\ -z'_y;\ 1\}$

Вектор образ. с любой осью коорд. острый угол тогда и только тогда, когда соответств. этой оси координата положительна.

$$\bar n_0 = \frac{\bar n}{|\bar n|} = \pm\frac{\operatorname{grad} F}{|\operatorname{grad} F|} = \pm\frac{1}{\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}}\,(-z'_x;\ -z'_y;\ 1)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}}\left(\pm z'_x ; \mp z'_y ; \pm 1\right)$$

$$(\bar v\, \bar n_0) = \frac{1}{\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}}\left(\pm P z'_x ; \mp Q z'_y ; \pm R\right) \text{ и т.д.}$$

**Пример:** $\iint (\bar v\, \bar n_0)\, dG$

$\Sigma_n = \triangle ABC$ $\quad A(0,0,2)$ $\quad \bar v = \{\overset{P}{y} ; \overset{Q}{-z} ; \overset{R}{x}\}$

$B(1,0,2)$ $\quad n$ - образ. тупой угол с $Oz$

$C(1,1,1)$

1. Найти ур-ние пл-ти $ABC$

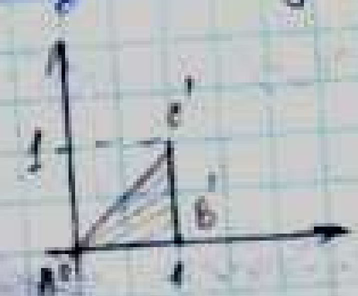
$$\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-2 \\ 1-0 & 0-0 & 2-2 \\ 1-0 & 1-0 & 1-1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} x & y & z-2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$x\cdot 0 - y(-1) + (z-2)1 = 0$$

$$y + z - 2 = 0 \Rightarrow z = 2 - y$$

$$z'_x = 0 \qquad z'_y = -1$$

2. Найти $\Sigma_{xy}$




$0 \le x \le 1$

$0 \le y \le x$

3. Вычисление

$$\int_0^1 dx \int_0^x (y\cdot 0 + (-z)(-1) - x)\,dy = \int_0^1 dx \int_0^x (2-y-x)\,dy$$

$$= \int_0^1 dx \left(2y - \frac{y^2}{2} - xy\right)\Big|_0^x = \int_0^1 dx \left(2x - \frac{x^2}{2} - x^2\right) = \int_0^1 \left(2x - \frac{3}{2}\ldots\right.$$

$= \left(x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

Замечание: Проецируя не на ось $Oz$, а оси $Ox$; $Oy$ можно получить аналогичные ф-лы:

1) $$\iint\limits_{\Sigma_n} (\bar{v} \cdot \bar{n}_0)\, d\sigma = \iint (\pm P \mp Q x'_y \mp R x'_z)\, dy\, dz$$

2) $$\iint\limits_{\Sigma_n} (\bar{v}\, \bar{n}_0)\, d\sigma = \iint\limits_{\Sigma_{xy}} (\mp P y'_x \pm Q \mp R y'_z)\, dx\, dz$$

В предыд. задаче можно было бы использ. ф-лу 2), т.к. подынтегральная ф-ция зависела от $x, z$; заменять эти переменные не нужно.

## 2. Формула №2

$$\iint\limits_{\Sigma_n} (\bar{v} \cdot \bar{n}_0)\, d\sigma = \iint\limits_{\Sigma_{xy}} \frac{\bar{v} \cdot \bar{n}}{|n_z|}\, dx\, dy$$

Комментарий: если подынтегральная ф-ция не будет содержать $z$ и вектор нормали можно найти не прибегая к ур-ию поверхности.

