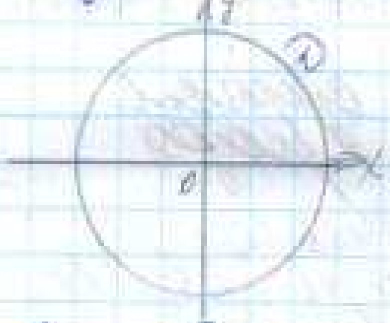
03.04.13

Функции нескольких переменных

1. Понятие функции 2-х переменных

Опр: Правило по которому каждой точке $M(x;y) \in D$

z-наз-ся числовой ф-ей 2-х переменных с областью определения D и записывают $z = z(x;y)$, $z = f(x;y)$



Способ задания ф-ии

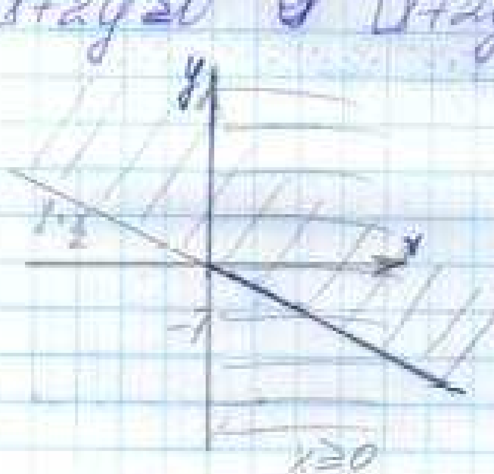
1. Аналитический, т.е в виде формулы

Пример: $z = \sqrt{x(x+2y)}$. Найти D

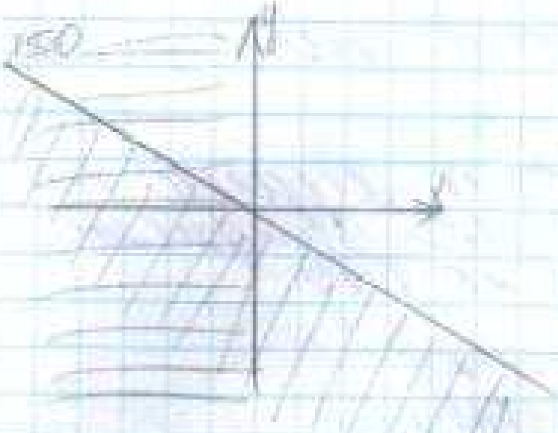
$x(x+2y) \geq 0$

$\begin{cases} x \geq 0 \\ x+2y \geq 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} x \leq 0 \\ x+2y \leq 0 \end{cases}$ $\quad 2y \geq -x$, $y \geq -x/2$

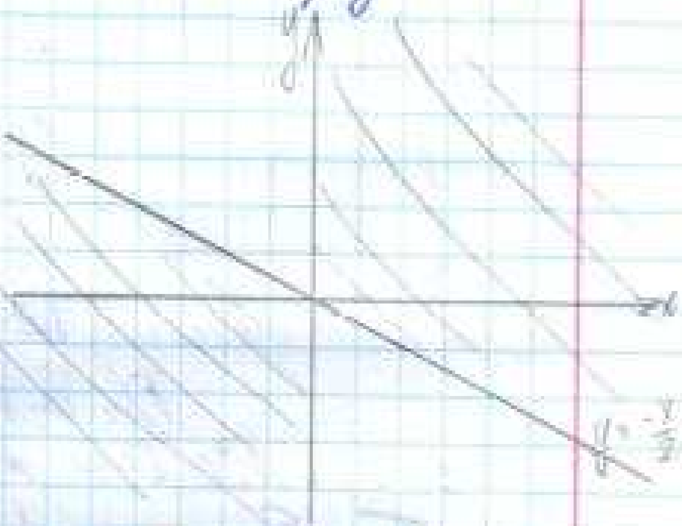
x	0	2
y	0	-1



[illegible] 2-ю систему



Областъ определ. D



2. Графический способ

Граф-ой ф-ей 2-ух переменных $z = z(x, y)$ наз-ся -поверхность в пространстве $x^3 y$ и которой $z - z(x, y) = 0$

