Интегральное исчисление функции одной переменной. Дифференциальные уравнения

Неопределённый интеграл

1. Понятие первообразной

Опр: Функция $F(x)$ наз-ся первообразной для функции $f(x)$ на (a,b) если $F'(x) = f(x)$ на (a,b)

Примеры: 1) $f(x) = x$ $\quad F(x) = \frac{x^2}{2}$, т.к.

$\left(\frac{x^2}{2}\right)' = \frac{1}{2}x^{2\prime} = \frac{1}{2}\,2x = x$

$F_2(x) = \frac{x^2}{2} - 5$ т.к. $\left(\frac{x^2}{2} - 5\right)' = x$

Теорема: Пусть $F_1(x)$, $F_2(x)$ - первообразные для $f(x)$, тогда $F_2(x) = F_1(x) + C$

Доказательство

рассмотрим $\varphi(x) = F_2(x) - F_1(x)$

$\varphi'(x) = (F_2 - F_1)' = F_2' - F_1' = f(x) - f(x) = 0$

Теорема Лагранжа для ф-ии $f(x)$

Пусть x_0 - фиксированная точка
x - произвольная

$\varphi(x) - \varphi(x_0) = \varphi'(c)(x - x_0) = 0 \Rightarrow$ для произвольного $x \Rightarrow$
$\varphi(x) = \varphi(x_0) = const$

$F_2 - F_1 = const \Rightarrow F_2 = F_1 + const$

Условие существования

Теорема

Если $f(x)$ - непрерывная функция, то существует первообразная $f(x)$

2. Понятие неопределённого интеграла

Опр: Неопред. интеграл функции $f(x)$ наз-ся множество всех её первообразных.

Обозначение неопределённого интеграла

$$\int f(x)dx$$

Комментарии

1) $\int$ - символ интеграла, интеграл используется для вычисления S фигур

2) $f(x)$ - подынтегральная функция

3) $f(x)dx$ - называется подынтегральным выражением

Иногда подинтегр. выр. записывают в виде $f(x)$ и $u(x)$, что означает $\int f(x)u(x)dx$

4) Роль dx

1) dx - правая скобка

2) dx - указывает на переменное интеграл.

(если часть подынтегр. фун-и зависит от параметра)

3) Они играют огромную роль в методах интегрирования

Теорема (о виде неопред. интеграла)

Если $F(x)$ - первообразная для $f(x)$, то $\int f(x)dx = F(x) + const$, где C - произвольная константа

3. Таблица простейших интегралов

1) $\int dx = x + C$;
2) $\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C$;
3) $\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C$;
4) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$;
5) $\int x^p dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} + C$, $p \neq -1$
6) $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$
7) $\int e^x dx = e^x + C$
8) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
9) $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$
10) $\int \cos x\,dx = \sin x + C$
11) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tg\,x + C$
12) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctg\,x + C$
13) $\int tg\,x\,dx = -\ln|\cos x| + C$
14) $\int ctg\,x\,dx = \ln|\sin x| + C$
15) $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + C$
16) $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$
17) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = arcsin\frac{x}{a} + C$
18) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$

Проверка (17) формула

$$\left(arcsin\frac{x}{a}\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{\sqrt{\frac{a^2-x^2}{a^2}}} \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}} \cdot \frac{1}{a} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

4. Свойства неопределенного интеграла

а) $\int c \cdot u(x)dx = c\int u(x)dx$

б) $\int (u(x) \pm v(x))dx = \int u(x)dx \pm \int v(x)dx$

Замечание:

На свойствах „а" и „б" основан метод „разложения"

в) Любая табличная формула остается справедливой если заменить на любую дифференцируемую $u(x)$

Док-во:

Пусть $\int f(x)dx = F(x) + C$ - некоторая табличная формула

Док-во формулы:

$\int f(u(x))du(x) = F(u(x)) + C$ (*)

действительно из табличной формулы, что $y \Rightarrow F'(x) = f(x)$, тогда

$(F(u(x)))' = F'(u(x)) \cdot u'(x) = \underline{f(u(x)) \cdot u'(x)}$

но $\int f(u(x))\, d\,u(x) = \underline{\int f(u(x))\, u'(x)dx} \Rightarrow$

формула справедлива (*)

Примеры: $\int \cos x\,dx = \sin x + C$ — табл. ф-ла

$\int \cos\sqrt{x}\, d\sqrt{x} = \sin\sqrt{x} + C$ — справедл. ф-ла

$\int \cos(tg\,x)\, d(tg\,x) = \sin(tg\,x) + C$ — справедл. ф-ла

Замечание:

На свойствах 6° основан метод интегрирования, называемый методом подведения под знак дифференциала.

5. Метод разложения

Суть: Используя правила разложения выражения в сумму (разность) слагаемых, почленное деление (и т.д.)

Свойства неопред. интеграла а) и б)

Пример: $\int(\sqrt{x}-2)(3+x^2)dx = \int(3\sqrt{x}+x^2\sqrt{x}-6-$

$-2x^2)dx = \int 3\sqrt{x}dx + \int x^{5/2}dx - \int 6dx -$

$-\int 2x^2dx = 3\frac{x^{3/2}}{3/2} + \frac{x^{7/2}}{7/2} - 6x - 2\frac{x^3}{3} + C =$

$= 2\sqrt{x^3} + \frac{2}{7}\sqrt{x^7} - 6x - \frac{2}{3}x^3 + C$

Замечание:

Произвольная константа (const) после исчезает последнего знака интеграла.

а) $\int \frac{\cos^2 x - 3\sin x}{\cos x}dx = \int\left(\frac{\cos^2 x}{\cos x} - \frac{3\sin x}{\cos x}\right)dx =$

$= \int \cos x\,dx - 3\int tg\,x\,dx = \sin x + 3\ln|\cos x| + C$

6. Метод подведения под знак дифференциала

Метод основан на преобразовании дифференциала и на свойстве неопределенного интеграла в пункте 6)

Преобразование дифференциала

1) $du = d(u \pm C)$

2) $d(Cu) = C\,du$

3) $du = \frac{1}{C}\,d(Cu)$

4) $f\,dx = dF(x)$ – внесение множителя под знак дифференциала

Пример

$dx^2 = d(x^2-3) = d(x^2+5)$

$d\frac{x^2}{2} = \frac{1}{2}\,dx^2$

$dx^2 = \frac{1}{5}\,d(5x^2) = \frac{1}{3}\,d(3x^2)$

$x\,dx = d\frac{x^2}{2}$ $\quad \sin x\,dx = d(-\cos x)$ $\quad \frac{1}{x}dx = d\ln x$

Примеры:

1) $\int e^{3x-2}dx = \frac{1}{3}\int e^{3x-2}d3x = \frac{1}{3}\int e^{3x-2}d(3x-2) =$
$= \frac{1}{3}\int e^u du = \frac{1}{3}e^u + C = \frac{1}{3}e^{3x-2} + C$

2) $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx = \int \cos\sqrt{x}\,\frac{1}{\sqrt{x}}dx = \int \cos\sqrt{x}\,d(2\sqrt{x}) =$

$= 2\int \cos\sqrt{x}\, d\sqrt{x} = 2\int \cos u\, du = 2\sin u + C =$
$= 2\sin\sqrt{x} + C$

1. Метод подведения под знак диф-ла 20.02.13

Пример:

1) $\int \frac{e^x}{\sqrt{2-3e^x}}dx = \int e^x \frac{1}{\sqrt{2-3e^x}}dx = \int \frac{d e^x}{\sqrt{2-3e^x}} =$

$\boxed{\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}}$ $= -\frac{1}{3}\int \frac{d(-3e^x)}{\sqrt{2-3e^x}} = -\frac{1}{3}\int \frac{d(2-3e^x)^u}{\sqrt{2-3e^x}} =$

$= -\frac{1}{3}\int \frac{du}{\sqrt{u}} = -\frac{1}{3} 2\sqrt{u} = -\frac{1}{3} 2\sqrt{u} + C = -\frac{2}{3}\sqrt{2-3e^x} + C$