Вывод: из предыдущей формулы $\Rightarrow$

$$\iint\limits_{\Sigma_n} (\bar{v}\, \bar{n})\, d\sigma = \iint\limits_{\Sigma_{xy}} (\bar{v} \cdot (\pm \operatorname{grad} F))\, dx\, dy \ominus$$

$$\pm \operatorname{grad} F \parallel \bar{n} \Leftrightarrow \pm \operatorname{grad} F = k \bar{n}$$

$$(\mp z'_x; \mp z'_y; \pm 1) = k(n_x, n_y, n_z) \Rightarrow$$

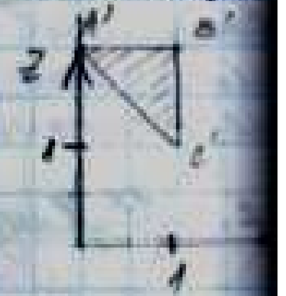
$$k = \frac{1}{|n_z|}$$

© $\iint\limits_{\Sigma_{xy}} \left(\bar v \cdot \frac{\bar n}{|n_z|}\right) dxdy = \iint\limits_{\Sigma_{xy}} \frac{\bar v \cdot \bar n}{|n_z|}\, dxdy$ — ч.т.д.

Замечание: 1) $\iint\limits_{\Sigma_n} (\bar v \cdot \bar n)\, d\sigma = \iint\limits_{\Sigma_{yz}} \frac{\bar v \cdot \bar n}{|n_x|}\, dydz$

2) $\iint\limits_{\Sigma_n} (\bar v \cdot \bar n)\, d\sigma = \iint\limits_{\Sigma_{xz}} \frac{\bar v \cdot \bar n}{|n_y|}\, dxdz$

Пример: Решим 1 задачу при помощи формулу 2)




1) Вычислим $\Sigma_{xz}$: $A(0;0;2)$, $B(1;0;2)$, $C(1;0;1)$

$\frac{x-0}{1-0} = \frac{z-2}{1-2}$

$\bar v = \{y; z;$

$0 \le x \le 1$
$2 - x \le z \le 2$

$x = 2 - z$
$z = 2 - x$

2) Как найти вектор нормали не приб[егая] к градиенту: через векторное произведение

$\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \{0; 1; 1\}$

$\bar n = \{0; -1; -1\}$

3) Вычисление: $\iint\limits_{A'B'C'} \frac{y \cdot 0 - z(-1) + x(-1)}{|-1|}\, dxdz =$

$= \int_0^1 dx \int_{2-x}^2 (z - x)\, dz = \int_0^1 dx \left(\frac{z^2}{2} - xz\right)\Big|_{2-x}^2 =$

$= \int_0^1 dx \left(2 - 2x - \frac{(2-x)^2}{2} + x(2-x)\right) = \int_0^1 \Big(2 - 2x - 2 + 2x - \frac{x^2}{2}$

$$+ 2x + x^2)dx = \int_0^1 \left(2x - \frac{5}{2}x^2\right)dx = \left(x^2 - \frac{x^3}{2}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

## 3. Формула № 3

$$\iint_{\Sigma_n} (\bar{F}\cdot \bar{n}_0)\,d\sigma = \pm\iint_{\Sigma_{yz}} P\,dydz \pm \iint_{\Sigma_{xz}} Q\,dxdz \pm \iint_{\Sigma_{xy}} R\,dxdy$$

### Комментарии:

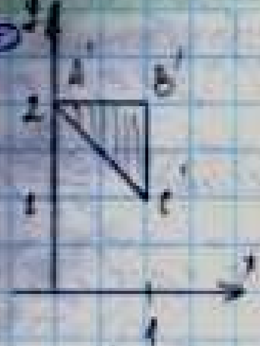
1) Знак „+" или „–" выбир. в зависимости от того какой угол (острый или тупой) образует вектор нормали с каждой из осей координат. Например, если образ. с Ox острый угол, то 1-ый интеграл идет со знаком „+"
2) Если одна из проекций обращается в нулевую площадку, то соответствующ. слагаемое обращается в ноль.
3) По сравнению с 1-ми двумя формулами объем вычислительн. интегр. по этой ф-ле увелич. в 3-и раза

4) Эта ф-ла применима в том случае если $\Sigma$: $z = z(x,y)$, $x = x(y,z)$, $y = y(x,z)$, что бывает редко!!!