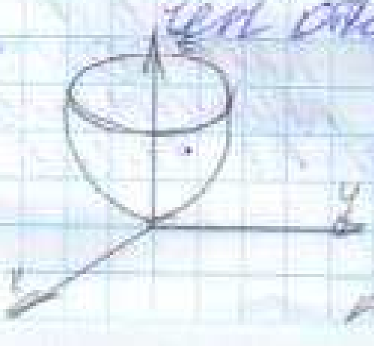
Пример: построить график

$z = 4 - x^2 - y^2$

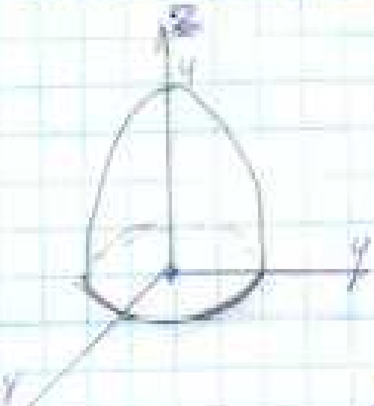
Известно что $z = x^2 + y^2$ эллиптический параболоид -поверхность 2-го порядка

$z - 4 = -x^2 - y^2$ $\quad -z = x^2 + y^2$ - симметрич. относит. Oxy

$-(z - 4) = x^2 + y^2$



$-(z-4)=x^2+y^2$ – смещение по оси Oz в положительном напр. на 4 единицы



Найдем линию пересечения графика с пл-ю Oxy

$$\begin{cases} z=4-x^2+y^2 \\ z=0 \text{ (пл. Oxy)} \end{cases}$$

$0=4-x^2-y^2$ $x^2+y^2=4$ окр. с центром в точке O и $R=2$

3. Табличный способ

$z=z(x,y)$

y\x	x_1	x_2	x_3	x_4
y_1	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
y_2	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
y_3	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
y_4	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

4. Неявный способ

Ф-ия 2-ух переменных может быть задана в виде уравнения $f(x,y,z)=0$. Для нахождения значения функции необходимо решить это уравнение при заданных x, y

2. Понятие частных производных

Опр: Частная производная ф-ии $z=z(x,y)$ по переменной x в точке $M_0(x_0,y_0)$ наз-ся число $z_x(M_0)$ равное пределу

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{z(x_0+\Delta x, y_0) - z(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

Замечание: если переменную y „заморозить" (считать const) для ф-ции $z = z(x,y)$, то частная производная по x представляет собой обычную производную ф-ции 1-ой перем. x.

Пример: $z = x^2 y^3$

$y = const$, $z_x' = (x^2 y^3)_x' = y^3 (x^2)_x' = y^3 \cdot 2x = 2y^3 x$

Частная производная ф-ции $z = z(x,y)$ по переменной y в т. M_0 наз. число, обозначаемое $z'_y(M_0)$, $\frac{\partial z}{\partial y}(M_0) =$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{z(x_0, y_0+\Delta y) - z(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

Замечание: для отыскания частной производной по y необходимо „заморозить" x и найти производную функции 1-ой переменной y.

$z_y' = (x^2 y^3)_y' = x^2 (y^3)_y' = x^2 3y^2 = 3x^2 y^2$

Пример: $z = \frac{2x-y}{x^2+3y^2}$ $y = const$

$$z_x' = \frac{(2x-y)_x' (x^2+3y^2) - (2x-y)(x^2+3y^2)_x'}{(x^2+3y^2)^2} =$$

$(2x-y)_x' = (2x)_x' - (y)_x' = 2 \cdot 1 - 0 = 2$

$(x^2+3y^2)_x' = (x^2)_x' + (3y^2)_x' = 2x + 0 = 2x$

$$= \frac{2(x^2+3y^2) - 2x(2x-y)}{(x^2+3y^2)^2}$$

$$z'_y = \frac{(2x-y)'_y(x^2+3y^2) - (2x-y)(x^2+3y^2)'_y}{(x^2+3y^2)^2} =$$

$$(2x-y)'_y = (2x)'_y - (y)'_y = 0 - 1 = -1$$

$$(x^2+3y^2)'_y = (x^2)'_y + (3y^2)'_y = 0 + 6y = 6y$$

$$= \frac{(-1)(x^2+3y^2) - 6y(2x-y)}{(x^2+3y^2)^2}$$

3. Частные производные высших порядков.

а) Производные 2-ого порядка

Опр: $z''_{xx} = (z'_x)'_x$; $z''_{yy} = (z'_y)'_y$,

смешанные производные

$z''_{xy} = (z'_x)'_y$; $z''_{yx} = (z'_y)'_x$

Пример: $3x^3 - y^2 + 2x - 3y + 4$ найти ЧП 2 порядка

$z'_x = (3x^3)'_x + (y^2)'_x + (2x)'_x - (3y)'_x + (4)'_x = 9x^2 - 0 + 2 - 0 + 0 = 9x^2 + 2$

$z'_y = (3x^3)'_y - (y^2)'_y + (2x)'_y - (3y)'_y + (4)'_y = 0 - 2y + 0 - 3 = -2y - 3$