2) $\int \frac{e^{\frac{5}{x}}}{x^2}dx = \int e^{\frac{5}{x}} \frac{1}{x^2} dx = \int e^{\frac{5}{x}} d\left(-\frac{1}{x}\right) =$

$= -\int e^{\frac{5}{x}} d\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{5}\int e^{\frac{5}{x}} d\left(\frac{5}{x}\right)^u = -\frac{1}{5}\int e^u du =$

$= -\frac{1}{5}e^{\frac{5}{x}} + C$

2. Интегрирование по частям

Формула $\boxed{\int u\,dv = uv - \int v\,du}$

Вывод: $(uv)' = u'v + uv' \Rightarrow \int (uv)'dx = uv + C$

$\int (uv)'dx = \int (u'v + uv')dx = \int u'v\,dx + \int uv'\,dx \Rightarrow$

$\Rightarrow \int u'v\,dx + \int uv'\,dx = uv + C$

$\int uv'\,dx = uv - \int vu'\,dx + C = \int u\,dv =$

$= uv - \int v\,du$

Замечание:

Интегралы, требующие для своего решения внесения под знак дифференциала и интегрирования по частям, начинают решать одинаково: если не получилось свести под знак дифференциала, если после внесения множителя под интеграл сохранилось сложное выражение, то нужно использовать метод подведения под знак дифференциала. Если сначала используют метод интегрирования по частям.

Пример: $\int \frac{\ln x}{x^3}dx = \int \ln x \cdot \frac{1}{x^3}dx =$

$= \int \ln x \, d\left(\frac{x^{-2}}{-2}\right)$ (используем ф-лу интегриров. по частям)

$= \ln x\left(\frac{x^{-2}}{-2}\right) - \int \frac{x^{-2}}{-2}\, d\ln x = -\frac{\ln x}{2x^2} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{x}dx$

Замечание:

При внесении функции под знак диф-ла ищут знак диф-ла, а при вынесении из под диф-ла ищем производную.

$= -\frac{\ln x}{2x^2} + \frac{1}{2}\int x^{-3}dx = -\frac{\ln x}{2x^2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^{-2}}{-2} + C =$

$= -\frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} + C$

3. Классификация задач, решаемых при помощи формулы интегрирования по частям

а) Безальтернативная ситуация — ситуация, под знак диф-ла вносится только 1 множитель

$$\int x \operatorname{arctg} x\,dx = \int \operatorname{arctg} x \, d\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x -$$

$$- \int \frac{x^2}{2}\, d(\operatorname{arctg} x) = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{(x^2+1)-1}{x^2+1}\,dx = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\left(\int dx - \int \frac{dx}{x^2+1}\right)$$

$$= \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C$$

б) Альтернативная ситуация (внесение двух множителей)

Замечание: под знак дифф-ла вносят не многочлен.

Таблица примеров многочлена

N	Степень	Многочлен
1	2	$2x^2-1$
2	2	x^2
3	1	$x+5$
4	1	$5x$
5	0	2

$\int (2x-1)\sin 2x\,dx =$

$\int 2x-1\,dx = \int 2x\,dx - \int dx = 2\frac{x^2}{2} - x + C = x^2 - x + C$

$\int \sin 2x\,dx = \int \frac{1}{2}\sin 2x\,dx = -\frac{1}{2}\cos 2x + C$

$= \int (2x-1)\,d\left(-\frac{\cos 2x}{2}\right) = -\frac{\cos 2x}{2}(2x-1) -$

$- \int -\frac{\cos 2x}{2}\,d(2x-1) = -\frac{\cos 2x}{2}(2x-1) +$

$+ \frac{1}{2} \cdot 2 \int \cos 2x\,dx = -\frac{\cos 2x}{2}(2x-1) + \frac{1}{2}\sin 2x$

в) Ситуация с одним множителем

$\int \ln x\,dx = x\ln x - \int x\,d\ln x = x\ln x -$

$- \int dx = x\ln x - x + C$

г) Ситуация с уравнением

$\int e^x \cos x\,dx = \int \cos x\,d(e^x) = \cos x \cdot e^x -$

$- \int e^x\,d\cos x = \cos x \cdot e^x + \int e^x \sin x\,dx =$

$= \cos x \cdot e^x + \int \sin x\,de^x = \cos e^x + \sin e^x -$

$- \int e^x\,d\sin x = \cos x\,e^x + \sin e^x - \int e^x \cos x\,dx$

$z = \int e^x \cos x\,dx$; $z = (\cos x + \sin x)e^x - z$

$2z = (\cos x + \sin x)e^x$ $z = \frac{\cos x + \sin x}{2}e^x + C$

$\int e^x \cos x\,dx = \frac{\cos x + \sin x}{2} e^x + C$

4. Метод замены переменной

Формула: Пусть функцию заменим другой — $x = \omega(t)$ — дифференциальная функция имеющая обратную функцию $t = \omega^{-1}(x)$, тогда

$$\int f(x)\,dx = \int f(\omega(t))\,d\omega(t) = \int f(\omega(t))\,\omega'(t)\,dt \Big|_{t=\omega^{-1}(x)}$$

Примеры.

1) $\int \frac{dx}{e^x-1} = \int \frac{d(\ln(t+1))}{t} = \int \frac{\frac{1}{t+1}\,dt}{t} = \int \frac{dt}{t(t+1)} =$

$t = e^x - 1$
$t+1 = e^x$
$x = \ln(t+1)$

$= \int \frac{(1+t)-t}{t(t+1)}\,dx = \int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right)dx =$
$= \ln|t| - \ln|t+1| + C = \ln|e^x-1| -$
$- \ln e^x + C = \ln\left|\frac{e^x-1}{e^x}\right| + C$

2) $\int \frac{x}{\sqrt{x-1}}\,dx = \int \frac{t^2+1}{t}\,d(t^2+1) = 2\int (t^2+1)\,dx =$

$t = \sqrt{x-1}$
$t^2 = x-1$
$t^2+1 = x$

$= 2\left(\frac{t^3}{3} + t\right) + C = 2\left(\frac{(\sqrt{x-1})^3}{3} + \sqrt{x-1}\right) + C$

7.02.13

1. Интеграл вида $\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$,

$\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$ интеграл с квадратным трехчленом в знаменателе.

Замена: $t = \frac{(ax^2+bx+c)'}{2}$

Пример: $\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2-4x+5}}\,dx =$

$t = \frac{(x^2-4x+5)'}{2} = \frac{2x-4}{2} = x-2 \quad x = t+2$

$x+3 = t+2+3 = t+5$

$x^2-4x+5 = (t+2)^2-4(t+2)-5 = t^2+4t+4-4t-8+5 = t^2+1$

Точка самоконтроля: после раскрытия скобок слагаемые с t должно сократиться

$dx = d(t+2) = (t+2)'dt = dt$

$= \int \frac{t+5}{\sqrt{t^2+1}}\,dt = \int \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\,dt + \int \frac{5}{\sqrt{t^2+1}}\,dt = \int \frac{d\frac{t^2}{2}}{\sqrt{t^2+1}} +$

$+ 5\ln|t+\sqrt{t^2+1}| = \frac{1}{2}\int \frac{d(t^2+1)}{\sqrt{t^2+1}} + 5\ln|t+\sqrt{t^2+1}| =$

$= \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{t^2+1} + 5\ln|t+\sqrt{t^2+1}| + C = \sqrt{x^2-4x+5} +$

$+ 5\ln|x-2+\sqrt{x^2-4x+5}| + C$

2. Интегрирование рациональных функций.

Опр: рац функцией наз-ся функция вида

$$f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)},$$ где

$P_n(x)$, $Q_m(x)$ — многочлены степеней n, m.

а) Понятие правильной и неправильной дроби

Опр: Правильной дробью будем называть рациональную функцию у которой степень числителя меньше степени знаменателя

Пример: $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$

Опр: Неправильной дробью называют рац функцию у которой степень числителя не меньше степени знаменателя.

