24.04.13

Обыкновенные дифференциальные уравнения.

1. Задачи приводящие к ДУ.

Задача №1

Материальная точка движется так, что скорость движения пропорциональна пройденному пути. В начальный момент времени т. находилась на расстоянии 1 м от начала координат, через 2 с она находится на расстоянии 2 м от н.к. Найти закон прямолинейного движения материальной точки.

$x = x(t)$ - закон движения

$$\begin{cases} v = x' = k\cdot(x-1) \\ x(0) = 1 \\ x(2) = 2 \end{cases} \qquad x' = k(x-1) - ДУ$$

Замечание: принципиальное отличие ДУ от обычных алгебраич. ур-й в том, что решениями алгебраич. ур-й являются числа, а ДУ - ф-ии

Задача №2

Скорость охлажд. тела в воздухе пропорциональна разности между температурой тела и температурой воздуха (t возд $= 20°$)

Известно что в течении 20 минут

тело охладилось от 100° до 60°. Определить закон охлаждения t тела.

$u = u(t)$ - температура тела в момент времени

$$\begin{cases} u'(t) = k\left(u(t) - 20\right) \\ u(0) = 100^\circ \\ u(20) = 60^\circ \end{cases}$$

Задача №3.

Определить форму зеркала, представляющего собой поверхность вращения, отражающего в сб-ни, чтобы все лучи, выходящие из точечного источника света, находящегося в т-ке О, отражаясь зеркалом, были параллельны оси Ох.

Задача №4.

Тело движется пропорционально со временем движения. Найти закон движения тела, если за 10с оно прошло 20м, а за 20с 35м, какой путь тело пройдет за 1 мин 40 сек.

$x = x(t)$ - закон движения

$$\begin{cases} x' = kt \\ x(10) = 20 \\ x(20) = 35 \\ x(100) - ? \end{cases}$$

(Из усл. $\Rightarrow x(t)$ явл. первообразной для ф-ии kt $\Rightarrow$

$x(t) = \int kt\,dt = k\frac{t^2}{2} + C$

$x(t) = \frac{k}{2}t^2 + C$

$x(10) = \frac{k}{2}10^2 + C = 20$

$x(20) = \frac{k}{2}20^2 + C = 35$

$$\begin{cases} 100k + 2c = 40 \\ 400k + 2c = 70 \end{cases}$$

$300k = 30$

$k = \frac{1}{10}$

$2C = 40 - 100k = 40 - 30 = 30$

$C = 15$

$x(t) = \frac{t^2}{20} + 15$

$x(t) = \frac{100^2}{20} + 15 = \frac{10000}{20} + 15 = 515$

2. Основные понятия связанные с ДУ

Опр: Ур-е вида $F(y', y, x) = 0$, где $y = y(x)$ – неизвестная ф-ия и присутствует y' обязательно наз-ся ДУ 1-го порядка.

Замечание: порядок ДУ определяется порядком старшей производной неиз. ф-ии входящей в ДУ.

Опр: Ур-е вида $F(y^{(n)}, y^{(n-1)}, \dots, y', y, x) = 0$, где $y(x)$ – неизв. ф-ия, $y^{(n)}$ присутствует обязательно наз-ся ДУ n-ного порядка.

Опр: ДУ вида $y' = f(x, y)$ наз-ся ДУ разрешенным относительно старшей производной.

Опр: ДУ вида $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$

нач-ся ду 1-го порядка записанное в дифференциалах

Замечание

1) Ду ур-ие в дифф. можно записать в виде ур-ия разрешенного относительно старшей производной

1) $P\,dx + Q\,dy = 0$ $\quad \Big|\, : dx \qquad \frac{dy}{dx} = y'$

$P + Q\frac{dy}{dx} = 0$

$P + Qy' = 0 \qquad y' = -\frac{P}{Q}$

2) ур-е разрешенное относительно старшей производной можно записать в виде ур-е дифференциалах

2) $y' = f(x, y) \qquad y' = \frac{dy}{dx}$

$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad \cdot dx$

$dy = f\,dx \qquad f\,dx - dy = 0$

3) Ур-е в дифф. удобно тем, что искомую зависимость между x и y можно искать как в виде ф-ии $y = y(x)$, так и в $x = x(y)$: $P\,dx + Q\,dy = 0 \quad | : dy$

$P\frac{dx}{dy} + Q = 0$

$Px'_y + Q = 0$

Опр: Ф-ия $y = y(x)$ является решением ду если при подстановке ф-ии в это уравнение будет верное равенство

Опр: Общим решением ДУ наз-ся множество всех решений ДУ, записанное в виде $y=y(x,c)$, где c – пробегает некоторое числовое множество и для каждого c $y=y(x,c)$ представляет собой частное решение.

Пример: $y'(x)$

Решением является первообразная для x:

$y(x) = \int x\,dx = \frac{x^2}{2}+C$

$y(x) = \frac{x^2}{2}+C$ – общее решение

Если $c=1 \Rightarrow y(x) = \frac{x^2}{2}+1$ – част. решен.

Если $c=0 \Rightarrow y(x) = \frac{x^2}{2}$ – част. решение

Опр: Уравн. вида $\Phi(x,y)=0$ задающее неявным способом частное решение ДУ наз-ся частным интегралом ДУ

Опр: Уравн. вида $\Phi(x,y,c)=0$ задающее неявным способом общее решение ДУ наз-ся общим интегралом ДУ

Замечание: Очень часто при решении ДУ не возможно выразить y через x и решения остаются в неявной форме

Опр: Процесс решения ДУ часто называют ~~решением~~) интегрированием ДУ

Опр: Графиком решения ДУ назыв. интегр. кривой

3. Задачи Коши для ДУ

Очень часто при решении ДУ требуется искать не общее решение, а частное решение, удовлетв. опред. условию

Опр: Задачей Коши назыв. задача отыскания решения ДУ

$y' = f(x;y)$, удовл. начальному условию $y(x_0) = y_0$

сокращенная запись задачи Коши

$$\begin{cases} y' = f(x;y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Теорема Коши-Ковалевской (о существ. и единств. решения задачи Коши)

Пусть $\begin{cases} y' = f(x;y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$, где $f(x;y), f'_y(x;y)$ - непрерывн. ф-ии в окрес. т. $M_0(x_0;y_0)$

Тогда в окрестн. т. x_0 существ. единственное решение задачи Коши: $y = y(x)$

Пример: $\begin{cases} y' = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}+x} \\ y(1) = 1 \end{cases}$

имеет ед. решение, т.к. $f(x,y) = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}+x}$,

$$f'_y = \frac{\sqrt{x^2+y^2}+x - \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}}{(\sqrt{x^2+y^2}+x)^2} = \frac{x\sqrt{x^2+y^2}+x^2}{\sqrt{x^2+y^2}(\sqrt{x^2+y^2}+x)^2}$$

$M_0(1,1) \in \mathcal{D}(f)$, $M_0(1,1) \in \mathcal{D}(f'_y) \Rightarrow$

f, f'_y – непрерывн в т. M_0 и в некоторой ее окрестности $\Rightarrow$ сущ. ед. реш. задачи Коши

$\begin{cases} y' = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}+x} \\ y(0) = 0 \end{cases}$ для этой задачи условия теоремы Коши не выполняются

4. Понятие изоклин

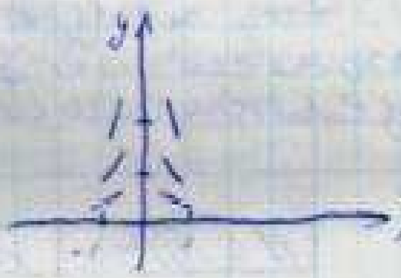
Любое ДУ типа $y' = f(x,y)$ задает на пл-ти поле направлений

$y' = -\frac{y}{x}$

$f(1,1) = -1$

$f(-1,1) = 1$

$f(1,2) = -2$

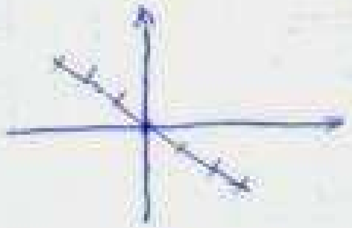


Решение ДУ превращается в поиск таких интегральных кривых, кот касаются поле заданных поле направл.

Геометрическое место т. плоскости кот поле направлено постоянно наз. изоклиной.

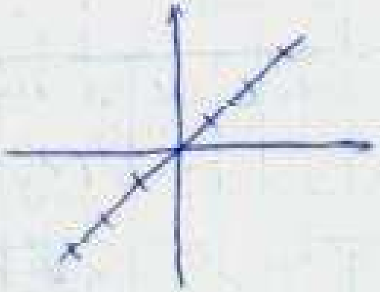
Ур-ние изоклины имеет вид:

$f(x,y) = C \qquad -\frac{y}{x} = C \qquad y = -x$



$C = 1$

$C = -1 \quad y = x$



Лекция 8

лекция 8

1 ДУ 1-го порядка с разделяющимися переменными

Все ДУ 1-го порядка можно разбить на типы, каждый из типов решается своим методом, поэтому зад. распознавания типа явл. одной из основных задач.