$z''_{xx} = (9x^2+2)'_x = 18x$ $\quad z''_{xy} = (9x^2+2)'_y = 0$

$z''_{yy} = (-2y-3)'_y = -2$ $\quad z''_{yx} = (-2y-3)'_x = 0$

Теорема (без док-ва): смешанная частная производная не зависит от порядка дифференцирования. В частности

$z''_{xy} = z''_{yx}$

Пример: $z = 2x^4\sqrt{y}$

Проверить равенство: $z'''_{xxy} = z'''_{xyx}$

Решение: $z'_x = 8x^3\sqrt{y}$ $z''_{xx} = 24x^2\sqrt{y}$

$z''_{xx} = 48x\sqrt{y}$ $z'''_{xxy} = \frac{48x}{2\sqrt{y}}$

$z'_x = 8x^3\sqrt{y}$ $z''_{xy} = 8x^3/2\sqrt{y}$

$z''_{xyx} = \frac{y}{2\sqrt{y}} \cdot 24x^2$

$z'''_{xyx} = \frac{48x}{2\sqrt{y}}$

4. Понятие дифференциала функции 2-ух переменных

Опр: Ф-ия 2-ух переменных $z = z(x,y)$ наз-ся дифф. в т. $M_0(x_0, y_0)$, если полное приращение в т. M_0 имеет следующий вид:

$$z(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - z(x_0, y_0) = z'_x(M_0)\Delta x + z'_y(M_0)\Delta y + \rho\,\alpha(\rho),$$ где ρ - длина вектора приращения

$$\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \quad \alpha(\rho) - \text{б.м.ф.} \ (\rho \to 0)$$

Опр: Величина $dz = z'_x(M_0)\Delta x + z'_y(M_0)\Delta y$ - называется дифференциалом функции

~~в т. M_0~~ $z = z(x, y)$

Опр: Величина $\Delta z = z(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - z(x_0; y_0)$ наз-ся полным приращением ф-ции в т. M_0

Если функция $z=z(x,y)$ - дифференцируема в т. $M_0(x_0; y_0)$, то $\Delta z \approx dz$ $\rho \to 0$

Пример: (использ. диф-ла в приближ. вычислении)

Вычислить приближенно $(0{,}98)^{4{,}04}$

Решение: 1) $z = x^y$ $x = 0{,}98$ $y = 4{,}04$

2) $x_0 = 1$ $y_0 = 4$ $z(x_0; y_0) = 1^4 = 1$

3) $z'_x = (x^y)'_x = y x^{y-1}$ $z'_y = (x^y)'_y = x^y \ln x$

4) $z'_x(x_0; y_0) = 4 \cdot 1^{4-1} = 4$

5) $z'_y(x_0; y_0) = 1^4 \ln 1 = 0$

6) $z(x; y) \approx z(x_0; y_0) + z'_x(x_0; y_0) \cdot (x - x_0) + z'_y(x_0; y_0) \cdot (y - y_0)$

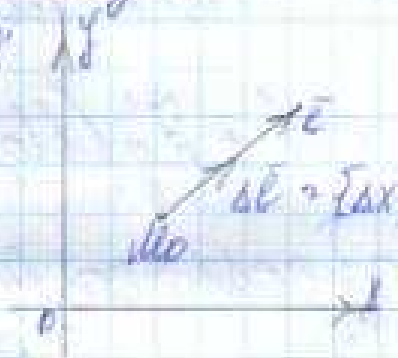
$0{,}98^{4{,}04} \approx 1 + 4(0{,}98 - 1) + 0(4{,}04 - 4) = 1 - 0{,}08 = 0{,}92$

1. Производная по направлению

10.03.13

Частная производная представляет собой произв. по направлению оси Ox и оси Oy

Дано:



Функция $z = z(x;y)$ определена в окр т. $M_0(x_0;y_0)$

Опр: $z = z(x,y)$ по направлению вектора $\bar{l}$ в т. M_0 наз-ся число

$$z'_{\bar{l}}(M_0) = \lim_{|\Delta \bar{l}| \to 0} \frac{z(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - z(x_0,y_0)}{|\Delta \bar{l}|},$$

где $\Delta \bar{l} = \{\Delta x; \Delta y\} \parallel \bar{l}$

Опр: Вектор (grad) $\mathrm{grad}\, z(M_0) = \{z'_x(M_0); z'_y(M_0)\}$ вектор-градиент ф-ии z в т. M_0

Если ф-ия $z = z(x,y)$, то $z(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - z(x_0,y_0) = z'_x(M_0)\cdot\Delta x + z'_y(M_0)\Delta y + o(\rho)$