5) Вытекает из того, что $\bar{n}_0 = (\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma)$ и $\cos\alpha\, d\sigma = \pm\, dydz$; $\cos\beta\, d\sigma = \pm\, dxdz$; $\cos\gamma\, d\sigma = \pm\, dxdy$

Пример: 1) Найдем $\bar{n}$ через $\overline{AB} \times \overline{BC} = \{0; 1; 1\}$ ⇒
$\Rightarrow \bar{n} = \{0; -1; -1\}$

$$= -\iint_{\Sigma_{xz}} -z\,dxdz - \iint_{\Sigma_{xy}} x\,dxdy =$$





2) Найдем $\Sigma_{xz}$ и $\Sigma_{xy}$

$\Sigma_{xz}$

$0 \le x \le 1$ $\quad$ $0 \le x \le 1$

$2-x \le z \le 2$ $\quad$ $0 \le z \le 1$

5) Вычисление

$= \int_0^1 dx \int_{2-x}^{2} z\,dz - \int_0^1 x\,dx \int_0^2 dy = \int_0^1 dx \frac{z^2}{2}\Big|_{2-x}^{2} - \int_0^1 x\,dx$

$= \int_0^1 \left(2 - \frac{(2-x)^2}{2}\right)dx - \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \int_0^1 \left(2 - 2 + 2x - \frac{x^2}{2}\right)dx - \frac{1}{2} =$

$= \left(x^2 - \frac{x^3}{6}\right)\Big|_0^1 - \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{2} = \frac{2}{6}$

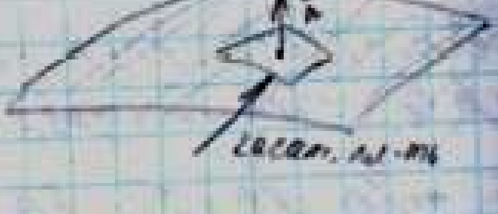
## Элементы теории поля

### 1. Понятие вектор-градиента ф-ции

а) Определение: Вектор-градиентом функции $u = u(x,y,z)$ назыв. векторное поле $\operatorname{grad} u = \{u'_x; u'_y; u'_z\}$

б) Геометрический смысл

Пусть $u(x,y,z) = 0$ – ур. поверхности




$\operatorname{grad} u \parallel \bar{n}$

в) Производная по направлению

$u = u(x,y,z)$, $M_0(x_0; y_0; z_0)$, $\bar{e}$ – вектор.

Определение. $\frac{\partial u}{\partial \bar{e}}(M_0) = \lim \frac{\Delta u}{\Delta e}$, где

$\Delta u = u(x_0+\Delta x; y_0+\Delta y; z_0+\Delta z) - u(x_0, y_0, z_0)$ –

приращение ф-ции

Выведем ф-лу для $\frac{\partial u}{\partial \bar{\ell}}$

Пусть $u = u(x;y;z)$ дифференцируемая функция $\Rightarrow$ $\Delta u = u'_x(M_0)\Delta x + u'_y(M_0)\Delta y + u'_z(M_0)\Delta z +$
$+ |\Delta \bar{\ell}| \cdot \alpha(|\Delta \bar{\ell}|)$, где $\alpha(|\Delta \bar{\ell}|)$ – б.м. ф. при $|\Delta \bar{\ell}| \to 0$

$$\Rightarrow \frac{\Delta u}{\Delta \bar{\ell}} = \frac{(\operatorname{grad} u \cdot \Delta \bar{\ell})}{|\Delta \bar{\ell}|} + \alpha(|\Delta \bar{\ell}|)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial \bar{\ell}} = \lim_{|\Delta \bar{\ell}| \to 0} \frac{\Delta u}{|\Delta \bar{\ell}|} = \lim_{|\Delta \bar{\ell}| \to 0} \left[ \left(\operatorname{grad} u \cdot \frac{\Delta \bar{\ell}}{|\Delta \bar{\ell}|}\right) + \alpha(|\Delta \bar{\ell}|) \right] =$$

$$= (\operatorname{grad} \bar{\ell}_0) = \frac{(\operatorname{grad} \cdot \bar{\ell})}{|\bar{\ell}|}$$