Опред.: ДУ 1-го порядка вида $y' = f(x)\cdot g(y)$ называется ДУ 1-го порядка с разделяющимися переменными

Примеры:

N	ДУ	$f(x)$	$g(y)$
1	$y' = x^2\sqrt{y}$	x^2	$\sqrt{y}$
2	$y' = \frac{x^2}{\sqrt{y}}$	x^2	$\frac{1}{\sqrt{y}}$
3	$y' = x^2$	x^2	1
4	$y' = \sqrt{y}$	1	$\sqrt{y}$

$\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$

Алгоритм решений

$y' = f(x) \cdot g(y)$

$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y)$

$dy = f(x) \cdot g(y) dx$

$\frac{dy}{g(y)} = f(x) dx$, $g(y) \neq 0$ если $g(y) = 0$ рассмотрим отдельно

$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx + c$ — общий интеграл

Пример 1

$(x^2+1) y' = x\sqrt{1-y^2}$

Любое ДУ 1-го порядка нач. с выражения y'

$y' = \frac{x}{x^2+1} \cdot \sqrt{1-y^2} \Rightarrow f(x) = \frac{x}{x^2+1}$, $g(y) = \sqrt{1-y^2}$

ДУ 1-го порядка с разд. переменными

$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{x^2+1}\sqrt{1-y^2}$

$dy = \frac{x}{x^2+1}\sqrt{1-y^2}\, dx \;/\; \sqrt{1-y^2} \neq 0$

$\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{x}{x^2+1} dx$

$\int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \arcsin y + c$, $\int \frac{x}{x^2+1} dx = \int \frac{d\frac{x^2}{2}}{x^2+1} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} =$

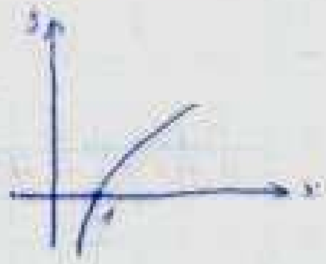
$= \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + c$

$\arcsin y = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$ – общ. интеграл

$\arcsin y = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \frac{1}{2}\ln|C|$ $\quad C \neq 0$

$2\arcsin y = \ln|C(x^2+1)|$

$\arcsin y = \ln\sqrt{|C(x^2+1)|}$



$y = \sin \ln\sqrt{|C(x^2+1)|}$ $\quad C \neq 0$

Случай $\sqrt{1-y^2} = 0$ $\quad y = 1$ или $y = -1$ – реш.

Общее решение

$$y = \begin{cases} \sin \ln\sqrt{|C(x^2+1)|}, & C \neq 0 \\ 1 \\ -1 \end{cases}$$

Пример 7

Задача Коши $\quad y' = x\sqrt{y}$, $\; y(0) = 1$ $\quad$ Пров. выполнен. услов. 1 Коши

$f(x,y) = x\sqrt{y}$

1) $f(x,y)$ непрерывн. в окр. $M_0(0,1)$

2) $f'_y = \frac{x}{2\sqrt{y}}$ непрерывн. в окр. $M_0(0,1)$

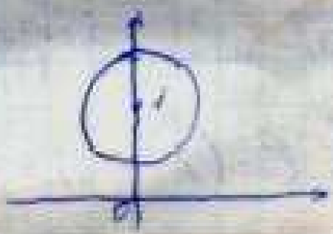
$\Rightarrow$ задача Коши имеет ед. решение

$y' = \frac{x}{\sqrt{y}}$, $\; f(x) = x$, $\; g(y) = \sqrt{y}$ $\Rightarrow$

ДУ 1-го порядка с разд. переменными.

$\frac{dy}{dx} = x\sqrt{y}$

$dy = x\sqrt{y}\,dx$ $\quad y \neq 0$



$$\frac{dy}{\sqrt{y}} = x\,dx$$

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y}} = \int x\,dx$$

$$2\sqrt{y} = \frac{x^2}{2} + C$$

$$y(0) = 1 \Rightarrow 2\sqrt{1} = \frac{0^2}{2} + C \Rightarrow C = 2$$

$$2\sqrt{y} = \frac{x^2}{2} + 2$$

$$\sqrt{y} = \frac{x^2}{4} + 1$$

$$y = \left(\frac{x^2}{4} + 1\right)^2$$ – реш. задачи Коши

Иногда ДУ 1-го порядка записывают в виде дифференциалов:

$$f(x,y)\,dx + g(x,y)\,dy = 0$$

Из этого вида можно получить вид обыкновенного ДУ делением на dx

$$f(x,y) + g(x,y)\frac{dy}{dx} = 0$$

$$f(x,y) + g(x,y)\,y' = 0$$

$$y' = -\frac{f(x,y)}{g(x,y)}$$

Пример 3

Найти общее решение ДУ

$$y^2 dx + e^x dy = 0 \quad | : dx$$

$$y^2 + e^x \frac{dy}{dx} = 0$$

$y^2 + e^x y' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{y^2}{e^x}$; $y' = -y^2 \cdot \frac{1}{e^x} \Rightarrow$

$f(x) = \frac{1}{e^x}$, $g(y) = -y^2$ = ДУ 1го порядка с разд. переменными

Замечание:

Вообще говоря при распознавании этого ДУ мы сделали шаг назад в реш. этого ур-ния

$y^2 dx = -e^x dy \quad / y^2 \neq 0 / : e^x$

$\int \frac{dx}{e^x} = -\int \frac{dy}{y^2}$

$\int e^{-x} dx = -\int e^{-x} d(-x) = -e^{-x} + c$

$\int \frac{dy}{y^2} = -\frac{1}{y} + c$

$-e^{-x} = \frac{1}{y} + c$ - общий интеграл

$\frac{1}{y} = -e^{-x} + c$

$y = \frac{1}{c - e^{-x}}$

Случай: $y = 0$ - решение

Ответ: Общее реш. $y = \begin{cases} \frac{1}{c - e^{-x}} \\ 0 \end{cases}$, $c \in R$

2. ДУ 1го порядка однородные

Опред.: ДУ 1го порядка вида $y' = f(x, y)$, где для любого $\lambda > 0$, $f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y)$ наз. ДУ 1го порядка однородным

Пример:

N	ДУ	Проверка услов. $f(\lambda x, \lambda y) = f(x,y)$
1	$y' = \frac{2x-y}{x+y}$	$f(x,y) = \frac{2x-y}{x+y}$; $f(\lambda x, \lambda y) = \frac{2\lambda x - \lambda y}{\lambda x + \lambda y} = \frac{\lambda(2x-y)}{\lambda(x+y)} = f(x,y)$
2	$y' = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}$	$f(x,y) = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}$; $f(\lambda x, \lambda y) = \frac{\sqrt{(\lambda x)^2+(\lambda y)^2}}{\lambda x} = \frac{\sqrt{\lambda^2(x^2+y^2)}}{\lambda x} = \frac{\lambda\sqrt{x^2+y^2}}{\lambda x} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x} = f(x,y)$

Алгоритм решения

Ищем реш в виде $y = z(x)\cdot x$, где $z(x)$ - новая неизвестная ф-ция

$$(z\cdot x)' = f(x, zx)$$

$$z'x + zx' = f(x, zx)$$

$$z'x + z = f(x\cdot 1;\ x\cdot z)$$

$$z'x + z = f(1, z)$$

$$z'x = f(1,z) - z$$

$$z' = (f(1,z) - z)\,\frac{1}{x}$$ — ДУ 1го порядка с разд переменными

Замечание

ДУ 1го порядка с разделяющими переменными явл базовой в том смысле, что любой другой тип будет сводиться к нему.