Пример: $f(x) = \frac{x^3}{x^2+1}$

Теорема №1:

Любую неправ-ую дробь можно разложить в сумму мн-го члена и прав. дроби

Это разложение достигается путём деления многочлена на многочлен.

Пример: $f(x) = \frac{x^3+2x^2-x+4}{x+5}$

$$
\begin{array}{r|l}
x^3+2x^2-x+4 & x+5 \\
\underline{x^3+5x^2} \qquad\qquad & \overline{x^2-3x+14} \text{ — частное} \\
-3x^2-x+4 & \\
\underline{-3x^2-15x} \quad\; & \\
14x+4 & \\
\underline{14x+70} & \\
-66 \text{ — остаток} &
\end{array}
$$

Напоминание: $\frac{17}{2} = 8 + \frac{1}{2}$

$$f(x) = x^2-3x+14 + \frac{-66}{x+5} = x^2-3x+14 - \frac{66}{x+5}$$

Вывод: интегрирование неправильной дроби сводится к интегрированию многочлена и правильной дроби (см. ниже)

б) Разложение правильной дроби в сумму простейших дробей

Опр: Простейшими дробями 2-го типа будем называть дроби вида

$\frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^p}$, $p \in N$, ax^2+bx+c — неразложимый квадратный трехчлен ($D<0$)

Теорема №2:

Любая правильная дробь раскладывается в сумму простейших дробей 1 и 2 типа

Алгоритм разложения

Объясняется на примере

Пример: $f(x) = \frac{x^3+2x^2-x+4}{x^4-5x^3+4x^2}$

Алгоритм:

1 шаг: Разложить знаменатель на множители вида $(ax+b)^p$, $(ax^2+bx+c)^p$ $(D<0)$

$$x^4-5x^3+4x^2 = x^2(x^2-5x+4) = x^2(x-1)(x-4)$$

$D=25-16=9$ $\quad x_{1,2}=\frac{5\pm3}{2}=1;4$

Вывод: Получили разложение на множители вида $(ax+b)^p$

$x^2=(1x+0)^2$ $\quad a=1;\ b=0;\ p=2$

$(x-1)=(1x-1)^1$ $\quad a=1;\ b=-1;\ p=1$

$(x-4)=(1x-4)^1$ $\quad a=1;\ b=-4;\ p=1$

2 шаг: Записать формулу разложения с неопределёнными коэффициентами

$$\frac{x^3+2x^2-x+4}{x^4-5x^3+4x^2} = \frac{x^3+2x^2-x+4}{x^2(x-1)(x-4)} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x-1}+$$

$$+\frac{D}{x-4} =$$

$x^2 \to \frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}$

$(x-1)^1 \to \frac{C}{x-1}$

$(x-4)^1 \to \frac{D}{x-4}$

Правило:

Каждому множителю в разложении знаменателя будет соответствовать сумма простейших дробей по следующему правилу

$$(ax+b)^s \to \frac{A}{ax+b} + \frac{B}{(ax+b)^2} + \frac{C}{(ax+b)^3} \dots \frac{D}{(ax+b)^s}$$

$$(ax^2+bx+c)^s \to \frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c} + \frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2} \dots \frac{A_nx+B_n}{(ax^2+bx+c)^s}$$

3 шаг: Найти неопределённые коэффициенты. Сложить простейшие дроби с неопределёнными коэффициентами

$$= \frac{Ax(x-1)(x-4)+B(x-1)(x-4)+Cx^2(x-4)+Dx^2(x-1)}{x^2(x-1)(x-4)}$$

Приравняем их числитель к полученному

$$= Ax(x-1)(x-4)+B(x-1)(x-4)+Cx^2(x-4)+Dx^2(x-1)$$
$$= x^3+2x^2-x+4$$

Из этого равенства можно получить уравнения для отыскания неопределённых коэффициентов

Существует 2 способа получ. этих уравнений

1 способ: Приравнять значения левой и правой части уравнения в нулях знаменателя

$x=0$	$4=4B \Rightarrow B=1$
$x=1$	$6=-3C \Rightarrow C=-2$
$x=4$	$96=48D \Rightarrow D=2$
x^3	$1=A+C+D \Rightarrow A=1$

2 способ. Приравняем коэф-ты при соответствующих степенях в левой и правой частях

4 шаг: Коэффициенты найдены

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x-1}+\frac{2}{x-4}$$

в) Интегрирование простейших дробей

$$\int\frac{x^3+2x^2-x+4}{x^4-5x^3+4x^2}dx=\int\frac{dx}{x}+\int\frac{dx}{x^2}-2\int\frac{d(x-1)}{x-1}+$$

$$2\int\frac{d(x-4)}{x-4}=\ln|x|-\frac{1}{x}-2\ln|x-1|+2\ln|x-4|+C=$$

$$=\ln\left|\frac{x(x-4)^2}{(x-1)^2}\right|-\frac{1}{x}+C$$

06.03.13 1. Интегрирование тригонометрических выражений

а) универсальная подстановка

$$\int\frac{dx}{1+\cos x}=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}}=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2}{1+t^2}}=\int dt=t+C=\operatorname{tg}\frac{x}{2}+C$$

$t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$

$$\cos x=\frac{\cos x}{1}=\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\sin x=\frac{\sin x}{1}=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2}$$

$x=2\operatorname{arctg}t$ $\quad\boxed{dx=\frac{2}{1+t^2}dt}$

$$\boxed{\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}\qquad \sin x=\frac{2t}{1+t^2}}$$

б) Подстановка: $t=\operatorname{tg}x$

Замечание: эту подстановку используем в случае если подынтегральная функция содержит $\cos^2 x$, $\sin^2 x$

$x=\operatorname{arctg}t$ $\quad dx=\frac{1}{1+t^2}dt$

$1+\operatorname{tg}^2x=\frac{1}{\cos^2x}$ $\quad \cos^2x=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2x}=\frac{1}{1+t^2}$

$\sin^2x+\cos^2x=1$ $\quad \sin^2x=1-\cos^2x=1-\frac{1}{1+t^2}=\frac{t^2}{1+t^2}$

$$dx = \frac{dt}{1+t^2}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}, \quad \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}$$

$$\int \frac{dx}{2+\cos^2 x} = \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{2+\frac{1}{1+t^2}} = \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{3+2t^2}{1+t^2}} =$$

$$= \int \frac{dt}{3+2t^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+\frac{3}{2}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{t}{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}} + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,x}{\sqrt{3}} + C$$

б) $\int \sin 2x \cos 3x \, dx =$

$$\boxed{\begin{aligned} \sin\alpha\cos\beta &= \tfrac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right) \\ \cos\alpha\cos\beta &= \tfrac{1}{2}\left(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right) \\ \sin\alpha\sin\beta &= \tfrac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)-\sin(\alpha+\beta)\right) \end{aligned}}$$

$$= \frac{1}{2}\int(\sin 5x - \sin(-x))\,dx = \frac{1}{2}\int \sin 5x\,dx -$$

$$- \frac{1}{2}\int \sin x\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}\int \sin 5x\,d5x - \frac{1}{2}\int \sin x\,dx =$$

$$= -\frac{1}{10}\cos 5x + \frac{1}{2}\cos x + C$$

г) Использование формулы понижения степени

$$\boxed{\begin{aligned} \cos^2 x &= \tfrac{1}{2}(1+\cos 2x) \\ \sin^2 x &= \tfrac{1}{2}(1-\cos 2x) \\ \sin x\cos x &= \tfrac{1}{2}\sin 2x \end{aligned}}$$

$$\int \cos^4 x\,dx = \int (\cos^2 x)^2\,dx = \int \left(\frac{1}{2}(1+\cos 2x)\right)^2 dx =$$

$= \frac{1}{4}\int(1+2\cos 2x+\cos^2 2x)dx = \frac{1}{4}\int(1+2\cos 2x+$

$+\frac{1}{2}(1+\cos 4x))dx = \frac{1}{4}\int(\frac{3}{2}+2\cos 2x+\frac{1}{2}\cos 4x)dx$