Формула для вычисления производной по направлению:

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial \bar{\ell}}(M_0) = \frac{(\operatorname{grad} u(M_0) \bar{\ell})}{|\bar{\ell}|}}$$

Пример: $u = x^2y - z$ $\quad M(1;1;1)$
$\quad N(2;3;3)$

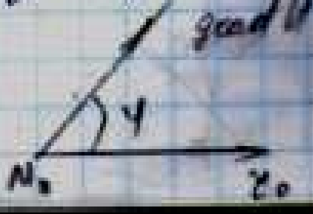
Вычислить $\frac{\partial u}{\partial \bar{\ell}}$, где $\bar{\ell} = \overline{MN}$

Решение: $\operatorname{grad} u = \{2xy; x^2; -1\}$
$\operatorname{grad} u(M) = \{2; 1; -1\}$ $\quad \bar{\ell} = \{1; 2; 2\}$
$\operatorname{grad} u(M)\bar{\ell} = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 2 = 2$ $\quad |\bar{\ell}| = \sqrt{1+4+4} = 3$

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{\ell}} = \frac{2}{3}$$

г) Вектор-градиент указывает направление наибольшего роста функции

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{\ell}} = (\operatorname{grad} u \cdot \bar{\ell}_0) = |\operatorname{grad} u| \cdot |\bar{\ell}_0| \cos\varphi = |\operatorname{grad} u| \cos\varphi$$




$\frac{\partial u}{\partial \bar{\ell}}$ max, если $\varphi = 0$, т.е.

$\bar{\ell}_0 \uparrow\uparrow \operatorname{grad} u$

⇒ grad u указывает направление наибол[ьшего]
го роста ф-ции.
Если $\varphi = \pi \Rightarrow \bar{\tau} \uparrow\downarrow \operatorname{grad} \bar{u} \Rightarrow \operatorname{grad} u$ указ-
вает направление наименьшего роста ф-ц[ии]

Замечание: если $\bar{\tau} \uparrow\uparrow \operatorname{grad} u$, то $\frac{\partial u}{\partial \tau} = |\operatorname{grad} u| =$
$= |\operatorname{grad} u| \Rightarrow$ Длина grad представляет собой наибольшую скорость роста ф-ции в данной точке.

2. Понятие дивергенции векторного поля:

а) Определение: Дивергенцией векторного поля $\bar{a} = \{P, Q, R\}$ наз. скалярное поле (числовая ф-ция)

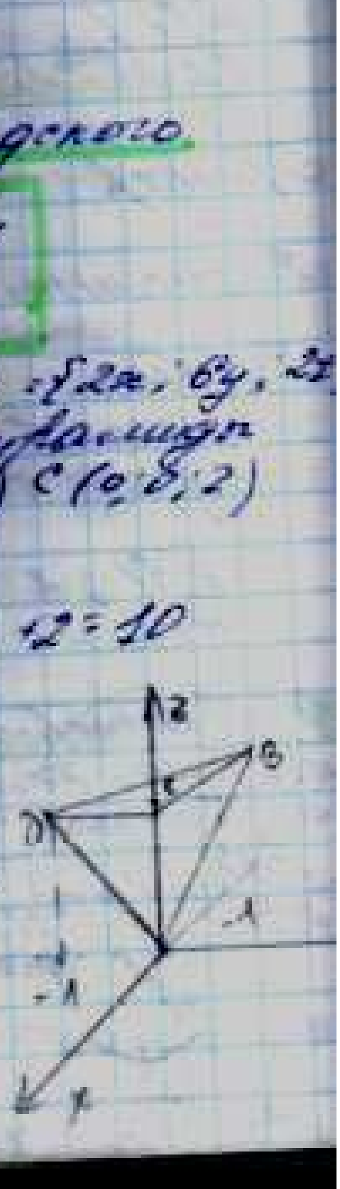
$$\operatorname{div} \bar{a} = P'_x + Q'_y + R'_z$$