Далее реш. ДУ с разд. переменными после получ. реш. необходимо вернуться к старой неизвестной: $z = \frac{y}{x}$

Пример 1

$$xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$xy' = y + \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$y' = \frac{y}{x} + \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x} \qquad f(x, y) = \frac{y}{x} + \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x}$$

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda y}{\lambda x} + \frac{\sqrt{(\lambda x)^2 + (\lambda y)^2}}{\lambda x} = \frac{y}{x} + \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x} = f(x, y)$$

$$y = zx$$

$$y' = z'x + z$$

$$z'x + z = \frac{zx}{x} + \frac{\sqrt{x^2 + (zx)^2}}{x}, \quad x > 0$$

$$z'x + z = z + \sqrt{1 + z^2}$$

$$z'_x = \sqrt{1 + z^2}$$

$$z' = \sqrt{1 + z^2}\,\frac{1}{x}$$

$$\frac{dz}{dx} = \sqrt{1 + z^2}\,\frac{1}{x}$$

$$dz = \sqrt{1 + z^2}\,\frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{dz}{\sqrt{1 + z^2}} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln|z + \sqrt{z^2 + 1}| = \ln|x| + \ln|c|$$

$$\ln|z + \sqrt{z^2 + 1}| = \ln|cx|$$

В силу монотонности ф-ции $y=\ln(x)$, в силу произвольной постоянной $c>0$ =>

$$z+\sqrt{z^2+1}=cx$$

$$\frac{y}{x}+\sqrt{\frac{y^2}{x^2}+1}=Cx$$ – общий интеграл

$$\frac{y}{x}+\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}=Cx$$

$$y+\sqrt{x^2+y^2}=cx^2 \quad x>0$$

При $x<0$ $\quad y-\sqrt{x^2-y^2}=c$

Лекция 9

Лекция

1. Прием реш ДУ путем изменения "напр." зависимост

$$y'=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}+x}$$ (см. зад. о форме зеркала)

Если решать обычным способом – однородное ур-ние

$$y=zx$$

$$z'_x+z=\frac{zx}{\sqrt{x^2+(zx)^2}+x}$$

$$z'_x+z=\frac{z}{\sqrt{1+z^2}+1}$$

$$z'_x=\frac{z-z-z\sqrt{1+z^2}}{1+\sqrt{1+z^2}}$$

$$z'_x=-\frac{z\sqrt{1+z^2}}{1+\sqrt{1+z^2}}$$

$$\frac{(1+\sqrt{1+z^2})dz}{z\sqrt{1+z^2}}=-\frac{dx}{x}$$

$$\int\frac{1+\sqrt{1+z^2}}{z\sqrt{1+z^2}}dz=\int\left(\frac{1}{z\sqrt{1+z^2}}+\frac{1}{z}\right)dz$$

Используем прием изменения неизвестной зависимости: будем реш. не в виде $y = y(x)$, а в виде $x = x(y)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}+x}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}+x}{y} \Rightarrow$$ ищем неизвестную ф выи $x = x(y)$

$$x' = \frac{\sqrt{x^2+y^2}+x}{y}$$

$$x = zy$$

$$z'y + z = \frac{\sqrt{(zy)^2+y^2}+zy}{y}$$

$$z'y + z = \sqrt{z^2+1}+z$$

$$z'y = \sqrt{z^2+1}$$

$$\int \frac{dz}{\sqrt{z^2+1}} = \int \frac{dy}{y}$$

$$\ln\left|z+\sqrt{z^2+1}\right| = \ln|y| + \ln|c|$$

$$z+\sqrt{z^2+1} = cy$$

$$\frac{x}{y} + \sqrt{\frac{x^2}{y^2}+1} = cy$$

Замечание: изменение неизвест. зависимос-ти влияет на сложность реш-ия и на изменение типа ДУ

2 ДУ 1го порядка, линейные

Опр.: ДУ 1го порядка вида $y' = P(x)y + Q(x)$ наз линейным ДУ.

Пример:

№	ДУ	$P(x)$	$Q(x)$
1	$y' = \frac{2y}{x} + x^2 + 1$	$\frac{2}{x}$	x^2+1
2.	$y' = 2y + e^x$	2	e^x
3	$y' = x^2 y - 3$	x^2	-3
4	$y' = 5y - 1$	5	-1
5.	$y' = \frac{y}{xy^2+1}$ $x' = \frac{xy^2+1}{y}$ $x' = yx + \frac{1}{y}$	y	$\frac{1}{y}$

Замечание:

Некоторые ДУ можно отнести к нескольким типам. Например:

1) $y' = \frac{y}{x} + 1$, $P(x) = \frac{1}{x}$, $Q(x) = 1$ => линейное

$\frac{dy}{dx} + 1 = \frac{y}{x} + 1$ => однородное

2) $y' = 5y - 1$ - линейное

$y' = f(x)\, g(y)$, $f(x) = 1$, $g(y) = 5y - 1$ => с разд. переменными

Алгоритм решения (метод Бернулли)

$y' = P(x)y + Q(x)$

Ищем реш. в виде произведения $y = u(x)\, v(x)$, где $u(x)$, $v(x)$ – новые неизвестные ф-ции.

$(uv)' = P u v + Q$

$u'v + uv' = Puv + Q$

Замечание!

Необходимо следить за порядком слагаемых правой части: 1-е слагаемое должно быть с y, а 2-е без y.

$$\begin{cases} u'v = Puv & (1) \\ uv' = Q & (2) \end{cases}$$

Эти ДУ в системе явл ДУ с разделяющими переменными и реш в том порядке в котором они записаны в системе.

(1) $u' = P(x)\cdot u$ $\quad f(x) = P(x)$, $g(u) = u$

$$\frac{du}{dx} = Pu$$

$$\int\frac{du}{u} = \int P\,dx$$

$$\ln|u| = \int P(x)\,dx + C$$

Замечание: произв постоянную C при интегрировании можно положить равную 0 в этом месте, т.к в дальнейшем оно сократится

$$u = \pm e^{\int P\,dx + C}$$

$$u = \pm e^{C} e^{\int P\,dx} \quad ; \quad u = Ce^{\int P\,dx}$$

$$Ce^{\int P\,dx}\cdot v' = Q(x)$$

$$v' = \frac{Q(x)}{Ce^{\int P\,dx}} \qquad f(x) = \frac{Q(x)}{Ce^{\int P\,dx}} \qquad g(v) = 1$$

$$\int dv = \int \frac{Q(x)}{c e^{-\int P dx}} dx$$

$$v = \frac{1}{c} \int Q(x) e^{-\int P dx} dx + \tilde{c}$$

$$y = uv = c e^{\int P dx} \left(\frac{1}{c} \int Q e^{-\int P dx} dx + \tilde{c} \right)$$

$$\boxed{y = e^{\int P dx} \left(\int Q e^{-\int P dx} dx + \tilde{c} \right)}$$ – общее реш. линейного ур-ния

Задача: Найти реш. задачи Коши.

$$\begin{cases} xy' + 2y = 3x^2 - 2x \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

$$xy' = -2y + 3x^2 - 2x$$

$$y' = -\frac{2}{x} y + 3x - 2 \qquad P(x) = -\frac{2}{x}, \; Q(x) = 3x - 2 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ ДУ 1го порядка, линейное

$$y = u \cdot v$$

$$u'v + uv' = -\frac{2}{x} uv + 3x - 2$$

$$\begin{cases} u'v = -\frac{2}{x} uv & (1) \\ uv' = 3x - 2 & (2) \end{cases}$$

(1) $\frac{du}{dx} = -\frac{2}{x} u$

$$\int \frac{du}{u} = -\int \frac{2}{x} dx$$

$$\ln|u| = -2 \ln|x|$$

$$\ln|u| = \ln|x^{-2}|$$

$$u = x^{-2}$$

$u = \frac{1}{x^2}$

(2) $\frac{1}{x^2} v' = 3x - 2$

$v' = 3x^3 - 2x^2$

$\int dv = \int (3x^3 - 2x^2)\,dx$

$v = \frac{3x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + C$

$y = u\,v$

$y = \frac{1}{x^2}\left(\frac{3x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + C\right)$ – общее решение

Замечание: Постоянное интегрирования C возникшее при реш. 2-го ДУ размещаем внутри скобки

$y(1) = 0$

$0 = 1\left(\frac{3}{4} - \frac{2}{3} + C\right)$

$0 = \frac{1}{12} + C \Rightarrow C = -\frac{1}{12}$

Ответ: $y = \frac{1}{x^2}\left(\frac{3x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - \frac{1}{3}\right)$ – реш. задачи Коши

3. ДУ 1-го порядка, ур-ние Бернулли

Опред: ДУ 1-го порядка вида $y' = P(x)y + Q(x)y^{\alpha}$, где $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq 1$ наз. ур-нием Бернулли

Примеры

N	ДУ	$P(x)$	$Q(x)$	α
1	$y' = x^2 y - x y^2$	x	$-x$	2
2	$y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{\sqrt{y}}$	$\frac{1}{x}$	x	$-\frac{1}{2}$
3	$y' = 2y + \frac{e^x}{y}$	2	e^x	-1
4	$y = \frac{y}{xy^2 - x^3}$ $x' = \frac{xy^2 - x^3}{y}$ $x' = yx - \frac{x^3}{y}$	y	$-\frac{1}{y}$	3

При реш ур-ния Бернулли используется метод Бернулли

Задача: Найти общ реш ДУ $xy' - y = \frac{x}{y^2}$

$$xy' = y + \frac{x}{y^2}$$

$$y' = \frac{y}{x} + \frac{1}{y^2} \qquad P(x) = \frac{1}{x}, \; Q(x) = 1, \; \alpha = -2$$

$$y = uv$$

$$u'v + uv' = \frac{uv}{x} + \frac{1}{u^2v^2}$$

$$\begin{cases} u'v = \frac{uv}{x} & (1) \\ uv' = \frac{1}{u^2v^2} & (2) \end{cases}$$

(1) $u' = \frac{u}{x}$

$$\frac{du}{dx} = \frac{u}{x}$$

$$\int \frac{du}{u} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln|u| = \ln|x|$$

$$u = x$$

(2) $xv' = \frac{1}{x^2 v^2}$

$\int v^2 dv = \int \frac{dx}{x^3}$

$\frac{v^3}{3} = -\frac{1}{2x^2} + C$

$v^3 = -\frac{3}{2x^2} + C$

$v = \sqrt[3]{-\frac{3}{2x^2} + C}$

$y = x\sqrt[3]{-\frac{3}{2x^2} + C}$ – общее решение

4. ДУ 1-го порядка полных дифференциалов

Опред.: ДУ 1-го порядка в дифф-ах вида $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$, где $\boxed{P'_y = Q'_x}$, назыв. ур-нием полных дифференц.