ρ. $M(\rho)$

$$\frac{z(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - z(x_0,y_0)}{|\Delta \bar{l}|} = z'_x(M_0)\cdot\frac{\Delta x}{|\Delta \bar{l}|} + z'_y(M_0)\frac{\Delta y}{|\Delta \bar{l}|} + o(|\Delta \bar{l}|)$$

$\Delta \bar{l} = \{\Delta x; \Delta y\}$ $\Rightarrow$ $\frac{\Delta \bar{l}}{|\Delta \bar{l}|} = \left\{\frac{\Delta x}{|\Delta \bar{l}|}, \frac{\Delta y}{|\Delta \bar{l}|}\right\}$

$\Delta \bar{l}_0$ - орт. вектора $\Delta \bar{l}$

$\Delta \bar{l}_0 = \frac{\Delta \bar{l}}{|\Delta \bar{l}|}$ Не зависит от длины вектора приращения

$z'_{\bar{l}}(M_0) = z'_x(M_0)\cos\alpha + z'_y(M_0)\cos\beta + 0$

$\Delta\bar{l}_0 = \frac{\Delta\bar{l}}{|\Delta\bar{l}|} = \bar{l}_0 = \frac{\bar{l}}{|\bar{l}|} = \{\cos\alpha, \cos\beta\}$

$z'_{\bar{l}}(M_0) = z'_x(M_0)\frac{l_x}{|\bar{l}|} + z'_y(M_0)\frac{l_y}{|\bar{l}|} =$

$= \frac{z'_x(M_0)\bar{l}_x + z'_y(M_0)\bar{l}_y}{|\bar{l}|} = \frac{\operatorname{grad} z(M_0)\cdot\bar{l}}{|\bar{l}|}$

$z'_{\bar{l}}(M_0) = \frac{\operatorname{grad} z(M_0)\,\bar{l}}{|\bar{l}|}$

Выводы: 1) Вектор-градиент указывает направление наибольшего роста функции, т.к.

$z'_{\bar{l}}(M_0) = \operatorname{grad} z(M_0)\cdot\bar{l}_0 = |\operatorname{grad} z(M_0)|\,|\bar{l}_0|\cos\varphi$

2) $|\operatorname{grad} z(M_0)|\cos\varphi$ - принимает наиб. значение при $\varphi = 0$

Направл. произв. по направлению градиента нор. функции имеет наибольшую производную по направлению

2) Модуль градиента показывает наибольшую скорость роста ф-ии, т.к.

$$z'_{grad\, z(M_0)}(M_0) = \frac{grad\, z(M_0)\cdot grad\, z(M_0)}{|grad\, z(M_0)|} = \frac{|grad\, z(M_0)|^2}{|grad\, z(M_0)|} = |grad\, z(M_0)|$$

Задача: Найти скорость изменения функции (производную по направлению) ф-ии $z = x^2y^3 - 3x$ в т. $M_0(-1,2)$ по направлению к т. $M(4,3)$

Решение: $\bar{e} = \overline{M_0M} = \{5;1\}$

$z'_x = (x^2y^3-3x)'_x = 2xy^3-3$

$z'_y = (x^2y^3-3x)'_y = 3y^2x^2$ $M_0(-1,2)$

$z'_x(M_0) = 2(-1)2^3 - 3 = -19$

$z'_y(M_0) = 3\cdot 2^2(-1)^2 = 12$ $grad\, z(M_0) = \{-19;12\}$

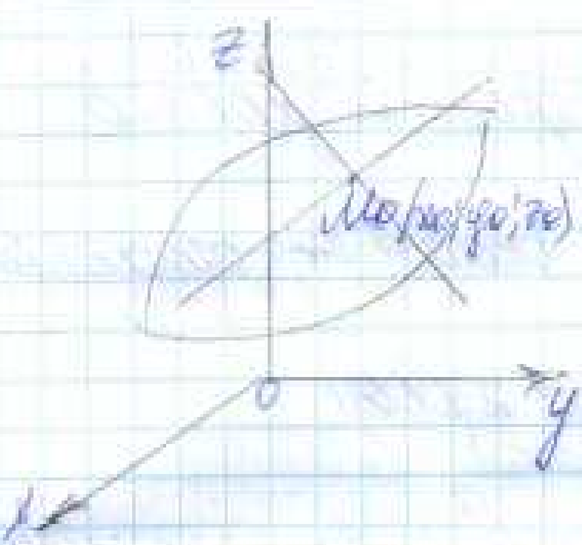
$|\bar e| = \sqrt{5^2+1^2} = \sqrt{26}$

$$z'_{\bar e}(M_0) = \frac{grad\, z(M_0)\cdot \bar e}{|\bar e|} = \frac{-19\cdot5+12\cdot1}{\sqrt{26}} = \frac{-95+12}{\sqrt{26}} = \frac{-83}{\sqrt{26}}$$

Производная по направлению отрицательна $\Rightarrow$ ф-ия z в точке M_0 по направлению в т. M убывает

2. Касательная плоскость и нормаль поверхности.

