Лекция №1

Тема:

1. Матрица
2. Векторная алгебра
3. Аналитическая геометрия
4. Введение в математический анализ
5. Дифференциальное исчисление

Матричная алгебра

1. Понятие матрицы

Опр: Прямоугольная таблица чисел в которой n строк и m столбцов, вида

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Наз-ся матрицей размерности $(n \times m)$

Матрицы бывают:

1) Квадратные, $n = m$
2) Прямоугольные, $n \neq m$

3) Диагональные (не диагональ
элементы = 0)

4) Треугольные (элементы стоя
под главной диагональю = 0

5) Нулевая (все элементы рав
0)

6) Единичная (только квадратна
матрица) - (на главной диаг
ми 1, все - 0)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Действие над матриц

1) **Умножение** матриц на чи

$\lambda \in R \quad \lambda \cdot (n \times m) = (n \times m)$

Пример: $2 \times \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 5 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 8 \\ 10 & 0 & -4 \end{pmatrix}$

2) **Сложение**, **вычитание** матр

$(n \times m) \pm (n \times m) = (n \times m)$

Пример:

$\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-2 & 4-(-5) \\ 0-(-1) & 2-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

3) **Транспонирование** матриц

$(n \times m)^T = (m \times n)$

Пример:

$\begin{pmatrix}2\\-1\\4\end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix}2 & -1 & 4\end{pmatrix}$ – вектор строка

вектор столбец

$\underset{(2\times3)}{\begin{pmatrix}2 & -1 & 4\\0 & 5 & -2\end{pmatrix}}^t = \underset{(3\times2)}{\begin{pmatrix}2 & 0\\-1 & 5\\4 & -2\end{pmatrix}}$ =

4) <u>**Умножение**</u> матриц

$(n\times \underline{\underline{m}})\cdot(\underline{m}\times k) = (n\times k)$

Пример:

$\begin{pmatrix}2 & -1 & 4\\0 & 5 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -2\\3 & 0\\-4 & 5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_{11}, & a_{12}\\a_{21}, & a_{22}\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}2\cdot1+(-1)\cdot3+4\cdot(-4) & 2\cdot(-2)+(-1)\cdot0+4\cdot5\\0\cdot1+5\cdot3+(-2)\cdot(-4) & 0\cdot(-2)+(5\cdot0)+(-2)\cdot5\end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix}-17 & 16\\23 & -10\end{pmatrix}$

Пример:

$\underset{(1\times3)}{\begin{pmatrix}2 & -1 & 4\end{pmatrix}}\cdot\underset{(3\times1)}{\begin{pmatrix}0\\5\\-2\end{pmatrix}} = \underset{1\times1}{\begin{pmatrix}-13\end{pmatrix}}$

$\underset{(3\times1)}{\begin{pmatrix}0\\5\\-2\end{pmatrix}}\cdot\underset{(1\times3)}{\begin{pmatrix}2 & -1 & 4\end{pmatrix}} = \begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\a_{21} & a_{22} & a_{23}\\a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix} = \underset{(3\times3)}{\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\10 & -5 & 20\\-4 & 2 & -8\end{pmatrix}}$

3. Вычисление определителей квадратных матриц

1) Определитель 2-го порядка для матрицы 2×2 - $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, наз-

число $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$

2) Рассмотрим определитель 3-
порядка

Опр:

Минором (M_{ij}) матрицы (3×3 наз-ся число равное определит
ю 2-го порядка, вычисленно
для матрицы, получающей
вычеркиванием i-той строк
и j-того столбца из исходно
матрицы

Пример:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad M_{23} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - (-2)(-1) =$$

$$M_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = 3 - 0 = 3$$

3) Алгебраическое дополнение

Алгебраическим дополнением (A_{ij}
для матрицы (3×3) - наз-ся
ч-о, которое находится по пр
вилу

$A_{ij} = M_{ij} \cdot (-1)^{i+j}$ (если сум
нечетная то (-1), если четная, то (1))

Матрица знаков: $\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$

Пример:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & 3 \\ -5 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_{22} = M_{22} \cdot (-1)^{2+2}$$

$$A_{22} = +\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -5 & 0 \end{vmatrix} = 20$$

$$A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -6$$

4) Определитель 3-го порядка. Опр: для матрицы (3×3) — наз-ся число

$$|A| = \det A = a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + a_{13} A_{13}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Замечание:

1. Сумма, стоящая в правой части равенства — наз-ся разложением определителя по 1-ой строке
2. Определитель можно раскладывать по любой строке или по любому столбцу (результат при этом не изменится)

Пример:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & 3 \\ -5 & -2 & 0 \end{pmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -5 & 0 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -5 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\cdot 6 + 15 - 40 = \boxed{-13}$$