Замечание: ур-ние в полных дифференц. может быть записано в эквивалентном виде: $y' = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$, $\boxed{P'_y = Q'_x}$

Примеры

N	ДУ	P	Q	Проверка условия
1	$(x^2+y^2)dx + 2xy\,dy = 0$	x^2+y^2	$2xy$	$P'_y = 2y$ $Q'_x = 2y$
2	$y' = -\frac{3x^2y+y^2}{x^3+2xy+10}$	$3x^2y+y^2$	$x^3+2xy+10$	$P'_y = 3x^2+2y$ $Q'_x = 3x^2+2y$

Алгоритм решения

Теорема (без док-ва). Если $P'_y = Q'_x$, то

1) сущ. $u(x, y)$: $du = Pdx + Qdy$

2) $u = C$ - общ. интеграл ур-ия $Pdx + Qdy = 0$

Замечание: Если $du = Pdx + Qdy \Rightarrow$

$$\begin{cases} u'_x = P \\ u'_y = Q \end{cases}$$

Задача. найти общ. интеграл

$$(x^2 + y^2)dx + 2xy\,dy = 0$$

$$\begin{cases} u'_x = x^2 + y^2 & (1) \\ u'_y = 2xy & \end{cases}$$

$(1) \Rightarrow u = \int (x^2 + y^2)dx = \frac{x^3}{3} + y^2x + c(y)$

$(2) \Rightarrow \left(\frac{x^3}{3} + y^2x + c(y)\right)'_y = 2xy$

$2yx + c'(y) = 2xy$

$c'(y) = 0 \Rightarrow c(y) = c$

$\Rightarrow u = \frac{x^3}{3} + y^2x + c$

Общий интеграл $\boxed{\frac{x^3}{3} + y^2x = c}$

ДУ высших порядков

1. Основные понятия

Опред: Ур-ние вида $F(y^{(n)}, y^{(n-1)}, \ldots, y, x)=0$, где присутствие $y^{(n)}$ обязательно, наз. ДУ n-го порядка.

Пример: $y''-x=0$

Опред: Ф-ция $y=y(x)$ наз. ДУ, если при подстановке будет тождество.

Пример:

$$y''=x;\quad (y')'=x \qquad y'=\int x\,dx=\frac{x^2}{2}+C,$$

$$y'=\int\left(\frac{x^2}{2}+C_1\right)dx=\frac{x^3}{6}+C_1x+C_2$$

$C_1 = 0 \quad C_2 = 0 \Rightarrow$

$y = \frac{x^3}{6}$ - решение

$C_1 = 1, \quad C_2 = 0 \Rightarrow$

$y = \frac{x^3}{6} + x$ - решение

Опред: Общим реш. ДУ n-го порядка наз. множество всех решений записанных в виде $y = y(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$, где $C_1, C_2 \dots C_n$ - независимые постоянные из некоторого множества в R^n

Пример:

$y = \frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2$ - общее реш., где $(C_1, C_2) \in R^2$

Замечание: понятие интеграла и общего интеграла возникают в том случае, если реш. и общее реш. появл. в неявном виде

Опред: Задача Коши для ДУ 2-го порядка наз. след. задача

$F(y'', y', y, x) = 0$

$y(x_0) = y_0$

$y'(x_0) = y_1$ где x_0, y_0, y_1 - заданные числа

Теорема Коши

Если для задачи Коши вида:

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y') \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \end{cases}$$

$f(x, y, y')$, $f'_y(x, y, y')$, $f'_{y'}(x, y, y')$ – непрерывны в окрестности т. $M_0(x_0, y_0, y'_0)$, то сущ. ед. решение задачи Коши

ДУ 2го порядка, допускающие понижение порядка

N	ДУ	Тип	Пример	Сп. реш.
1	$F(y'', y', x)=0$ не содержит y	ДУ 2го порядка допуск. пониж. порядка не содержащ. y	$y''-2y'=e^x$ $y''=2x$	$y'=z(x)$
2	$F(y'', y', y)=0$ не содерж. x	ДУ 2го порядка допуск. понижения порядка несодержащего x	$y''y^3+4=0$	$y'=p(y)$ $y''=p'p$

1) $y'' = 2x \qquad y' = z(x)$

$z' = 2x$ – ДУ 1го порядка с раздел переменными

$$\frac{dz}{dx} = 2x \qquad \int dz = \int 2x\,dx \qquad z = x^2 + c_1$$

$y' = x^2 + c_1$ – ДУ 1го порядка с раздел переменными

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + c_1 \qquad \int dy = \int (x^2 + c_1)\,dx$$

$y = \frac{x^3}{3} + c_1 x + c_2$ – общ. решение

2) $y'' - 2y' = e^x$

$y' = z(x)\ ,\quad y'' = z'$

$z' - 2z = e^x$

$z' = 2z + e^x$ – ДУ 1го порядка, линейное

$\boxed{y' = P(x)y + Q(x)}$

$z = uv$

$\underline{u'v} + \underset{\sim}{uv'} = \underline{2uv} + \underset{\sim}{e^x}$

$$\begin{cases} u' = 2u & (1) \\ uv' = e^x & (2) \end{cases}$$

(1) $\int \frac{du}{u} = \int 2\,dx$

$\ln|u| = 2x$

$u = e^{2x}$

(2) $e^{2x} v' = e^x$

$v' = e^{-x}$

$v = \int e^{-x}\,dx = -e^{-x} + c$

$Z = e^{2x}(e^{-x} + C_1)$

$Z = e^{x} + e^{2x}C_1$

$Z' = e^{x} + e^{2x}C_1$

$y = \int (e^{x} + e^{2x}C_1)dx = e^{x} + \frac{1}{2}C_1 e^{2x} + C_2$

3) $\begin{cases} y''y^3 + 4 = 0 \\ y(0) = -1 \\ y'(0) = -2 \end{cases}$ $y' = P(y)$, $y'' = p'p$

$p'py^3 = -4$

$p' = -\frac{4}{y^3}\frac{1}{p}$ – ДУ 1-го порядка с разд. переменными

$\int pdp = \int -\frac{4}{y^3}dy$

$\frac{p^2}{2} = \frac{2}{y^2} + C_1$, $p^2 = \frac{4}{y^2} + C_1$

$p = y' = -2$; $y = -1$

$4 = \frac{4}{(-1)^2} + C \Rightarrow C_1 = 0$

$p^2 = \frac{4}{y^2}$, $p = \pm\frac{2}{y}$ Выбираем „+", т.к $y' = -2$, $y = -1$

$P = \frac{2}{y}$

$y' = \frac{2}{y}$ – ДУ 1-го порядка с разд. перемен.

$\int ydy = \int 2dx$

$\frac{y^2}{2} = 2x + C_2$

$y^2 = 4x + C_2$

$y(0) = -1 \Rightarrow (-1)^2 = 4 \cdot 0 + C_1 \Rightarrow C_1 = 1$

$y^2 = 4x + 1$

$y = \pm\sqrt{4x+1}$

Выбираем „−", т.к. $y = -1 < 0$

2. ДУ 2-го порядка допускающ. понижение порядка, не зависящее от y.