Дано: поверхность, заданная ф-ей $F(x;y;z)=0$



В математике доказав, что все касательные для кривых поверхности проходящих через т. M_0 образуют некоторую плоскость, которая наз-ся касательная пл-тью. Уравнение кас-ой плоскости находится по формуле

$$F'_x(M_0)(x-x_0)+F'_y(M_0)(y-y_0)+F'_z(M_0)(z-z_0)=0$$

Опр: Нормалью поверхности в точке M_0 называется прямая ⊥ к касательной плоскости и проходящей через точку M_0

Выведем уравнение нормали: ур-е касательной плоскости =>

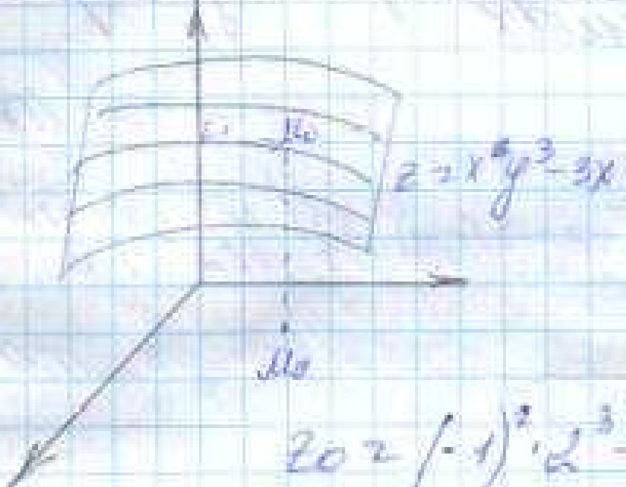
$\bar{n} = \{F'_x(M_0); F'_y(M_0); F'_z(M_0)\} \perp$ касат-ой пл-ти =>

$\bar{n}$ - направляющий вектор нормали => каноническое ур-е нормали:

$$\frac{x-x_0}{F'_x(M_0)} = \frac{y-y_0}{F'_y(M_0)} = \frac{z-z_0}{F'_z(M_0)}$$

Задача: Найти ур-е касательной пл-ти и нормали к поверхности, заданной графиком ф-ции $z = x^2y^3 - 3x$ в т. $M_0(-1; 2)$

Решение.