б) Формула Гаусса-Остроградского

$$\boxed{\oiint\limits_{S_\varepsilon,\ \bar{n}\text{ - внешн}} (\bar{a}\cdot\bar{n}_0)\,d\sigma = \iiint\limits_{\Omega_\varepsilon} \operatorname{div} \bar{a}\,dx\,dy\,dz}$$

Пример: Вычислить поток $\bar{a} = \{2x, 6y, 2z\}$ через замкнутую поверхность пирамиды $ABCD$: $A(0,0,0)$ $B(-1,0,2)$ $C(0,0,2)$ $D(0,-1,2)$.

$$\operatorname{div} \bar{a} = (2x)'_x + (6y)'_y + (2z)'_z = 2 + 6 + 2 = 10$$




$$\Pi = \oiint\limits_{ABCD} (\bar{a}\cdot\bar{n}_0)\,d\sigma = \iiint\limits_{V_{ABCD}} 10\,dx\,dy\,dz =$$

$$= 10\cdot V_{ABCD} = 10\cdot\frac{1}{3} S_{\triangle BCD}\cdot CA = \frac{10}{3}\cdot\frac{1\cdot 1}{2}\cdot 2 =$$

$$= \frac{10}{3}$$

## в) Физический смысл дивергенции

Рассмотрим т. $M_0$, $M_0 \in \Omega_\varepsilon$

По теореме о среднем

$$\iiint\limits_{\Omega_\varepsilon} div\,\bar a\,dxdydz = div\,\bar a(M)\cdot V_\Omega$$


$$\Rightarrow div\,\bar a(M) = \frac{\iiint\limits_{\Omega_\varepsilon} div\,\bar a\,dxdydz}{V_{\Omega_\varepsilon}} =$$

$$\overset{\text{ф. О-О}}{=} \frac{\iint (\bar a\cdot \bar n_0)\,d\sigma}{V_{\Omega_\varepsilon}}$$

$$\lim_{V_\Omega\to 0} div\,\bar a(M) = \lim \frac{\iint\limits_{\Sigma_\varepsilon} (\bar a\cdot \bar n_0)\,d\sigma}{V_\Omega}$$

$$div\,\bar a(M_0) = \lim_{V_\Omega\to 0} \frac{\iint\limits_{\Sigma_\varepsilon} (\bar a\cdot \bar n_0)\,d\sigma}{V_\Omega}$$

$div\,\bar a(M_0)$ можно наз. плотностью источников

**Случаи:**

а) $div\,\bar a(M_0) > 0 \Rightarrow M_0$ наз. источником

б) $div\,\bar a(M_0) < 0 \Rightarrow M_0$ наз. стоком

в) $div\,\bar a(M_0) = 0 \Rightarrow \bar a$ наз. соленоидальным в т. $M_0$

Замечание: Поле скоростей любой реки будет соленоидальным

## 5. Понятие вектора-ротора для векторного поля

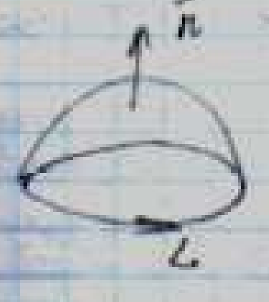
а) Определение: Вектор-ротором векторного поля $\bar a = \{P, Q, R\}$ наз. векторное поле

$$rot\,\bar a = \begin{vmatrix} \bar i & \bar j & \bar k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \bar i(R'_y - Q'_z) - \bar j(R'_x - P'_z) + \bar k(Q'_x - P'_y)$$

## б) Формула Стокса

$$\oint_L \bar{a}\cdot d\bar{l} = \iint_{\Sigma_L} (\mathrm{rot}\,\bar{a}\cdot \bar{n}_0)\, d\sigma$$

Комментарий:
Направление обхода кривой $L$ и направление вектора нормали $\bar{n}$ согласуются по правилу буравчика.