$F(y'', y', x) = 0$; y - отсутствует

а) y' отсутствует: $F(y'', x) = 0$

Пример смотри выше

б) y' присутствует

Общая схема решения

1) $y' = z(x)$ - новая неизв. ф-ция
$y'' = z'(x)$

2) $F(z', z) = 0$ - ДУ 1-го пор, решаем, наход $z(x)$

3) $y' = z(x)$ - ДУ 1-го пор с раздел. переменными
наход. $y(x)$

Пример: $\begin{cases} xy'' - 2y' = x^2 \\ y(1) = 0 \\ y'(1) = 1 \end{cases}$

$y' = z$, $y'' = z'$

$xz' - 2z = x^2$

$xz' = 2z + x^2$

$z' = \frac{2z}{x} + x$

Ур-ние имеет вид $z' = P(x)z + Q(x)$, где

$P(x)=\frac{2}{x}$, $Q(x)=x$ $\Rightarrow$ это ДУ 1-го пор. линейное

$z=u\cdot v$

$u'v+uv'=\frac{2}{x}uv+x$

$$\begin{cases} u'=\frac{2}{x}u \quad (1) \\ uv'=x \quad (2) \end{cases}$$

1) $\int\frac{du}{u}=\int\frac{2}{x}dx$ $\ln u=2\ln|x|$ $u=x^2$

2) $x^2v'=x$ $v'=\frac{1}{x}$ $v=\ln|x|+C_1$

$z=x^2(\ln|x|+C_1)$

Замечание: При реш. задачи Коши для ДУ 2-го порядка возник. постоянной интеграл можно найти в момент их возникновения

$z=y'=1$ при $x=1$

$1=1(\ln 1+C_1)\Rightarrow C_1=1$

$y'=x^2(\ln x+1)$ знак модуля убрали, т.к решающими в близи $x=1>0$

$y=\int x^2(\ln x+1)dx=\int(\ln x+1)d\frac{x^3}{3}=$

$=(\ln x+1)\frac{x^3}{3}-\int\frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{x}dx=(\ln x+1)\frac{x^3}{3}-\frac{x^3}{9}+C_2$

$y(1)=0\Rightarrow 0=(\ln 1+1)\frac{1^3}{3}-\frac{1^3}{9}+C_2$

$C_2=-\frac{2}{9}$

Ответ: $y=(\ln x+1)\frac{x^3}{3}-\frac{x^3}{9}-\frac{2}{9}$

Проверим выполнение с условием теоремы Коши

$y'' = \frac{2}{x} y' + x$

$f(x, y, y') = \frac{2}{x} y' + x \quad M_0 (1, 0, 1)$

$f(x, y, y')$ непрерывн. в окр-ти т. M_0 т.к $M_0 \in D(f)$

$f'(y) \equiv 0$ непрерывн. везде

$f'_{y'}(x, y, y') = \frac{2}{x}$ - непрерывн. в окр-ти т. M_0 т.к $M_0 \in D(f'y')$

Отсюда след. решение единств.

3. ДУ 2-го порядка допуск. понижения порядка не содерж. x

$F(y'', y', y) = 0$

Общая схема решения

1) $y' = p(y)$

$y'' = p'_y \cdot y'_x = p' p$

2) $F(p' p, p, y) = 0$ - ДУ 1-го порядка

3) $y' = p(y)$ - ДУ 1-го порядка с разд. переменными

Находим $y(x)$

Задача
$$\begin{cases} 4y^3 y'' = y^4 - 1, \text{ не содерж. } x \\ y(0) = \sqrt{2} \\ y'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{cases}$$

$y' = p(y)$, $y'' = p' \cdot p$

$4y^3 p' p = y^4 - 1$

$p' = \left(\frac{y}{4} - \frac{1}{4y^3}\right)\frac{1}{p}$ ДУ вида

$p' = f(y)\, y(p)$, где $f(y) = \frac{y}{4} - \frac{1}{4y^3}$

$y(p) = \frac{1}{p}$

$\Rightarrow$ ДУ 1-го порядка с разд. перемен.

$\int p\,dp = \int\left(\frac{y}{4} - \frac{1}{4y^3}\right)dy$

$\frac{p^2}{2} = \frac{y^2}{8} + \frac{1}{8y^2} + C_1$

$p = y' = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ при $y = \sqrt{2}$

$\frac{1}{16} = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + C_1 \Rightarrow C_1 = \frac{1}{4}$

$p^2 = \frac{y^2}{4} + \frac{1}{4y^2} - \frac{1}{2}$

$p^2 = \frac{y^4 + 1 - 2y^2}{4y^2}$

$p^2 = \frac{(y^2-1)^2}{(2y)^2}$ $\quad p = \pm\frac{y^2-1}{2y}$, $\quad p = \frac{1}{2\sqrt{2}}$, $y = \sqrt{2} \Rightarrow$

$\frac{1}{2\sqrt{2}} = \pm\frac{1}{2\sqrt{2}} \Rightarrow$ выбир. „+"

$p = \frac{y^2-1}{2y}$

$y' = \frac{y^2-1}{2y}$

$\int\frac{2y\,dy}{y^2-1} = x + C_2$

$\ln(y^2-1) = x + C_2$

$y(0)=\sqrt{2} \Rightarrow \ln 1 = 0 + C_2 \Rightarrow C_2 = 0$

$\ln|y^2-1| = x$

$|y^2-1| = e^x$

$y=\sqrt{2} \Rightarrow y^2-1>0 \Rightarrow y^2-1=e^x$

$y^2 = 1+e^x$

$y = \pm\sqrt{1+e^x}$

$y=\sqrt{2}>0 \Rightarrow y=\sqrt{1+e^x}$

Ответ: $y=\sqrt{1+e^x}$

Проверим выполнимость условий теоремы Коши

$y'' = \frac{y^4-1}{4y^3}$

$f(x,y,y') = \frac{y^4-1}{4y^3}$ $M_0(0, \sqrt{2}, \frac{1}{2\sqrt{2}})$

$M_0 \in D(f) \Rightarrow f$ − непр. в окр. т. M_0

$f'(y) = \left(\frac{y}{4} - \frac{1}{4y^3}\right)' = \frac{1}{4} + \frac{3}{4y^4}$ − непрерывн. в окр. т. M_0

$f'_{y'} = 0$ непрерывн. везде $\Rightarrow$ реш. единственно

Линейное ДУ

$y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + a_2(x)\, y^{(n-2)} + \ldots + a_n(x)\, y = f(x)$

$f(x)$ − правая часть ДУ

$a_1(x), a_2(x), \ldots, a_n(x), f(x)$ − непрерывн. ф-ции

Опред: Если $f(x)=0$, то ДУ наз. однородн. В противном случае - неоднородным

Линейно зависимые и независимые ф-ции

Опред: Две ф-ции $y_1(x)$, $y_2(x)$ наз. линейно зависимыми

Пусть $n=2$

если сущ. C - const:

$y_1(x) = C y_2(x)$ (для всех x)

В противном случае ф-ции наз. линейно независимыми

Пример:

1) $y=e^x$, $y=e^{x+1}$ - линейно зависимые

$e^{x+1} = e^x \cdot e \Rightarrow C = e$

2) $y=0$, $y=e^x$ - линейно зависимые

$0 = 0 \cdot e^x \Rightarrow C=0$

3) $y=x$, $y=x^2$ - линейно независимые $\Rightarrow$

$x^2 = Cx \ (C \neq 0)$

$x^2 - Cx = 0$; $x(x-C)=0$ - это верно только для 2х значений x: $x_1=0$ $x_2=C$

$\Rightarrow x^2 \neq Cx$

4) Определитель Вронского

Опред: Определителем Вронского для 2х ф-ций $y_1(x)$, $y_2(x)$ наз. $W(x)$, равный $\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$

Св-во 1: Если $y_1(x)$, $y_2(x)$ – линейно зависимы, то $W(x) = 0$

Док-во: $y_1(x) = C y_2(x) \Rightarrow y_1'(x) = C y_2'(x)$

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Cy_2 & y_2 \\ Cy_2' & y_2' \end{vmatrix} = Cy_2 \cdot y_2' - Cy_2' \cdot y_2 = 0$$

Пример $W(x)$

$y_1 = x, \quad y_2 = x^2 \Rightarrow W(x) = \begin{vmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} = 2x^2 - x^2 = x^2$

Лекция 10

Линейные однородные ДУ 2го порядка

(*) $y'' + a_1(x) y' + a_2(x) y = 0$

$a_1(x)$, $a_2(x)$ – непрерывные ф-ции

1) Определитель Вронского

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

Свойство 1

Если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ - линейно зависимы, то $W(x) \equiv 0$

Свойство 2

Если $y_1(x), y_2(x)$ - решения $(*)$, то

$$W' = -a_1 W$$

Док-во:
$$y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1 = 0 \quad \Big| \cdot y_2$$
$$y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y_2 = 0 \quad \Big| \cdot y_1$$

$$\underbrace{y_2 y_1'' - y_2'' y_1}_{-W'} + a_1 \underbrace{(y_1' y_2 - y_2' y_1)}_{W} = 0$$

$$W(x) = y_1 y_2' - y_1' y_2$$

$$W'(x) = y_1 y_2' + y_1 y_2'' - (y_1'' y_2 + y_1' y_2') = y_1 y_2'' - y_1'' y_2$$

$$-W' - a_1 W = 0$$

$$W' = -a_1 W$$

Следствие 1: $W = c e^{-\int a_1 dx}$

Док-во: $\frac{dW}{dx} = -a_1 W$

$$\int \frac{dW}{W} = -\int a_1 dx + c$$

$$\ln|W| = -\int a_1 dx + c$$

$$W = \pm e^{-\int a_1 dx + c}$$

$$W = c e^{-\int a_1 dx}$$

Следствие 2: $W(x) \equiv 0$ либо $W(x) \neq 0$ для всех x

Док-во: если $c = 0 \Rightarrow W(x) \equiv 0$
если $c \neq 0 \Rightarrow W(x) \not\equiv 0$ для всех x

Следствие 3: если $y_1(x), y_2(x)$ - линейно независимое реш. ДУ(*), то $W(x) \neq 0$ для всех x.