$$z_0 = (-1)^2 \cdot 2^3 - 3(-1) = 8 + 3 = 11$$

$M_0(-1; 2; 11)$ - принадлежит гр-ку ф-ции, т.е. поверх-ти

Ур-е поверхности $x^2y^3 - 3x - z = 0 \Rightarrow$

$F(x; y; z) = x^2y^3 - 3x - z$

$F'_x = 2xy^3 - 3$ | $F'_x(M_0) = 2(-1)2^3 - 3 = -19$

$F'_y = 3y^2x^2$ | $F'_y(M_0) = 3 \cdot 2^2(-1)^2 = 12$

$F'_z = -1$ | $F'_z(M_0) = -1$

$$F'_x(M_0)(x - x_0) + F'_y(M_0)(y - y_0) + F'_z(M_0)(z - z_0) = 0$$

$$-19(x+1) + 12(y-2) - 1(z-11) = 0$$

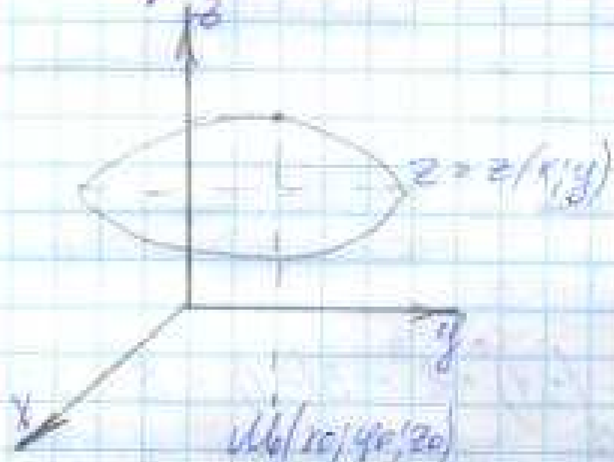
$$-19x - 19 + 12y - 24 - z + 11 = 0$$

$19x - 12y + z + 32 = 0$ - ур-е касательной пл-ти

$$\frac{x-x_0}{F'_x(M_0)} = \frac{y-y_0}{F'_y(M_0)} = \frac{z-z_0}{F'_z(M_0)}$$

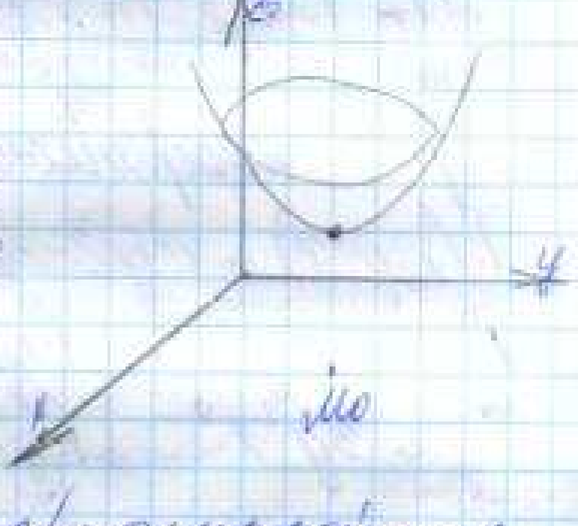
$$\frac{x+1}{-19} = \frac{y-2}{12} = \frac{z-11}{-1}$$ – ур-е нормали

3. Понятие экстремума для функ 2-х переменных



$z(M_0) \geq z(M)$, где M из окрестности т. M_0

M_0 – т. max



$z(M_0) \leq z(M)$, где M из окр-ти т. M_0

$M_0 \to$ т. min.

Опр: т. M_0 наз-ся критической для $z=z(x,y)$, если либо

$\begin{cases} z'_x(M_0)=0 \\ z'_y(M_0)=0 \end{cases}$, либо ~~одна~~ хотя бы из частн ~~[illegible]~~ производных не сущ-

Теорема (без док-ва) (Необходимое условие т. экстремума)

Если M_0 - т. экстремума, то M_0 - критическая т-ка

Теорема (достаточное условие т. экстремума)

Пусть M_0 - критическая т-ка для дважды дифференцируемой фун-ии $z=z(x,y)$

Пусть $\Delta = z''_{xx}(M_0)\cdot z''_{yy}(M_0) - \left(z''_{xy}(M_0)\right)^2$

Если $\Delta>0$, $z''_{xx}(M_0)>0$, то M_0 - т. min

Если $\Delta>0$, $z''_{xx}(M_0)<0$, то M_0 - т. max

Если $\Delta<0$ M_0 не явл-ся т. экстремума

Задача: Исслед. на экстр. $z=2x^2+y^2-4x+6y+1$

Решение: 1) Найдём критические т-ки:

$$\begin{cases} z'_x = 4x-4=0, \\ z'_y = 2y+6=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=1 \\ y=-3 \end{cases} \Rightarrow M_0(1;-3) \text{ - крит точка}$$

$z''_{xx}=4$ | $z''_{xx}(M_0)=4$ | $\Delta = 4\cdot 2-0^2=8>0$, $z''_{xx}(M_0)=4>0 \Rightarrow$ M_0 - т. min

$z''_{yy}=2$ | $z''_{yy}(M_0)=2$

$z''_{xy}=0$ | $z''_{xy}(M_0)=0$ | $z(M_0)=2+9-4-18+1=-10$

Ответ: $M(1,-3)$ - т. min $z_{min}=-10$

Комплексные числа и функции комплексного переменного

1. Понятие комплексного числа

Опр: Выр-е вида $z = x+iy$, где x, y - действ. числа, i - мнимая единица, наз-ся - комплексными числами

Замечание: Комплексные числа будут выр-ся в различных формах. Форма, в определении наз-ся алгебраической формой комплексного числа

Опр: Число x в комплексном числе $z=x+iy$ наз-ся действительной частью КЧ и обозначается

$Re\, z = x$

Опр: число y в КЧ $z=x+iy$ наз-ся мнимой частью КЧ z и обозначается $Im\, z = y$

Рассмотрим геометрическую форму записи КЧ: каждому КЧ $z=x+iy$ можно поставить в соответствие точку в системе координат OXY, наз-ся комплексной плоскостью

Такой способ задания КЧ наз-ся

Такой способ задания КЧ наз-ся геометрическим

Опр: Длина радиус-вектора OM наз-ся модулем К.Ч z и обозначается $|z|$, который равен

$$|z| = \sqrt{x^2+y^2}$$

Опр: Угол между радиус-вектором OM с осью Ox наз-ся аргументом К.Ч и обозначается $\operatorname{Arg} z$

Замечание: $\operatorname{Arg} z$ — определяется неоднозначно с точностью до угла кратного 2π, можно записать что:

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k, \quad k \in Z,$$ где

$\arg z$ — главное значение аргумента, который находится $-\pi < \arg z \le \pi$

Используя понятия модуля и аргумента КЧ можно записать КЧ в тригонометрической форме:

$$z = |z| \cos\varphi + i|z| \sin\varphi \qquad z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

$\varphi = \operatorname{Arg} z$

~~4=Arg z~~ Очень часто модуль $|z|$ заменяют ρ $\Rightarrow$

$\boxed{z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)}$ – тригонометр. форма

Сущ-ет еще одна форма записи КЧ наз-ся показательной формой КЧ

где $z = \rho e^{i\varphi}$ / для помин. этой формы нужно определять

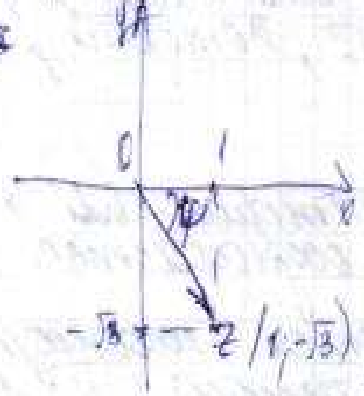
N	Форма z	Формула
1	Алгебраическая	$z = x + iy$
2	Геометрическая	$z = (x; y)$
3	Тригонометрич.	$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$
4	Показательная	$z = \rho e^{i\varphi}$

Задача

Записать КЧ $z = 1 - \sqrt{3}\,i$ в 3 формах

Реш: 1) $z = (1; -\sqrt{3})$ $\quad x = 1 \quad y = -\sqrt{3}$

2) ~~$z =$~~



Найдём модуль и аргум. КЧ

$\rho = |z| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$

$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \arg z = -\frac{\pi}{3}$

Тригонометр. форма

$z = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$

Показательная форма:

$z=2e^{-i\frac{\pi}{3}}$

2. Действие с КЧ

а) Сложение:

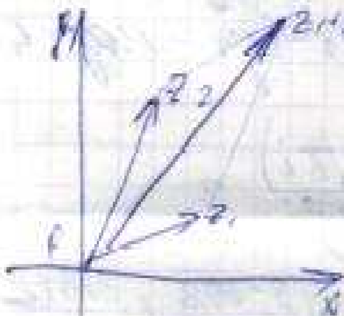
Опр: суммой 2-х КЧ $z_1=x_1+iy_1$ и $z_2=x_2+iy_2$ наз-ся число $z_1+z_2=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)$

Замечание:

1) Если к мнимой единице относиться как к параметру, то находить сумму КЧ можно складывая согласно алгебраическим обр-м:

$z_1+z_2=x_1+iy_1+x_2+iy_2=x_1+x_2+i(y_1+y_2)$

2) ~~Это~~ Суммой двух КЧ будет являться радиус-вектор полученный при сложении 2-х векторов OM_1 и OM_2



Это следует из сложения векторов в коорд. форме б) Вычитание:

Опр: разностью 2-х КЧ z_1 и z_2 будем наз-ать КЧ $z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$

Можно сформулировать замечание согл. пред.

$|z_1 - z_2|$ - расстояние между z_1 и z_2

в) Умножение:

Опр: Произведением z_1 и z_2 будем называть число

$z_1 \cdot z_2 = (x_1 \cdot x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2)$

Замечание:

1) Если мнимое i-это КЧ $i = 0 + 1i$ если это число умножить само на себя по этому правилу то получим

$i^2 = -1 + 0i = -1$

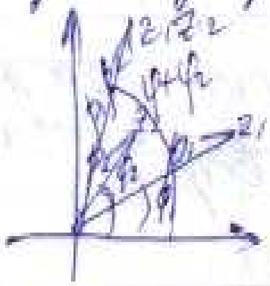
2) если к мнимой ед. относится как к параметру то произведение чисел можно получить

обычновен. проц. 2-х алгебр. вар-ий:

$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)\cdot(x_2 + iy_2) = x_1x_2 + \underline{x_1 iy_2} + \underline{iy_1 x_2} + i^2 y_1 y_2 =$

$= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2)$

3) Можно доказать, что при умножении 2-х чисел получается число с каким-то представлением, что его модуль равен произвед. модулей чисел, а аргумент представляет собой сумму аргум. чисел



4) Деление:

Опр: Частным 2-х чисел z_1 и z_2, $z_2 \neq 0$ наз-ся число $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\bar{z}_2}{|z_2|^2}$, где число $\bar{z}_2 = x_2 - iy_2$ - наз-ся сопряженным к числу $z_2 = x_2 - iy_2$

Пример: Найти $\frac{3+2i}{1+\sqrt{3}i} = \frac{(3+2i)(1+\sqrt{3}i)}{(\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2})^2} =$