$= \frac{1}{4}(\frac{3}{2}x+\sin 2x+\frac{1}{8}\sin 4x)+C$

8) использование метода подведения под знак дифференциала

$\int \sin^2 x\cos^3 x\,dx = \int \sin^2 x\cos^2 x\cos x\,dx =$

$= \int \sin^2 x(1-\sin^2 x)\,d\sin x = \int u^2(1-u^2)du =$

$= \int(u^2-u^4)du = \frac{u^3}{3}-\frac{u^5}{5}+C = \frac{\sin^3 x}{3}-\frac{\sin^5 x}{5}+C$

$\int\frac{\sin^2 x}{\cos x}dx = \int\frac{\sin^2 x\cos x}{\cos^2 x}dx = \int\frac{\sin^2 x\,d\sin x}{1-\sin^2 x} =$

$= \int\frac{u^2 du}{1-u^2} = -\int\frac{u^2}{u^2-1}du = -\int\frac{(u^2-1)+1}{u^2-1}du =$

$= -\int(1+\frac{1}{u^2-1})du = -(u+\frac{1}{2}\ln|\frac{u-1}{u+1}|)+C =$

$= -\sin x-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin x-1}{\sin x+1}\right|+C$

2. Гиперболические функции

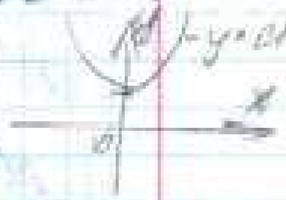
Опр: Гиперболическим cos-ом наз-ся функция

$ch x = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ $\quad ch(-x) = ch(x) \Rightarrow$ это чётная функция

$y' = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ $y' = 0$ $e^x = e^{-x}$ $x = -x$

$2x = 0$ $x = 0$

$-$ 0 $+$



$y'' = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) > 0 \Rightarrow$ график $\cup$

Опр: гиперболическим sin-ом наз-ся

$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ $y' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} > 0$

y- возрастающая нечётная функция

$\operatorname{sh}(-x) = \frac{e^{-x} - e^{x}}{2} = -\operatorname{sh} x \Rightarrow$

$y'' = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ $y'' = 0$ при $x = 0$

$-$ 0 $+$

$\sin 0 = 0$ $\cos 0 = 1$

$\operatorname{sh} 0 = 0$ $\operatorname{ch} 0 = 1$

Формулы тригонометрии	Формулы гиперболич
1) $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$	1) $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$
2) $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$	2) $\operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x$
3) $(\cos x)' = -\sin x$	3) $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$
4) $(\sin x)' = \cos x$	4) $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$
5) $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$	5) $\operatorname{th} x = \operatorname{sh} x / \operatorname{ch} x$
6) $\operatorname{ctg} = \cos x / \sin x$	6) $\operatorname{cth} x = \operatorname{ch} x / \operatorname{sh} x$
7) $\int \cos x\, dx = \sin x$	7) $\int \operatorname{ch} x = \operatorname{sh} x + C$
8) $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$	8) $\int \operatorname{sh} x\, dx = \operatorname{ch} x + C$
9) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$	9) $\int dx / \operatorname{ch}^2 x = \operatorname{th} x + C$
10) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$	10) $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$

$y = \arccos\frac{x}{3}$

$0 \le y \le \pi$

$\cos y = \frac{x}{3}$

$\sin y = \sqrt{1 - \cos^2 y}$

$= \sqrt{1 - \frac{x^2}{9}}$

3. Интегрирование иррациональных выражений

а) Случай рациональной замены.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} = \int \frac{6t^5\,dt}{\sqrt{t^6}+\sqrt[3]{t^6}} = 6\int \frac{t^5\,dt}{t^3+t^2} = 6\int \frac{t^3\,dt}{(t+1)} =$$

$$x = t^6 \quad dx = dt^6 = 6t^5\,dt$$

$$= 6\int \frac{(t^3+1)-1}{t+1}\,dt = 6\int \left(\frac{(t+1)(t^2-t+1)}{t+1} - \frac{1}{t+1}\right)dt =$$

$$= 6\int\left(t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1}\right)dt = 6\left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t - \ln|t+1|\right) +$$

$$+ C = 6\left(\frac{\sqrt[6]{x^3}}{3} - \frac{\sqrt[6]{x^2}}{2} + \sqrt[6]{x} - \ln|\sqrt[6]{x}+1|\right) + C = 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} +$$

$$+ 6\sqrt[6]{x} - 6\ln|\sqrt[6]{x}+1| + C$$

б) Тригонометрическая замена

$$\int \sqrt{9-x^2}\,dx = \qquad x = 3\cos t \quad t = \arccos\frac{x}{3}$$

$$\sqrt{9-x^2} = \sqrt{9-9\cos^2 t} = 3\sqrt{1-\cos^2 t} = 3\sqrt{\sin^2 t} = 3\sin t$$

$$dx = d(3\cos t) = -3\sin t\,dt$$

$$= \int 3\sin t\,(-3\sin t)\,dt = -9\int \sin^2 t\,dt = -9\cdot\frac{1}{2}\int(1-\cos 2t)\,dt =$$

$$= -\frac{9}{2}\left(t - \frac{\sin 2t}{2}\right) + C = -\frac{9}{2}\left(\arccos\frac{x}{3} - \frac{\sin 2\left(\arccos\frac{x}{3}\right)}{2}\right) + C$$

$$= -\frac{9}{2}\left(\arccos\frac{x}{3} - \frac{2\sin\arccos\frac{x}{3}\cdot\cos\arccos\frac{x}{3}}{2}\right) + C =$$

$$= -\frac{9}{2}\left(\arccos\frac{x}{3} - \sqrt{1-\frac{x^2}{9}}\cdot\frac{x}{3}\right) + C$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-9}} = \quad x = \frac{3}{\cos t} \quad \sqrt{x^2-9} = \sqrt{\frac{9}{\cos^2 t} - 9} =$$

$$= 3\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t} - 1} = 3\sqrt{tg^2 t} = 3 tg t \qquad 1 + tg^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$tg^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$$

$$dx = d\left(\frac{3}{\cos t}\right) = 3\left(-\frac{1}{\cos^2 t} \cdot (-\sin t)\right)$$

$$= \int \frac{\frac{3\sin t}{\cos^2 t}\,dt}{\frac{3}{\cos t} \cdot 3 tg t} = \frac{1}{3} \frac{tg t\,dt}{tg t} = \frac{1}{3}\int dt = \frac{1}{3} t + C$$

$$= \frac{1}{3} \arccos \frac{3}{x} + C \qquad x = \frac{3}{\cos t} \quad \cos t = \frac{3}{x} \quad t = \arccos \frac{3}{x}$$

в) Гиперболическая замена

$$\int \sqrt{1+x^2}\,dx = \int ch t\, ch t\, dt = \int ch^2 t\, dt =$$

$$x = sh t \quad \sqrt{1+x^2} = \sqrt{1 + sh^2 t} = \sqrt{ch^2 t} = ch t$$

$$ch^2 t - sh^2 t = 1 \qquad dx = d\, sh t = ch t\, dt$$

Формула понижения степени

$$ch 2t = ch^2 t + sh^2 t = ch^2 t + ch^2 t - 1 = 2ch^2 t - 1$$

$$\Rightarrow ch^2 t = \frac{1}{2}(1 + ch 2t)$$

$$= \frac{1}{2}\int (1 + ch 2t)\,dt = \frac{1}{2}\left(t + \frac{sh 2t}{2}\right) + C = \frac{1}{2} \cdot$$

$$\cdot \left(arsh x + \frac{sh(2 arg sh x)}{2}\right) + C$$

13.03.13

Определённый интеграл

1. Понятие определённого интеграла

Пусть $f(x)$ определена на $[a;b]$

Опр: разбиением отрезка $[a;b]$ будем называть набор интервалов $[x_0,x_1]$, $[x_1,x_2]$ ... $[x_{n-1},x_n]$ с выбранными внутренними точками $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \dots \xi_n$