Док-во: метод от противного

Пусть $W(x_0) = 0 \overset{\text{по следствию}}{\Longrightarrow} W(x) \equiv 0$

$$y_1 y_2' - y_1' y_2 \equiv 0$$

Т.к. y_1 и y_2 - линейно независимые, то $y_1 \neq 0$

$$\frac{y_1 y_2' - y_1' y_2}{y_1^2} \equiv 0$$

$$\left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = 0$$

$$\frac{y_2}{y_1} = c \Rightarrow y_2 = c y_1 \Rightarrow$$

y_1, y_2 - линейно зав. $\Rightarrow$ противоречит

Следствие 4. Пусть y_1 и y_2 - реш. ДУ(*)

y_1, y_2 - линейно незав. $\Leftrightarrow$ когда $W(x) \neq 0$ для всех x.

Док-во: $(\Rightarrow)$ (см. следствие 3)
$(\Leftarrow)$ от противного: пусть y_1, y_2 - линейно зависимые (см. начало лекции)

$\Rightarrow W(x) \equiv 0$, противоречие

Теорема (об общем решении ДУ(*))

Если y_1 и y_2 - линейно незав. решения ДУ(*), то общее решение однородного ур-ния.

$y_{oo} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$, где

C_1, C_2 – независимые произвольные постоянные

1 Покажем, что y_{oo} – реш. (*)

$\underline{C_1 y_1''} + \underline{C_2 y_2''} + a_1(\underline{C_1 y_1'} + C_2 y_2') + a_2(\underline{C_1 y_1} + \underline{C_2 y_2}) \stackrel{?}{=} 0$

$C_1(\underbrace{y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1}_{0}) + C_2(\underbrace{y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y_2}_{0}) \stackrel{?}{=} 0$

$0 = 0$

2 Покажем, что любое решение $\tilde{y}$ ДУ (*), может быть представлено в виде

$\tilde{y} = \tilde{C}_1 y_1 + \tilde{C}_2 y_2$

Пусть $\tilde{y}(x_0) = y_0$, $\tilde{y}'(x_0) = y_1$

Найдем $\tilde{C}_1$ и $\tilde{C}_2$: $\tilde{C}_1 y_1(x_0) + \tilde{C}_2 y_2(x_0) = y_0$

$\tilde{C}_1 y_1'(x_0) + \tilde{C}_2 y_2'(x_0) = y_1$

$\circ$ – число

$\tilde{C}_1, \tilde{C}_2$ – неизвестные

$W(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} \neq 0$ (см следствие 4)

$\Rightarrow$ сущ. ед. решение (по правилу Крамера)

$\tilde{y}$ – реш. $\begin{cases} y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 \\ \tilde{y}(x_0) = y_0 \\ \tilde{y}'(x_0) = y_1 \end{cases}$

$y = \tilde{C}_1 y_1 + \tilde{C}_2 y_2$ – реш. этой задачи Коши

По теореме Коши $\tilde{y} = \tilde{C}_1 y_1 + \tilde{C}_2 y_2$

Линейные однородные ДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами

(**) $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$, $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$

Замечание: хар. ур-ние получ. из ДУ заменой $y^{(n)} \to \lambda^n$

Теорема (об общем реш. ДУ (**))

Опред: Характеристическим ур-нием для ДУ (**) наз. ур-ние: $\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$

$y'' \to \lambda^2$, $y' \to \lambda$, $y \to 1$

1) Если λ_1, λ_2 - два различных корня хар. ур-ния, то $y_{oo} = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$

2) Если λ_1 - ед. корень (λ_1 - корень кратности 2) хар. ур-ния, то

$$y_{o.o.} = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 \underline{x} e^{\lambda_1 x}$$

3) Если $D<0$, то $y_{o.o} = C_1 e^{-\frac{a_1}{2}x} \cos\frac{\sqrt{-D}}{2}x + C_2 e^{-\frac{a_1}{2}x} \cdot \sin\frac{\sqrt{-D}}{2}x$

Замечание (способ запоминания ф-лы 3))

$$D<0 \quad \lambda_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{D}}{2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{(-D)}}{2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{-D}\sqrt{-1}}{2} =$$

$\boxed{D = a_1^2 - 4a_2}$

$$= \frac{-a_1 \pm \sqrt{-D}\, i}{2} \overset{\text{мнимая ед.}}{=}$$

$$= \underbrace{-\frac{a_1}{2}}_{\text{вещест. часть}} \pm \underbrace{\frac{\sqrt{-D}}{2}\, i}_{\text{мнимая часть}}$$

Пример.

1) $y'' + 2y' + 5y = 0$

$\lambda^2+2\lambda+5=0$

$D=4-20=-16$

$\lambda_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{-16}}{2}=\frac{-2\pm4i}{2}=-1\pm2i$

$y_{o.o}=C_1e^{-x}\cos2x+C_2e^{-x}\sin2x$

2) $y''+4y'+4y=0$

$\lambda^2+4\lambda+4=0$

$D=16-16=0$

$\lambda=-\frac{4}{2}=-2$

$y_{o.o}=C_1e^{-2x}+C_2xe^{-2x}$

Док-во: 1): Докажем, что $y_1=e^{\lambda_1x}$, $y_2=e^{\lambda_2x}$ – линейно незав. решения ДУ (**)

$y_1=e^{\lambda_1x}$ – реш. (**), т.к

$\lambda_1^2e^{\lambda_1x}+a_1\lambda_1e^{\lambda_1x}+a_2e^{\lambda_1x}\overset{?}{=}0$

$\lambda_1^2+a_1\lambda_1+a_2\overset{?}{=}0$, т.к λ_1 – корень

y_1, y_2 – линейно независимые, т.к

$$W(x)=\begin{vmatrix} e^{\lambda_1x} & e^{\lambda_2x} \\ \lambda_1e^{\lambda_1x} & \lambda_2e^{\lambda_2x}\end{vmatrix}=\lambda_2e^{\lambda_1x}e^{\lambda_2x}-\lambda_1e^{\lambda_1x}e^{\lambda_2x}=$$

$=e^{\lambda_1x}e^{\lambda_2x}(\lambda_2-\lambda_1)\neq0$, т.к $\lambda_1\neq\lambda_2$

Линейные однородные ДУ n-го порядка $n>2$ с постоянными коэффициентами

$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+\ldots+a_ny=0$ (***)

$a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R} \quad n \geq 2$

Опред.: Ур-ние вида $\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n = 0$ назыв. хар. ур-нием для ДУ (***)

Утверждение: Любой многочлен n-ой степени раскладыв. произв. 2х типов

Тип I $(x-a)^m$

Тип II $(x^2+px+q)^m$, где x^2+px+q - неразложимый ($D<0$) квадратный трехчлен

Правило 1. $y_{o.o} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x)$,

где $C_1, C_2, \ldots, C_n$ - независ. произв. постоянные

Замечание: Число слагаемых в сумме совпадает с порядком ДУ (***)

Правило 2. Если в разложении многочлена есть $(x-a)^m$, то в $y_{o.o}$ ему соотв. m ф-ций:

$y_1 = e^{ax}, \; y_2 = xe^{ax}, \; y_3 = x^2e^{ax}, \ldots \; y_m = x^{m-1}e^{ax}$

Замечание: $m=1: \; (x-a) \to y_1 = e^{ax}$

$m=2: \; (x-a) \to y_1 = e^{ax}, \; y_2 = xe^{ax}$

Правило 3. Если в разлож. многочлена есть множитель II типа $(x^2+px+q)^m$, то в $y_{o.o}$ ему соотв. m пар ф-ций:

$y_1 = e^{-\frac{p}{2}x} \cos\frac{\sqrt{-D}}{2}x \qquad y_2 = e^{-\frac{p}{2}x} \sin\frac{\sqrt{-D}}{2}x$