$= \frac{3+3\sqrt{3}i+2i-2\sqrt{3}}{4} = \frac{3-2\sqrt{3}+i(3\sqrt{3}+2)}{4} = \boxed{\frac{3-2\sqrt{3}}{4} + \frac{3\sqrt{3}+2}{4}i}$

д) Возведение в степень

$$(\rho\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

е) Извлечение корня n-ой степени

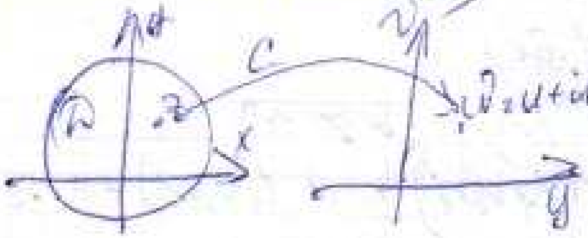
$$\sqrt[n]{\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \begin{cases} \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right) \\ \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2\pi}{n}\right) \\ \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi+4\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+4\pi}{n}\right) \\ \dots \\ \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi(n-1)}{n} + i\sin\frac{\varphi+2\pi(n-1)}{n}\right) \end{cases}$$

Зам. При извлечении корня n-ой степени из КЧ получаем n-корней

3. Функции к. переменного

Опр: Правило по которому каждому числу $z \in D \in C$ (компл. плоскость)

$\omega = u + iv \in C$



наз-ся функцией к.п. z с обл. опред D

Примеры:

1) $\omega = z^2 \quad z = x + iy \quad z^2 = (x+iy)^2 = (x^2 + 2xiy - y^2)$

$x^2 - y^2 + 2xyi \Rightarrow u = x^2 - y^2 = Re\,\omega$

$v = 2xy = Im\,\omega$

Найдём знач функции в т. $z = 1 - i$

$u = x^2 - y^2 = 1^2 - (-1)^2 = 0$

$v = 2xy = 2 \cdot (1 \cdot (-1)) = -2$

$\omega(1 - i) = 0 - 2i = -2i$

2) $\omega = e^z \overset{onp}{=} e^x \cdot (\cos y + i \sin y)$

$z = x + iy$

Замечание: Опред. дано таким образом, что все свойства обычной экспоненты показат. ф-ии сохраняются: например

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$$

Опр: функция $\omega = f(z)$ наз-ся дифф-ой в точке z, если существует предел $f'(z) = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$

Теорема (необходимые и достаточные условия дифференцируемости функции), условие Коши-Римана.

Ф-ия $\omega = f(z)$ дифф-ма в т. $z = x + iy$, если вып-ся след. равенства:

$$\begin{cases} u'_x = v'_y \\ u'_y = -v'_x \end{cases}$$, причём $f'(z) = u'_x + v'_x i$

3. Функции к-переменного

Опр: Правило по которому каждому числу $z \in D \in C$ (компл. плоскость)

$\omega = u + iv \in C$

наз-ся функцией к.п. z с обл. опред D

Пример:

1) $\omega = z^2$ $\quad z = x+iy$ $\quad z^2 = (x+iy)^2 = (x^2+2xiy-y^2)$

$x^2-y^2+2xyi \Rightarrow u = x^2-y^2 = Re\,\omega$

$v = 2xy = Im\,\omega$

Найдём знач функции в т. $z = 1-i$

$u = x^2-y^2 = 1^2-(-1)^2 = 0$

$v = 2xy = 2\cdot(1\cdot(-1)) = -2$

$\omega(1-i) = 0-2i = -2i$

2) $\omega = e^z \overset{опр}{=} e^x(\cos y + i\sin y)$

$z = x+iy$

Замечание: Опред. сделано таким образом что все свойства обычной экспоненты сохраняются: например

$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$

Опр: функция $\omega = f(z)$ наз-ся дифф-ой в точке z если существует предел $f'(z) = \lim\limits_{\Delta z\to 0} \frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$

Теорема (необходимые и достаточные условия дифференцируемости функции), условие Коши-Римана)

Ф-ия $\omega = f(z)$ дифф-ма в т. $z = x+iy$, если вып-ся след. равенства:

$\begin{cases} u'_x = v'_y \\ u'_y = -v'_x \end{cases}$, причём $f'(z) = u'_x + v'_x i$

Замечание: если $f(z)$ зависит только от z, то произв. этих функций ищется по обычным правилам

Пример: $f(z) = z^2 + 2z - 1$

Найти $f'(1+2i)$

Решение: $f'(z) = 2z + 2$

$f'(1+2i) = 2(1+2i) + 2 = 2 + 4i + 2 = \underline{4+4i}$