Пример. Вычислить циркуляцию векторного поля $\bar{a}=\{2y; -5z; x\}$ вдоль контура $\triangle ABC$, где $A(2;0;0)$, $B(0;3;0)$, $C(0;0;1)$

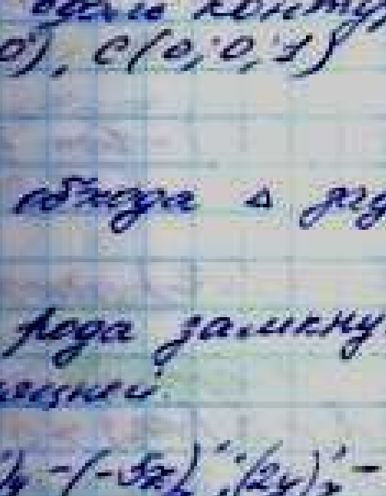
Комментарий.
1) Направление контура обхода $\triangle$ задается т. $ABC$

2) Криволин. интегр. 2-го рода замкнут. кривой будем наз. циркуляцией.

$$\mathrm{rot}\,\bar{a} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2y & -5z & x \end{vmatrix} = \{(x)'_y-(-5z)'_z; (2y)'_z-$$

$$-(x)'_x; (-5z)'_x-(2y)'_y\} = \{5; -1; -2\}$$

$$\bar{n} = \overline{AB}\times\overline{AC} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -2 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \{3; 2; 6\}$$

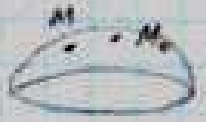



$$|\bar{n}| = \sqrt{9+4+36} = 7$$

$$(\mathrm{rot}\,\bar{a}\cdot\bar{n}_0) = \frac{\mathrm{rot}\,\bar{a}\cdot\bar{n}}{|\bar{n}|} = \frac{5\cdot3-1\cdot2-2\cdot6}{7} = \frac{1}{7}$$

$$\iint_{\Sigma_L} \frac{1}{7}\, dS = \frac{1}{7} S_{\triangle ABC} = \frac{1}{7}\cdot\frac{|\overline{AB}\times\overline{AC}|}{2} = \frac{1}{7}\cdot\frac{7}{2} = \frac{1}{2}$$

в) Физический смысл ротора.




По теореме о среднем

$$\iint_{\Sigma_0} (\operatorname{rot}\bar a\cdot \bar n_0)\,d\sigma = (\operatorname{rot}\bar a\cdot \bar n_0)(M)\cdot S_{\Sigma_0} \Rightarrow$$

$$(\operatorname{rot}\bar a\cdot \bar n_0)(M) = \iint_{\Sigma_0} (\operatorname{rot}\bar a\cdot \bar n_0)\,d\sigma \overset{\text{т. Стокса}}{=} \frac{\oint_L \bar a\,d\bar l}{S_{\Sigma_0}}$$

$$\lim_{S_{\Sigma_0}\to 0} (\operatorname{rot}\bar a\cdot \bar n_0)(M) = \lim_{S_{\Sigma_0}\to 0} \frac{\oint \bar a\,d\bar l}{S_{\Sigma_0}} \Rightarrow$$

$$\operatorname{rot}\bar a(M_0)\cdot \bar n_0 = \lim_{S_{\Sigma_0}\to 0} \frac{\oint \bar a\,d\bar l}{S_{\Sigma_0}} \Rightarrow$$ $\operatorname{rot}\bar a(M_0)$ характеризует направление от оси вокруг которой происходит вихри в векторном поле