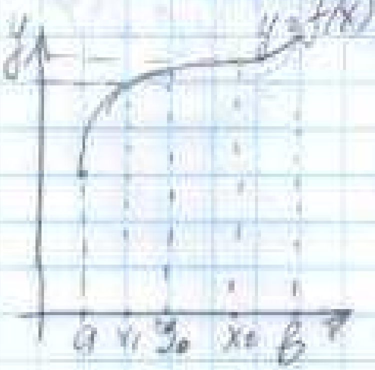
Опр: под диаметром разбиения будем называть наибольшую из длин отрезков разбиения

$$d = \max_{i=\overline{1,n}} (x_i - x_{i-1})$$

Опр: интегральной суммой функции $f(x)$ для разбиения R будем называть

$$I_R = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

Геометрический смысл I_R



$f(\xi_2)(x_2-x_1)$ - площадь выделенного прямоугольника

Опр: σ ABb – наз-ся криволинейной трапецией

Интегральная сумма ≈ площади криволинейной трапеции

Равенство становится более точным если диаметр разбиения → 0

Опр: Определенным интегралом от f(x) на отрезке [a,b] наз-ся число которое

$\int_a^b f(x)dx = \lim_{d(R_n)\to 0} I_{R_n}$, где

R_n – последовательность разбиений для которых $d(R_n)\to 0$, причем lim не зависит от выбора помеч. разбиений

Замечание:

1) Числа a и b наз-ся нижним и верхним пределами интегрирования

2) Если a>b, то по определению

$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

3) Если a = b, то по определению $\int_a^a f(x)dx = 0$

2. Свойства определенного интеграла

а) Если f(x) интегрируема на [a,b], то опред. интеграл всегда существует

б) $\int_a^b c f(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$

в) $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x) \pm \int_a^b g(x)$

г) Свойство аддитивности для любых a, b, c:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Проиллюстрируем геометрически $a < c < b$

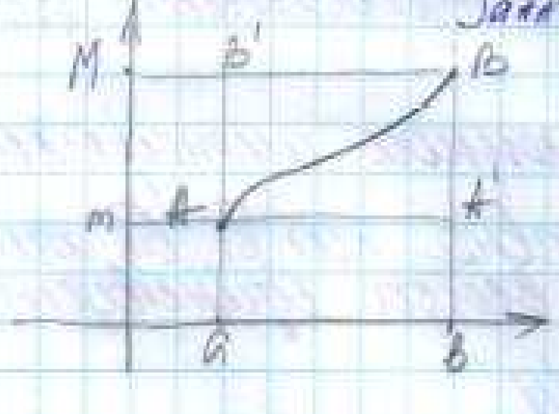
$S_{aABb} = S_{aACc} + S_{cCBb}$

д) Если $f(x) \ge 0$, то опред интеграл $\int_a^b f(x)dx \ge 0$

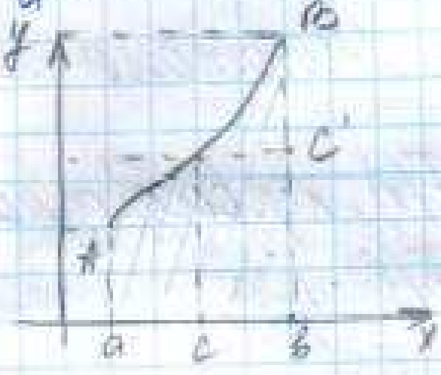
е) Если $m \le f(x) \le M$ на $[a;b]$

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

$S_{aAA'b} \le S_{aABb} \le S_{aB'Bb}$



Теорема о среднем:
Существует $c \in (a,b)$:
$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$



$S_{aABb} = S_{aCC'b}$

7) Если $f(x) \le g(x)$, то $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$

3. Формула Ньютона-Лейбница

Теорема: Функция $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ (интеграл с переменным верхним пределом) $\Phi(x)$ является первообразной для функции $f(x)$

Доказательство: докажем что $\Phi'(x) = f(x)$

$$\Phi'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Phi(x+\Delta x) - \Phi(x)}{\Delta x} = \longrightarrow$$

$$\Phi(x+\Delta x) - \Phi(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt =$$

из св-ва аддитивности $= \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt =$

по теореме о среднем $= f(c)(x+\Delta x - x) = f(c)\Delta x$, $x < c < x+\Delta x$

$\rightarrow \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{f(c)\Delta x}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} f(c) = f(x) \Rightarrow$

$x < c < x+\Delta x \Rightarrow$ при $\Delta x \to 0$ $c \to x$

$= \Phi'(x)$ – первообразная

Теорема: Формула Ньютона-Лейбница

Если $f(x)$ – непрерывна $F(x)$ – первообразная для $f(x)$, то

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Замечание: $F(b) - F(a) = F(x)\big|_a^b$

Вывод формулы:

① $F(x)$, $\Phi(x)$ – первообразные для $f(x)$, поэтому (см. сл. 1)

$\Phi(x) = F(x) + C$

Пусть $x = a$ $\Phi(a) = F(a) + C$ $0 = F(a) + C$ $C = -F(a)$

$\Phi(x) = F(x) - F(a)$

Пусть $x = b$ $\Phi(b) = F(b) - F(a)$

$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

Примеры:

1) $\int_1^4 \frac{2\sqrt{x}-1}{x^2}dx = \int_1^4 \frac{2\sqrt{x}}{x^2}dx - \int_1^4 \frac{1}{x^2}dx = \int_1^4 2x^{-\frac{3}{2}}dx -$

$- \int_1^4 \frac{dx}{x^2} = 2\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}\Big|_1^4 + \frac{1}{x}\Big|_1^4 = -\frac{4}{\sqrt{x}}\Big|_1^4 + \left(\frac{1}{4} - 1\right) = -2+4+$

$+\frac{1}{4}-1=-2+4-\frac{3}{4}=\frac{5}{4}$

2) $\int_0^{\frac{\pi}{6}}(2+\sin x)^2\cos x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}(2+\sin x)^2 d\sin x=$

$=\frac{(2+\sin\frac{\pi}{6})^3}{3}-\frac{(2+\sin 0)^3}{3}=\frac{(2+\frac{1}{2})^3}{3}-\frac{2^3}{3}=$

$=\frac{(\frac{5}{2})^3-8}{3}=\frac{\frac{125}{8}-8}{3}=\frac{125-64}{24}=\frac{61}{24}$

4. Специфика использования при вычислении определенного интеграла методом замены переменных

Теорема: Пусть $x=\varphi(t)$ такая, что $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$, тогда $\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$.

Особенности использования:

1) Используя метод замены при вычислении опред. интеграла, возвращаться к старой переменной не нужно

2) В этом случае обратимость $\varphi(t)$ не требуется

Пример: $\int_0^1\frac{dx}{1+\sqrt{x}}=\int_1^2\frac{2(t-1)dt}{t}=2\int_1^2\left(1-\frac{1}{t}\right)dt=$

$t=1+\sqrt{x}$ $x=0\Rightarrow t=1$	$=2(t-\ln\lvert t\rvert)\Big\rvert_1^2=2(2-\ln 2)-$
$x=(t-1)^2$ $x=1\Rightarrow t=2$	$-2(1-\ln 1)=4-2\ln 2-2=$
$dx=d(t-1)^2=2(t-1)dt$	$=2-2\ln 2=2-\ln 4$

20.03.13 1) Интегрирование по частям в определённом интеграле

Ф-ла: $\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du$

Особенность: множитель uv превращается в число после подстановки пределов интегрирования

Вывод: $(uv)' = u'v + uv'$

По формуле Ньютона - Лейбница:

$\int_a^b (uv)'dx = (uv)\Big|_a^b$ $\quad \int_a^b (u'v + uv')dx = (uv)\Big|_a^b$

$\int_a^b u'v\,dx + \int_a^b uv'\,dx = (uv)\Big|_a^b$

$\int_a^b v\,du + \int_a^b u\,dv = (uv)\Big|_a^b$ ч.т.д.