Разложим по 3-му столбцу

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & 3 \\ -5 & -2 & 0 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -5 & -2 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & -2 \end{pmatrix} = -40 - (3)(-9$$

$$= -40 + 27 = \boxed{-13}$$

Свойства определителей

1) Правило треугольников для в
ия определителей:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} + a_{31}\cdot a_{12}\cdot a_{23} +$$

$$+ a_{21}\cdot a_{32}\, a_{13} - (a_{31}\, a_{22}\, a_{13} +$$

$$+ a_{11}\, a_{32}\, a_{23} + a_{21}\, a_{12}\, a_{33})$$

2) Правило диагоналей

$$\left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} +$$

$$+ a_{13}a_{21}a_{32} - (a_{31}\cdot a_{2}$$

$$+ a_{32}\, a_{23}a_{11} + a_{33}\, a_{21}a_{12})$$

3) $|A| = |A^{т}|$

4) Если в опред-ле поменять местами 2 строки или 2 столбца определитель изменится на знак

5) Если в опред-ле имеются 2 одинаковые строки (столбца), то такой опред-ль равен „0"

Док-во $|A| = -|A| \Rightarrow 0$

6) Если в определителе умножить строку (столбец) на одно и тоже число, то определитель так же умножается на это число.

$$2\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 15 & 1 \\ 20 & 2 \end{vmatrix} = 5\cdot\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$$

7) Если некоторая строка (столбец) представляет собой сумму 2-х строк (столбцов), то определитель равен сумме опред-ей

$$\begin{vmatrix} a_{11}+a_{11}' & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+a_{21}' & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+a_{31}' & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}' & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}' & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}' & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

8) Если к строке (столбцу) определителя прибавить другую строку (столбец), умноженную на любое число, то определитель не изменится

Пример:

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 1 & 6 & 8 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 6 & 8 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix}^{(-2)} = -\begin{vmatrix} 1 & 6 & 8 \\ 0 & -8 & -11 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix}^{(-3)} = -\begin{vmatrix} 1 & 6 & 8 \\ 0 & -8 & -11 \\ 0 & -16 & -20 \end{vmatrix}^{(-2)} =$$

$= \begin{vmatrix} 1 & 6 & 8 \\ 0 & -8 & -11 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -1(-8)\cdot 2 =$ ⑯

9) Определитель Δ матрицы ра
произведению элементов гла
диагонали.

Замечание:

На св-ах 8 и 9 построен мет
вычисления опред-ей любого п
ка – Метод Гаусса:

Суть метода Гаусса:

за счет преобразований 8 определи
матрицы сводятся к определи
треугольной матрицы, а далее
9 (пример св-во) 8

Пример: исп М Г

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & -3 \\ 0 & -5 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \end{vmatrix}$$

$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{vmatrix} =$ ㊽

Понятие вычисления обратной матрицы

Опр:

Обратной матрицей для квадратной матрицы A- называется матрица A^{-1} такая, что

$$A\cdot A^{-1} = A^{-1}\cdot A = E = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Замечание:

Если $A\cdot A^{-1} = E$, то $A^{-1}\cdot A = E$

Теорема:

Обратная матрица для A) существует тогда и только тогда (⟺) когда определитель этой матрицы $\neq 0$

Формула для выч-я A^{-1}

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}&A_{13}\\A_{21}&A_{22}&A_{23}\\A_{31}&A_{32}&A_{33}\end{pmatrix}^t$$

Пример: Вычислить A^{-1}

$$A = \begin{pmatrix}1&2&0\\-1&3&-4\\0&5&-2\end{pmatrix} \qquad A_{11} = \begin{pmatrix}3&-4\\5&-2\end{pmatrix} = -6+20 = 14$$

$$A_{12} = -\begin{pmatrix}-1&-4\\0&-2\end{pmatrix} = -2$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix}-1&3\\0&5\end{vmatrix} = -5$$

$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = 4$ $\qquad$ $A_{21} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -8$

$A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2$ $\qquad$ $A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} = 4$

$A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = -5$ $\qquad$ $A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 5$

$|A| = 1 \cdot 14 + 2 \cdot (-2) + 0 = 14 - 4 = 10$

$$A^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 14 & -2 & -5 \\ 4 & -2 & -5 \\ -8 & 4 & 5 \end{pmatrix}^{T} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 14 & 4 & -8 \\ -2 & -2 & 4 \\ -5 & -5 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1{,}4 & 0{,}4 & (-0{,}8) \\ -0{,}2 & -0{,}2 & 0{,}4 \\ -0{,}5 & -0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & -4 \\ 0 & 5 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1{,}4 & 0{,}4 & (-0{,}8) \\ (-0{,}2) & (-0{,}2) & 0{,}4 \\ (-0{,}5) & (-0{,}5) & (0{,}5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & -4 \\ 0 & 5 & -2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{10}$$

$$= \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

Использование метода Гау
для вычисления обратно
матрицы:

Строчки менять местами мо
А столбцы нет

Можно строчки делить на чи

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -1 & \end{array}\right.$$

$$= \left(\begin{matrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -4/5 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/5 & 1/5 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{matrix}\right) = \left(\begin{matrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ \text{[illegible]} & \text{[illegible]} & \text{[illegible]} \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 \end{matrix}\right) =$$

$$= \left(\begin{matrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ \text{[illegible]} & \text{[illegible]} & \text{[illegible]} \\ \text{[illegible]} & \text{[illegible]} & \text{[illegible]} \end{matrix}\right) = \left(\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} \text{[illegible]} & \text{[illegible]} & \text{[illegible]} \\ \text{[illegible]} & \text{[illegible]} & \text{[illegible]} \\ \text{[illegible]} & \text{[illegible]} & \text{[illegible]} \end{matrix}\right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1,4 & 0,4 & -0,8 \\ -0,2 & -0,2 & 0,4 \\ -0,5 & -0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$$

Решение систем линейных уравнений

1. Метод Крамера

$$(*)\begin{cases} ax + by = f & |\cdot c \\ cx + dy = g & |\cdot a \end{cases}$$

x и y – неизв
a, b, c, d, f, g – числа ∈ R

$bcy - ady = cf - ag \qquad bc - ad \neq 0$

$$y = \frac{cf - ag}{bc - ad} = \frac{ag - cf}{ad - bc} \qquad \frac{\begin{vmatrix} a & f \\ c & g \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$$

$$x = \begin{vmatrix} f & b \\ c & d \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

Теорема: Пусть $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ – определитель системы

$\Delta x = \begin{vmatrix} f & b \\ g & d \end{vmatrix} \qquad \Delta y = \begin{vmatrix} a & f \\ c & g \end{vmatrix}$

1) Если $\Delta \neq 0$, то существует единственное решение системы (*)

$x = \frac{\Delta x}{\Delta}$ $y = \frac{\Delta y}{\Delta}$ - формула Кра

2) Если $\Delta = 0$ $\Delta x = 0$ то (*) имеет б
нечно много решений (в этом
чае одно уравнение из другог
лучается умножением на о
число).

Решением явл-ся прямая, т
ки лежащие на прямой

3) Если $\Delta 0$ $\Delta x \neq 0$ то система
имеет решений (несовместна

<u>Пример</u>:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ x + 5y = -4 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 10 + 3 = 13$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} = 25 - 12 = 13$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -8 - 5 = -13$$

$$x = \frac{13}{13} = 1 \quad y = \frac{-13}{13} = -1$$

Метод Крамера для случая трех линейных урав

$$(**)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

Теорема:

Пусть: $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ $\Delta x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

$\Delta y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$ $\Delta z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$

1) Если определитель $\Delta \neq 0$, то сущ-ет единственное решение

$x_1 = \frac{\Delta x}{\Delta}$, $x_2 = \frac{\Delta y}{\Delta}$, $x_3 = \frac{\Delta z}{\Delta}$

2) Если $\Delta = \Delta x = \Delta y = \Delta z = 0$, причём если строки в опред-ле Δ пропорциональна, то и строки в Δx пропорциональны, тогда в этом случае имеется бесконечно много решений

3) В остальных случаях система - несовместна

Определение:

Если столбец свободных членов равен нулевому столбцу, то такая система - наз-ся однородной, в другом случае - неоднородна.

Теорема: Пусть,

Система (**) однородная

1) если $\Delta \neq 0$ то существует единственная нулевое решение

2) если $\Delta = 0$ то в этом случае сущ-ет бесконечно много решений

Метод обратной матри
для решения систем ли
ых уравнений

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$AX = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{pmatrix}$$

Систему (**) можно пере
в матричной форме

$AX = B$

Пусть $|A| \neq 0 \Rightarrow$ сущ-ет A^{-1}

$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \quad EX = A^{-1}B$

$X = A^{-1}B$ — решение системы
ричной форме.

Пример:

$$\begin{cases} 2x - y + z = 2 \\ x - 3z = -2 \\ 2y + z = 3 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B =$$

$A_{11} = 6 \quad A_{21} = 3 \quad A_{31} = 3$

$A_{12} = -1 \quad A_{22} = 2 \quad A_{32} = 7$

$A_{13} = 2 \quad A_{23} = -4 \quad A_{33} = 1$

$|A| = 2 \cdot 6 + (-1)(-1) + 1 \cdot 2 = 12 + 1 + 2 = 15$

$\begin{pmatrix}6&-1&2\\3&2&-4\\3&7&-1\end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix}6&3&3\\-1&2&7\\2&-4&1\end{pmatrix}$ $A^{-1} = \frac{1}{15}\begin{pmatrix}6&3&3\\-1&2&7\\2&-4&1\end{pmatrix}$