$y_3 = xe^{-\frac{p}{2}x} \cos\frac{\sqrt{-D}}{2}x \qquad y_4 = xe^{-\frac{p}{2}x} \sin\frac{\sqrt{-D}}{2}x$

$$y_{2m-1} = x^{m-1} e^{-\frac{p}{2}x} \cos\frac{\sqrt{-D}}{2}x$$
$$y_{2m} = x^{m-1} e^{-\frac{p}{2}x} \sin\frac{\sqrt{-D}}{2}x$$

Лекция 11

Лекция 11

Напоминание:

Линейное ДУ 2-го порядка:

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x)$$

Если $f(x) = 0$, то ДУ однородное

Если $f(x) \neq 0$, то ДУ неоднородное

$a_1(x), a_2(x), f(x)$ - ф-ции от x

Линейное ДУ 2-го порядка с постоянными коэфф. $y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x)$

$a_1, a_2 = const$

1. Линейное неоднородное ДУ высших порядков

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = f(x), \quad f(x) \neq 0 \quad (*)$$

Теорема: общее решение неоднородного ДУ $(*)$ имеет вид $y_{о.н} = y_{о.о} + y_{ч.н}$, где $y_{о.н}$ - общее решение неоднородного ур-ния, $y_{о.о}$ - общее реш. однородного ур-ния $(f(x)=0)$, $y_{ч.н}$ - частное реш. неоднородного ур-ния

Док-во (схема) $n = 2$ $\quad y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x)$

1) Покажем, что $y_{о.н}$ - реш. $(*)$

$$\underline{y''_{о.о}} + \underline{y''_{ч.н}} + a_1(x)(\underline{y'_{о.о}} + \underline{y'_{ч.н}}) + a_2(x)(y_{о.о} + y_{ч.н}) = f(x)$$

$y''_{oo} + a_1(x)\, y'_{oo} + a_2(x)\, y_{oo} = 0$
$y''_{ч.н} + a_1(x)\, y'_{ч.н} + a_2(x)\, y_{ч.н} = f(x)$ $\Big\|$ => верное равенство

г) Покажем, что любое решение $\tilde{y}$ для ДУ (*) имеет вид:

$$\tilde{y} = y_{oo} + y_{ч.н},\ т.е$$

$$\tilde{y} = \tilde{C}_1 y_1 + \tilde{C}_2 y_2 + y_{ч.н},\ где$$

y_1, y_2 - линейно независимые реш. (*) $(f(x)=0)$

д) Пусть $\tilde{y}(x_0) = y_0$, $\tilde{y}'(x_0) - y_1$, => $\tilde{y}$ - решение задачи Коши:

$$\begin{cases} y'' + a_1(x)\, y' + a_2(x)\, y = f(x) \\ \tilde{y}(x_0) = y_0 \\ \tilde{y}'(x_0) = y_1 \end{cases} \quad (**)$$

е) Найдем решение системы:

$$\begin{cases} \tilde{C}_1 y_1(x_0) + \tilde{C}_2 y_2(x_0) + y_{ч.н}(x_0) = y_0 \\ \tilde{C}_1 y_1'(x_0) + \tilde{C}_2 y_2'(x_0) + y'_{ч.н}(x_0) = y_1 \end{cases}$$

Эта система имеет ед. реш., т.к определитель системы есть определитель $W(x_0) \neq 0$

Поэтому ф-ция $y = \tilde{C}_1 y_1 + \tilde{C}_2 y_2 + y_{ч.н}$ явл. решением задачи Коши (**)

ё) $\tilde{y}$ и y явл. реш. одной задачи Коши (**) по теореме Коши $\tilde{y} = y$ ч.т.д.

2. Линейное неоднородное ДУ высших порядков с постоянными коэффициентами со спец. правой частью (***) $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = f(x)$, $a_1, a_2, \ldots \in R$

Таблица типов спец. правых частей $f(x)$

N	Правая часть $f(x)$	Пример
I	$f(x) = P_n(x)$ – многочлен степени n	$\overset{n=0}{P_0(x) = 100}$, $\overset{n=0}{P_0(x) = -5}$ $\overset{n=1}{P_1(x) = 2x - 1}$, $\overset{n=1}{P_1(x) = 6x}$ $\overset{n=2}{P_2(x) = 2x^2}$, $\overset{n=2}{P_2(x) = x^2 - 1}$
II	$f(x) = P_n(x)\, e^{\alpha x}$	$f(x) = xe^{-x}$, $n = 1$, $\alpha = -1$ $f(x) = 3e^{3x}$, $n = 0$, $\alpha = 3$

N	$f(x)$	α	β	n	m
1	$e^{-x}(x\cos 2x - 3\sin x)$	-1	2	1	0
2	$\cos x$	0	1	0	0
3	$e^{3x}\sin 5$	3	5	0	0

Теорема 1 (без док-ва). Пусть $f(x) = P_n(x)$

Тогда $y_{ч.н.} = x^r \tilde{P}_n(x)$, где r – кол-во корней хар. ур-ния равных 0

$\tilde{P}_n(x)$ – многочлен ст. n общего вида

n – степень многочлена из правой части ДУ

Таблица $\tilde{P}_n(x)$:

n	$P_n(x)$
0	A
1	$Ax + B$
2	$Ax^2 + Bx + C$
3	$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$

A, B, C, D – неопределённый коэффициент

Задача. Найти $y_{o.н}$ $y'' - 3y' = 1 - x^2$

Линейное неоднород. ДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами со спец. правой частью $f(x) = 1 - x^2$ $(n = 2)$

$y_{oн} = y_{o.o} + y_{ч.н}$

а) $y'' - 3y' = 0$

$\lambda^2 - 3\lambda = 0$

$\lambda(\lambda - 3) = 0$

$\lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = 3$

$y_{o.o} = C_1 + C_2 e^{3x}$

б) $y_{ч.н} = x^r \cdot \tilde{P}_n(x)$

$r = 1$ - кол-во корней хар. ур-ний равных 0

$n = 2 \Rightarrow P_n(x) = Ax^2 + Bx + C$

$y_{ч.н} = x(Ax^2 + Bx + C)$

$y_{ч.н} = Ax^3 + Bx^2 + Cx$

$y'_{ч.н} = 3Ax^2 + 2Bx + C$

$y''_{ч.н} = 6Ax + 2B$

Подставляем в исходное ДУ

$6Ax + 2B - 3(3Ax^2 + 2Bx + C) = 1 - x^2$

$-9Ax^2 + (6A - 6B)x + 2B - 3C = 1 - x^2$

$$\begin{array}{c|l}
x^2 & -9A = -1 \qquad A = \frac{1}{9} \\
x & 6A - 6B = 0 \qquad B = A = \frac{1}{9} \\
x^0 & 2B - 3C = 1 \Rightarrow \frac{2}{9} - 3C = 1 \qquad C = -\frac{7}{27}
\end{array}$$

$y_{ч.н} = \frac{1}{9}x^3 + \frac{1}{9}x^2 - \frac{7}{27}x$

Ответ: $y_{о.н} = C_1 + C_2 e^{3x} + \frac{1}{9}x^3 + \frac{1}{3}x^2 - \frac{7}{27}x$

Теорема 2 Пусть $f(x) = P_n(x)\, e^{\alpha x}$

Тогда $y_{ч.н} = x^r \tilde{P}_n(x)\, e^{\alpha x}$ где r - кол-во корней хар. ур-ний, равных α; n - степень многочлена из правой части $f(x)$. $\tilde{P}_n(x)$ - многочлен n-ой степени общего с неопределенными коэффициентом

Задача Найти $y_{о.н}$: $y'' + y' = 3e^{-x}$, $n=0, \alpha=-1$

$y_{о.н} = y_{о.о} + y_{ч.н}$

а) $y'' + y' = 0$ $\quad \lambda^2 + \lambda = 0$

$\lambda(\lambda+1) = 0$

$\lambda_1 = 0; \quad \lambda_2 = -1$

$y_{о.о} = C_1 + C_2 e^{-x}$

б) $y_{ч.н} = x^r \tilde{P}_n(x)\, e^{\alpha x}$

$r = 1$ - кол-во корней хар. ур-ний, равных $\alpha = -1$, $n = 0 \Rightarrow \tilde{P}_n(x) = A$

$y_{ч.н} = Ax e^{-x}$

$y'_{ч.н} = Ae^{-x} - Axe^{-x} = Ae^{-x}(1-x)$

$y''_{ч.н} = -Ae^{-x}(1-x) + Ae^{-x}(-1) = -Ae^{-x}(1-x+1) =$

$= -Ae^{-x}(2-x)$

Подставляем в исходное ДУ

$-Ae^{-x}(2-x) + Ae^{-x}(1-x) = 3e^{-x}$

$-2A + Ax + A - Ax = 3$

$-A = 3$
$A = -3$

$y_{ч.н} = -3xe^{-x}$

Ответ: $y_{о.н} = C_1 + C_2 e^{-x} - 3xe^{-x}$

Теорема 3. Пусть $f(x) = e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x)$