Пример: $\int_0^1 x e^{2x} dx = \int_0^1 x\,d\left(\frac{e^{2x}}{2}\right) = \left(x\frac{e^{2x}}{2}\right)\Big|_0^1 -$

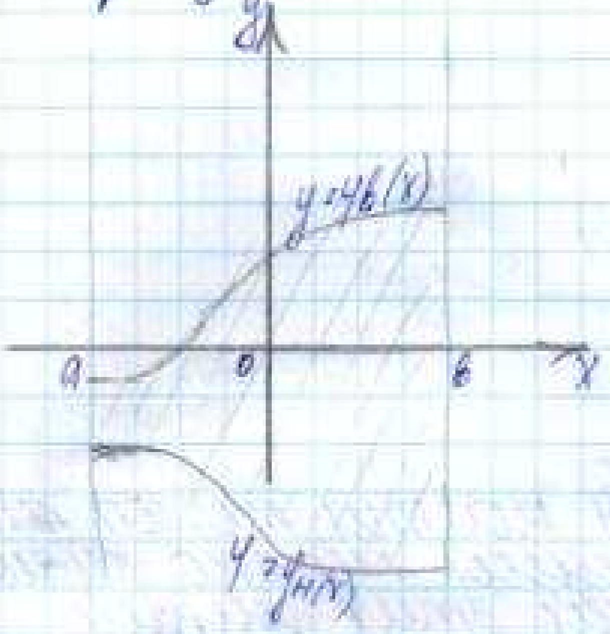
$- \int_0^1 \frac{e^{2x}}{2} dx = \frac{e^2}{2} - 0 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int_0^1 e^{2x} d(2x) = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{4} e^{2x}\Big|_0^1 =$

$= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{4}(e^2 - e^0) = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2+1}{4}$

Рассмотрим приложение определённого интеграла

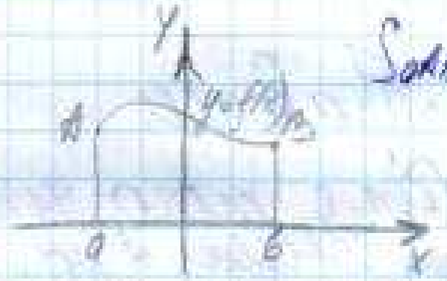
2. Вычисление площадей плоских фигур.

Формула 1



$$S = \int_a^b [y_в(x) - y_н(x)]dx$$

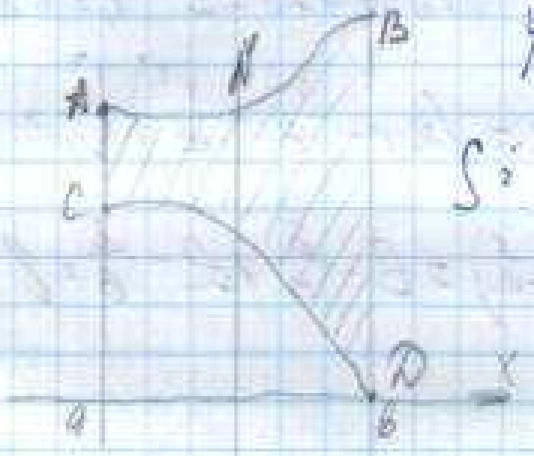
Вывод: Геометрический смысл опред. интеграла



$$S_{aABb} = \int_a^b f(x)dx$$

Пусть $C>0$, такая что

$$y_н(x)+C>0$$



$$S = S_{aABb} - S_{aCDb} = \int_a^b (y_в(x)+C)dx - \int_a^b (y_н(x)+C)dx =$$

$$= \int_a^b [y_в(x)+C-(y_н(x)+C)]dx =$$

$$= \int_a^b [y_в(x)-y_н(x)]dx$$

Пример 1. Вычислить площадь фигуры ограниченной линиями

$$\begin{cases} y = 2-x^2 \\ y = -x \end{cases} \qquad y = x^2 \qquad y = -x^2$$

$y = 2 - x^2$

$0 = 2 - x^2$

$x^2 = 2$

$x_{1,2} = \pm\sqrt{2}$

Правило.

Для того чтобы найти точку пересечения 2-ух линий нужно решить систему уравнений этих линий

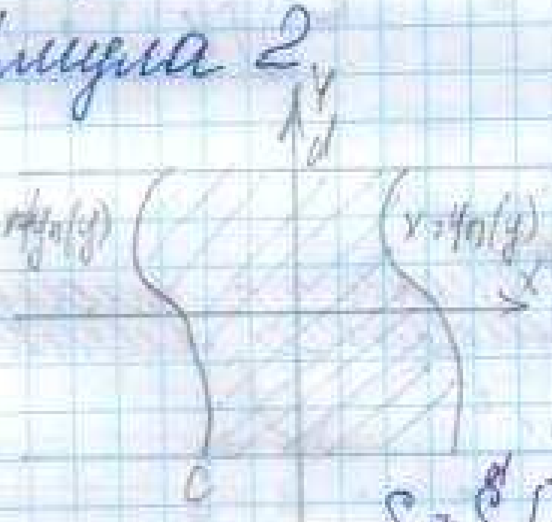
$A, B: \begin{cases} y = 2 - x^2, \\ y = -x \end{cases}$ $2 - x^2 = -x$ $x^2 - x - 2 = 0$
$D = 1 + 8 = 9$ $x_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{2} = -1; 2$

$S = \int_{-1}^{2} [2 - x^2 - (-x)] dx = \left(2x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-1}^{2} =$

$= 4 - \frac{8}{3} + 2 - (-2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{2}) = 8 - \frac{8}{3} + 2 - \frac{5}{6} = 8 - \frac{16+5}{6} =$

$= 8 - \frac{7}{2} = 4{,}5$

Формула 2



$S = \int_{c}^{d} [\psi_2(y) - \psi_1(y)] dy$

Пример 2.

Найти площадь фигуры огр линиями

$$\begin{cases} x = \sqrt{2-y} \\ x + y = 2 \\ y = 0 \end{cases}$$

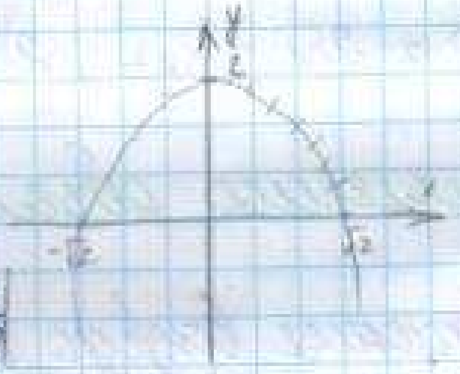
Правило построение линий:

Если в уравнении линии имеется корень, то нужно избавиться от корня, построить линию соответствующую уравнению без корня, а затем взять часть построенной линии

$x = -\sqrt{2-y}$

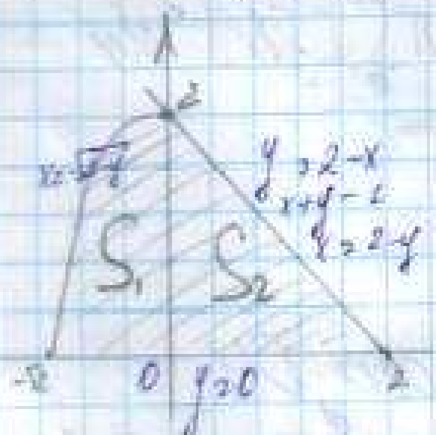
$x^2 = 2-y$

$y = 2-x^2$



$y = 2-x$

x	0	2
y	2	0



$c = 0 \qquad d = 2$

$\psi_л(y) = -\sqrt{2-y}$

$\psi_п(y) = 2-y$

$S = \int_0^2 [2-y-(-\sqrt{2-y})]dy =$

$= \int_0^2 (2-y+\sqrt{2-y})dy = -\int_0^2 (2-y+\sqrt{2-y})d(-y+2) =$

$= -\left(\frac{(2-y)^2}{2} + \frac{(2-y)^{3/2}}{3/2}\right)\Big|_0^2 = -\left(0-2-\frac{2}{3}\sqrt{8}\right) = 2+\frac{4}{3\sqrt2}$

Замечание: в этой задаче можно было бы использовать и формулу 1

Способ 2 решения задачи

В силу того что верхняя граница задаётся двумя уравнениями для использования формулы 1 необходимо разделить данную площадь на 2 части.

$$S = S_1 + S_2 = \int_{-\sqrt2}^{0}[2-x^2-0]dx + \int_0^2[2-x-0]dx =$$

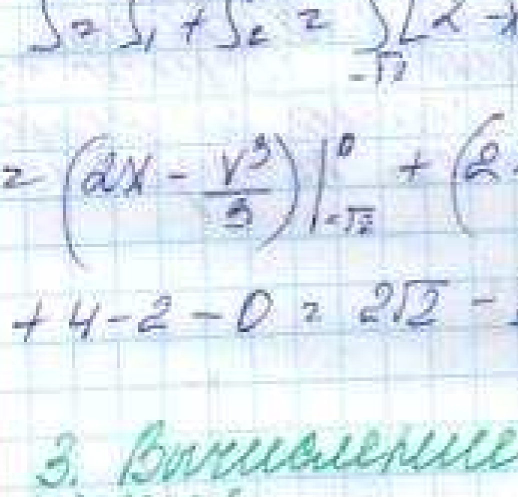
$$= \left(2x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-\sqrt2}^{0} + \left(2x-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^2 = 0-\left(-2\sqrt2+\frac{2\sqrt2}{3}\right)+$$

$$+4-2-0 = 2\sqrt2-\frac{2\sqrt2}{3}+2 = 2-\frac{4}{3\sqrt2}$$

3. Вычисление объемов фигур вращения.

а) Вращение вокруг оси OX

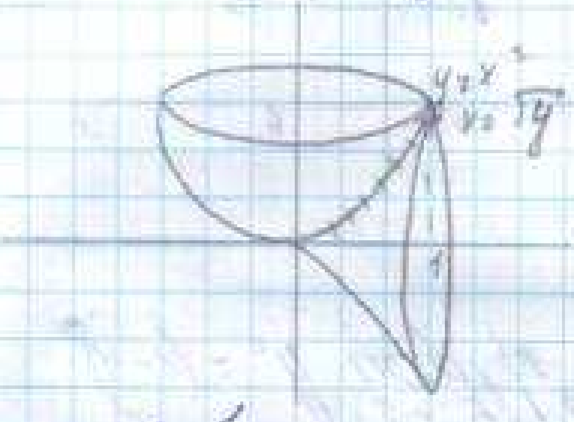
$$V_{вр} = \pi\int_a^b[f(x)]^2dx$$



б) Вращение вокруг оси OY

$x=\varphi(y)$ $\quad V_{вр} = \pi\int_c^d[\varphi(y)]^2dy$

Пример: найти объемы фигур вращения $y = x^2$ на участке $0 \le x \le 1$, вокруг осей координат.



$$V_{ox} = \pi \int_0^1 (x^2)^2 dx = \pi \int_0^1 x^4 dx = \pi \frac{x^5}{5}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{5}$$

$$V_{oy} = \pi \int_0^1 (\sqrt{y})^2 dy = \pi \int_0^1 y\,dy = \pi \frac{y^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

Пример: вычислить объём фигуры вращения криволинейной трапеции.

$$\begin{cases} y = \sqrt{x} \\ x + y = 2 \\ y = 0 \end{cases}$$ вокруг оси Ox

$A: \begin{cases} x + y = 2 \\ y = \sqrt{x} \end{cases}$

$x + \sqrt{x} = 2$

$\sqrt{x} = t \ge 0$

$t^2 + t - 2 = 0$

$t_{1,2} = -2;\ 1$

$t = 1,\ \sqrt{x} = 1,\ x = 1$

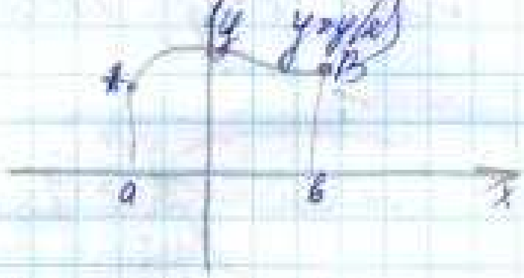
$$V = V_1 + V_2 = \pi \int_0^1 (\sqrt{x})^2 dx + \pi \int_1^2 (2-x)^2 dx = \pi \int_0^1 x\,dx + \pi \int_1^2 (x-2)^2 d(x-2) = \pi \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 + \pi \frac{(x+2)^3}{3}\Big|_1^2 = \frac{\pi}{2} - 0 + 0 - \frac{\pi}{3}(-1) =$$

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6}$$

27.03.13г **1. Приложение определенного интеграла (продолжение)**

а) Вычисление длины кривой

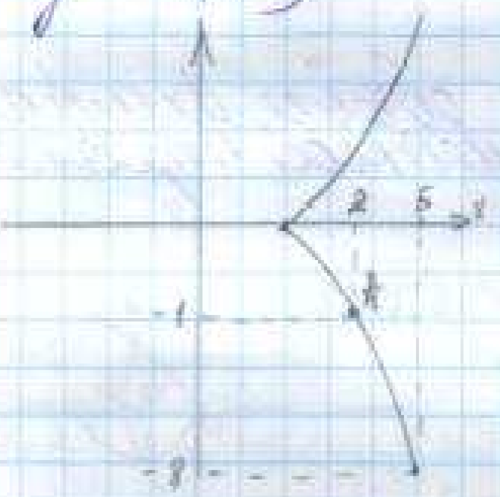
$$l_{AB} = \int_a^b \sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx$$



Пример:

Вычислить длину кривой $y^2=(x-1)^3$ от т. $A(2;-1)$ до $B(5;-8)$.

$$y=\pm\sqrt{(x-1)^3}$$



$D(y)=\{x\ge 1$

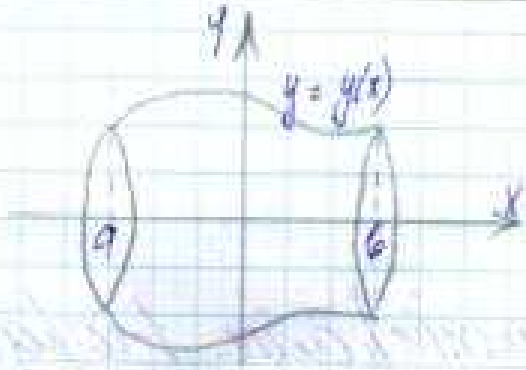
$$y' = \left(-\sqrt{(x-1)^3}\right)' = -\frac{3}{2}\sqrt{x-1}$$

$$l_{AB} = \int_2^5 \sqrt{1+\frac{9}{4}(x-1)}\,dx = \int_2^5 \sqrt{1+\frac{9x}{4}-\frac{9}{4}}\,dx =$$

$$= \int_2^5 \sqrt{\frac{9x}{4}-\frac{5}{4}}\,dx = \frac{1}{2}\int_2^5 \sqrt{9x-5}\,dx = \frac{1}{18}\int_2^5 (9x-5)^{\frac{1}{2}}\,d(9x-5) =$$

$$= \frac{1}{18}\,\frac{(9x-5)^{3/2}}{3/2}\Big|_2^5 = \frac{1}{27}\left(40^{3/2}-13^{3/2}\right)$$