Тогда $y_{ч.н} = x^r e^{\alpha x}(\tilde{P}_e(x)\cos\beta x + \tilde{Q}_e(x)\sin\beta x)$,
где r - кол-во корней хар. ур-ния, равных $\alpha + \beta i$

Задача: Найти $y_{о.н}$: $y'' + 9y = 4\cos 2x$
$\alpha = 0,\ \beta = 2;\ n = 0;\ m = 0$

$y_{о.н} = y_{о.о} + y_{ч.н}$

а) $y'' + 9y = 0$
$\lambda^2 + 9 = 0$
$\lambda^2 = -9$
$\lambda_{1,2} = \pm 3i$

$y_{о.о} = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x$

б) $y_{ч.н} = x^r e^{\alpha x}(\tilde{P}_e\cos\beta x + \tilde{Q}_e\sin\beta x)$, $r = 0$, т.к. корней хар. ур-ния, равных $\alpha + \beta i = 2i$, нет

$e^{\alpha x} = e^{0x} = 1$

$e = \max(n, m) = 0 \Rightarrow \tilde{P}_0 = A,\ \tilde{Q}_0 = B$

$y_{ч.н} = A\cos 2x + B\sin 2x$

$y'_{ч.н} = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x$

$y''_{ч.н} = -4A\cos 2x - 4B\sin 2x$

Подставляем в исходное ДУ

$-4A\cos 2x - 4B\sin 2x + 9(A\cos 2x + B\sin 2x) = 4\cos 2x$

$$\begin{array}{l|l} \cos 2x & -4A + 9A = 4 \quad 5A = 4 \quad A = \frac{4}{5} \\ \sin 2x & -4B + 9B = 0 \quad 5B = 0 \quad B = 0 \end{array}$$

Ответ: $y_{он} = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x + \frac{4}{5}\cos 2x$

Лекция 12

Линейные неоднородные ДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами с произвольной правой частью

$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x)$, где $a_1, a_2 \in R$

$f(x)$ - произвольная ф-ция

Используем метод вариации произвольных постоянных:

Схема метода

1) Найдем 2 линейно независимых реш.

$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$

Пусть $y_1(x), y_2(x)$ - линейно незав. реш.

$y_{о} = C_1 y_1 + C_2 y_2$, где C_1, C_2 - незав. произв. постоянные

2) Будем искать $y_{он}$ в виде

$y_{он} = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$ Будем искать $C_1(x)$ и $C_2(x)$

$y'_{oн} = \underline{C_1' y_1} + C_1 y_1' + \underline{C_2' y_2} + C_2 y_2'$

Пусть $C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0$ (*)

тогда $y'_{oн} = C_1 y_1' + C_2 y_2'$

$y''_{oн} = \underline{C_1' y_1'} + C_1 y_1'' + \underline{C_2' y_2'} + C_2 y_2''$

Пусть $C_1' y_1' + C_2' y_2' = f(x)$ (**) тогда

$y''_{oн} = C_1 y_1'' + C_2 y_2'' + f(x)$

При ограничениях (*) и (**)

$y_{oн} = C_1 y_1 + C_2 y_2$ - явл. реш. ДУ $y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x)$

Дей-но,

$$\underline{C_1 y_1''} + \underline{C_2 y_2''} + f(x) + a_1(\underline{C_1 y_1'} + \underline{C_2 y_2'}) + a_2(\underline{C_1 y_1} + \underline{C_2 y_2}) \overset{?}{=} f(x)$$

$$C_1(\underbrace{y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1}_{0}) + C_2(\underbrace{y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y_2}_{0}) + f(x) \overset{?}{=} f(x)$$

$$f(x) = f(x)$$

А сущ. ли ф-ции C_1 и C_2 для которой выполняется ограничения (*) и (**)?

$$\begin{cases} y_1 C_1' + y_2 C_2' = 0 \\ y_1' C_1' + y_2' C_2' = f(x) \end{cases}$$

$C_1'(x)$ и $C_2'(x)$ - неизвестные в этой системе

Определителем этой системы явл определитель Вронского

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0 \text{ для всех } x$$

Поэтому данная система имеет ед.

реш. которая может быть получена, например, по правилу Крамера.

Пусть $C_1(x)$ и $C_2(x)$ - ед. реш. этой системы

3) Отсюда $C_1(x) = \int C_1'(x)dx = \int^x C_1'(x)dx + \tilde{C}_1$

$$C_2(x) = \int C_2'(x)dx = \int^x C_2'(x)dx + \tilde{C}_2$$

где $\tilde{C}_1$ и $\tilde{C}_2$ - настоящие постоянные интегралов

4) $y_{он} = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$

Полезная ф-ла:

$$\boxed{y'_{он} = C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x)}$$

Док-во:

$y'_{он} = C_1'y_1 + C_1y_1' + C_2'y_2 + C_2y_2' = C_1y_1' + C_2y_2'$

Задача:
$$\begin{cases} y'' + 3y' = \frac{9}{\sin 3x} \\ y(0) = \ln 4 \\ y'(0) = 3(1 - \ln 2) \end{cases}$$

Линейное неоднородное... (назв. параграфа)

① Найдем y_1, y_2:

$y'' + 3y' = 0$

Хар-ое ур-ние: $\lambda^2 + 3\lambda = 0$ $\quad \lambda(\lambda + 3) = 0$

$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -3$

$\Rightarrow y_1 = e^{0x}, \quad y_2 = e^{-3x}$

$y_1 = 1$

④ Ищем реш $y_{o.н.}$ в виде:

$$y_{o.н.} = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2$$

$$\begin{cases} y_1 C_1' + y_2 C_2' = 0 \\ y_1' C_1' + y_2' C_2' = f(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1' + e^{-3x} C_2' = 0 & (1) \\ 0 + (-3e^{-3x}) C_2' = \frac{3e^{3x}}{1+e^{3x}} & (2) \end{cases}$$

$$2) \Rightarrow \quad C_2' = \frac{-3e^{3x} e^{3x}}{1+e^{3x}}$$

$$1) \Rightarrow \quad C_1' = -e^{-3x} \quad C_2' = \frac{3e^{3x}}{1+e^{3x}}$$

③ $$C_1 = \int C_1' dx = \int \frac{3e^{3x} e^{3x}}{1+e^{3x}} dx = \int \frac{d(e^{3x}+1)}{1+e^{3x}} =$$

$$= \ln(1+e^{3x}) + \tilde{C}_1$$

$$C_2 = \int C_2' dx = \int \frac{-3e^{3x} e^{3x}}{1+e^{3x}} dx = -\int \frac{e^{3x} d(e^{3x})}{1+e^{3x}} =$$

$$= -\int \frac{t\,dt}{t+1} = -\int \frac{t+1-1}{t+1} dt = -\int \left(1 - \frac{1}{t+1}\right) dt =$$

$$= \int \frac{1}{t+1} d(t+1) - \int dt = \ln|t+1| - t + \tilde{C}_2 =$$

$$= \ln(e^{3x}+1) - e^{3x} + \tilde{C}_2$$

④ $$y_{o.н.} = (\ln(1+e^{3x}) + \tilde{C}_1) 1 + (\ln(e^{3x}+1) - e^{3x} + \tilde{C}_2) e^{-3x}$$

⑤ $$y(0) = \ln 4$$

$$\ln 4 = \ln 2 + \tilde{C}_1 + \ln 2 - 1 + \tilde{C}_2$$

$\ln 4 = \ln 4 + \tilde{C}_1 + \tilde{C}_2 - 1$

$\tilde{C}_1 + \tilde{C}_2 = 1$

$y'(0) = 3(1 - \ln 2)$

$\boxed{y'_{он} = c_1(x)\, y_1'(x) + c_2(x)\, y_2'(x)}$

$y'_{он} = 0 + (\ln(e^{3x}+1) - e^{3x} + \tilde{C}_2)(-3e^{-3x})$

$3(1 - \ln 2) = -3(\ln 2 - 1 + \tilde{C}_2)$

$3 - 3\ln 2 = -3\ln 2 + 3 - 3\tilde{C}_2$

$\tilde{C}_2 = 0 \Rightarrow \tilde{C}_1 = 1$

$y = (\ln(1+e^{3x}) + 1 + (\ln(1+e^{3x}) - e^{3x})\, e^{-3x}$

$y = \ln(1+e^{3x}) + 1 + e^{-3x} \ln(1+e^{3x}) - 1$

Ответ: $y = \ln(1+e^{3x})(1+e^{-3x})$

ОДУ