б) Вычисление площади плоской фигуры



$$S_{вр.} = 2\pi \int_a^b y(x)\sqrt{1+(y')^2}\,dx$$

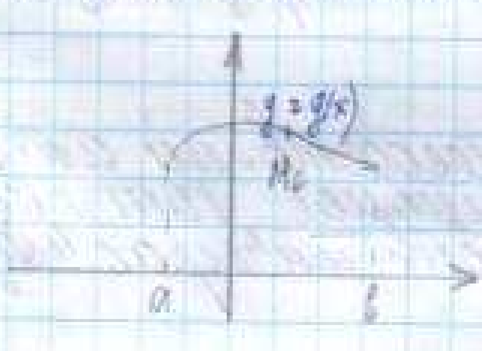
в) вычисление работы силы $F(x)$ по перемещению тела ед. массы вдоль отрезка $[a, b]$

$$A = \int_a^b F(x)\,dx$$

г) Масса стержня с заданной плотностью $\rho(x)$

$$M_{[a,b]} = \int_a^b \rho(x)\,dx$$

д) Центр тяжести кривой $y(x)$, $a \le x \le b$ с постоянной плотностью



$$x_c = \frac{\int_a^b x\sqrt{1+(y')^2}\,dx}{\int_a^b \sqrt{1+(y')^2}\,dx}$$

96000
(410000)

$$y_c = \frac{\int_a^b y(x)\sqrt{1+(y')^2}\,dx}{\int_a^b \sqrt{1+(y')^2}\,dx}$$

е) Центр тяжести криволинейной трапеции с постоянной плотностью

$$X_c = \frac{\int_a^b xy\,dx}{\int_a^b y\,dx}$$

$$y_c = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b (y(x))^2 dx}{\int_a^b y\,dx}$$

2. Несобственные интегралы 1-рода

До сих пор изучались интегралы для конечных отрезков a, b и непрерывных функций на этих отрезках.

Пусть $f(x)$ - интегрируема на $[a; +\infty]$

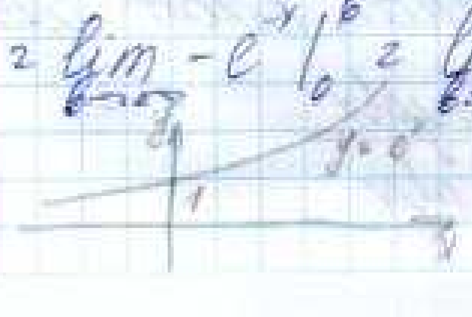
Опр: Несобственный интеграл 1-рода от функции $f(x)$ на интервале $[a; +\infty)$ называется число $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, которое равно $\lim\limits_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$, если предел существует.

В таком случае несобств-ый интеграл наз-ся сходящимся. Если предел не существует несобств. интеграл наз-ся расходящимся.

Пример 1.

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-x}dx = \lim_{b\to\infty} -\int_0^b e^{-x}d(-x) =$$

$$= \lim_{b\to\infty} -e^{-x}\Big|_0^b = \lim_{b\to\infty}(-e^{-b}+e^0) = \lim_{b\to\infty}(1-e^{-b}) = \underline{1}$$



Вывод: предел существует ⇒ несобств. интеграл сходится и равен 1.

Пример 2.

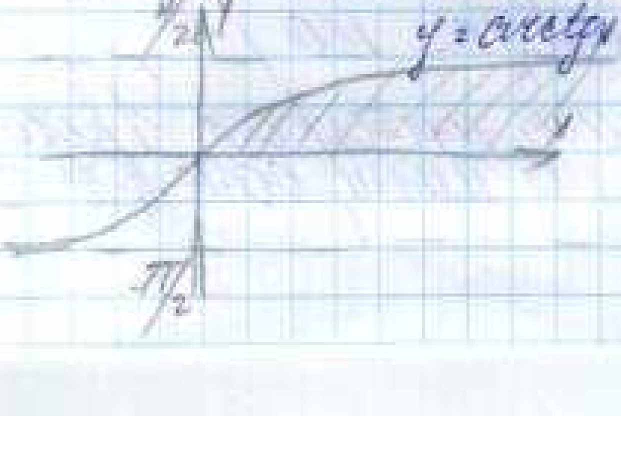
$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{b\to+\infty}\int_1^b \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{b\to+\infty} 2\sqrt{x}\Big|_1^b = \lim_{b\to+\infty}(2\sqrt{b}-2) = +\infty$$

Вывод: в этом случае предел не существует ⇒ интеграл расходящийся.

Рациональное предложение: При вычислении несобственного интеграла можно не записывать знак предела, а вычислять его как определенный интеграл, с той разницей, что при попытке подставить бесконечный предел интегрирования вычислять предел при $x \to \infty$ ($\lim_{x\to+\infty}$)

Пример 3.

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x\Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{2}$$



Геометрический смысл несобственного интеграла 1 рода:

Если несобственный интеграл сходится, то он равен площади бесконечной криволинейной трапеции

Пример 4 (классический)

$p \neq 1$ $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \int_1^{+\infty} x^{-p} dx = \frac{x^{-p+1}}{-p+1} \Big|_1^{+\infty} = \frac{1}{(1-p)x^{p-1}} \Big|_1^{+\infty} =$

$= \begin{cases} 0 - \frac{1}{1-p}, & p>1 \\ +\infty - \frac{1}{1-p}, & p<1 \end{cases}$

$p=1$ $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \ln|x| \Big|_1^{+\infty} = +\infty - 0 = +\infty$

Вывод: 1) Если $p>1$, то $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ сходится и равен $\frac{1}{p-1}$

2) Если $p \leq 1$, то $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ расходится

3. Другие типы интегралов 1 рода:

Пусть $f(x)$ непрерывна на $(-\infty, a]$

Опр: Несобственный интеграл 1 рода от функции $f(x)$ на интервале $(-\infty, a]$ называют число

$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$ равно $\lim\limits_{b\to\infty}\int_{-b}^{a} f(x)\,dx$

Если предел существует, в этом случае несобственный интеграл наз-ся сходящимся, в противном — расходящимся

Пример 1: $\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x\Big|_{-\infty}^{0} = \operatorname{arctg} 0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$

Пример 2: $\int_{-\infty}^{0}\frac{x}{1+x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{0}\frac{d\frac{x^2}{2}}{1+x^2} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0}\frac{d(x^2+1)}{x^2+1} = \frac{1}{2}\ln(x^2+1)\Big|_{-\infty}^{0} = 0-\infty = -\infty$ — расходящ

Пусть f(x) — непрерывна на всей числовой оси $(-\infty, +\infty)$

Опр: Н И I рода от функции f(x) на $(-\infty, +\infty)$ наз-ся число $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx$.

Если оба интеграла стоящ. в правой части сходятся, то интеграл сходящийся

Если хотя бы один из интеграл. правой части расходится, то интеграл расходящийся.

Пример 3.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^x dx = \int_{-\infty}^{0} e^x dx + \int_{0}^{+\infty} e^x dx = e^x\Big|_{-\infty}^{0} + e^x\Big|_{0}^{+\infty}$$

$= 1 - 0 + \infty - 1 = \infty$ – расходящийся

Используя расширенное представление числовой прямой можно так

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^x dx = e^x\Big|_{-\infty}^{+\infty} = \infty - 0 = \infty$$

Пример 4

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x\Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi - с$$

4. Несобственные интегралы 2 рода

Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a, b)$

Опр. Н. И. 2 рода от функции $f(x)$ на интервале $[a, b)$ наз-ся число

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$$

Если предел сущ-ет – сходящ., если нет – расход.

Пример 1:

$$\int_0^1 \frac{dx}{x-1} = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{x-1} = \lim_{\varepsilon \to 0+} \ln|x-1|\Big|_0^{1-\varepsilon} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0+} (\ln|1-\varepsilon-1| - \ln 1) = \lim_{\varepsilon \to 0+} \ln\varepsilon = -\infty$$

расходящийся

Используя геометр-ое представление

$$\int_0^1 \frac{dx}{x-1} = \int_0^1 \frac{d(x-1)}{x-1} = \ln|x-1| \Big|_0^1 = -\infty - 0 = -\infty$$

Пример 2:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = -\int_0^1 \frac{d(-x)}{\sqrt{1-x}} = -\int_0^1 \frac{d(1-x)}{\sqrt{1-x}} = -2\sqrt{1-x}\Big|_0^1 =$$

$= 0 + 2\sqrt{1} = 2$ — несоб. интег. сходится

Геометрический смысл Н. интегралов 2 рода

Н.И. 2 рода равен площади бесконечной криволин. трапеции