$X = A^{-1}B = \frac{1}{15}\begin{pmatrix}6&3&3\\-1&2&7\\2&-4&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-2\\3\end{pmatrix} = \frac{1}{15}\begin{pmatrix}12-6+9\\-2-4+21\\4+8+3\end{pmatrix} =$

$= \frac{1}{15}\begin{pmatrix}15\\15\\15\end{pmatrix} = \begin{matrix}1\\1\\1\end{matrix}$

Ответ: $x=1$ $y=1$ $z=1$

Использование метода Гауса к решению систем линейных уравнений

Преобразование Гауса

1) Можно прибавлять к строке любую другую строку умноженную на число

2) Можно менять строки местами (знак не меняется). Столбца тоже можно менять, но при этом надо запоминать соответствие неизвестных столбцам

3) Можно делить строку на одно наше число

Пример

$\begin{cases}2x-y+z=1\\x+2y-z=2\\5x+z=4\end{cases}$ $A = \left(\begin{matrix}2&-1&1\\1&2&-1\\5&0&1\end{matrix}\middle|\begin{matrix}1\\2\\4\end{matrix}\right)$

Цель преобразований - привест
к треугольному виду

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & \big| & 1 \\ 1 & 2 & -1 & \big| & 2 \\ 5 & 0 & 1 & \big| & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} * & y & x \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & \big| & 1 \\ -1 & 2 & 1 & \big| & 2 \\ 1 & 0 & 5 & \big| & 4 \end{pmatrix} \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{array} \right.$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & \big| & 1 \\ 0 & 1 & 3 & \big| & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \big| & 0 \end{pmatrix}$$

Замечание: столбцы можно
нять только те, которые наход
левее вертикальной черты

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z - y + 2x = 1 \quad ① \\ y + 3x = 3 \quad ② \end{cases}$$

$② \Rightarrow y = 3 - 3x$

$① \Rightarrow z - (3 - 3x) + 2x = 1$

$z = 1 - 2x + 3 - 3x$

$z = 4 - 5x$

$$\begin{cases} y = 3 - 3x \\ z = 4 - 5x \end{cases}, x \in R$$

Опр:

Неизвестные через которые вы
остальные неизвестные на
свободными а те которые в
через свободные наз-ся - базис

x - свободные неизв, $x \in R$

y, z - базисные неизв

Векторная алгебра

1. Основные понятия

Вектор - направленный отрезок.

$\overline{AB}$, $\overline{a}$

Модуль вектора - длина отрезка

$|\overline{AB}|$, $|\overline{c}|$

Равные вектора - два вектора наз-ся равными если они равны по модулю и по направлению

$\overline{a} = \overline{b}$

Коллинеарные вектора - это вектора лежащие на || прямых либо на одной прямой $\overline{a} \parallel \overline{b}$ где если смотрят в одну сторону то со-направлены, а если наоборот, то противоположно направлены

2. Действия с векторами

1) Сложение векторов

Правило треугольника

$\overline{a} + \overline{b} = \overline{c}$

Правило параллелограмма - соединяем начала, достраиваем до пар-ма, сумма - его диагональ

2) Вычитание

$\bar{a} - \bar{b} = \bar{c}$

Вектор, идущий из конца в
таемого в конец уменьш
ие

3) Умножение вектора на чи

Положит-ое (+) число

$2\bar{a} \uparrow\uparrow \bar{a}$

Отрицательное (-) число - будет
реть в противоположную стор

$-0,5\bar{a} \uparrow\downarrow 0,5\bar{a}$

4) Проекция вектора на ось дру
вектора

Проекция вектора ā на ось $\bar{b}$

ос $\bar{a}$ - векторная пр
ция ā на ось $\bar{b}$

Проекция ā на $\bar{b}$ - это число р
ра равное |ā| если ā сонаправл
вектором $\bar{b}$, но если они проти
ложные, то = -|ā|

Утверждение:

Два вектора коллинеарны когд
сущ (∃) число λ (∈R) такое, что ā

3. Основная теорема векторной алгебры

а) Плоскость

Опр: Два не нулевых не коллинеарных вектора на плоскости наз-ся – базисом плоскости

Основная теорема для плоскости

Любой вектор на плоскости мб единственным образом разложен по векторам некоторого базиса плоскости, т.е.

Пусть $\bar e_1, \bar e_2$ – базис пл-ти

$\bar a$ – произв. вектор

$\exists$ – единственные числа $x, y \in \mathbb{R}$ – такие что

$\boxed{\bar a = x\bar e_1 + y\bar e_2}$

$\bar a = \bar e_1' + \bar e_2' = x\bar e_1 + y\bar e_2$

б) Случай в пространстве

Три вектора наз-ся компланарными если они лежат в одной пл-ти, либо в $\parallel$ плоскостях. В противном случае вектора некомпланарны

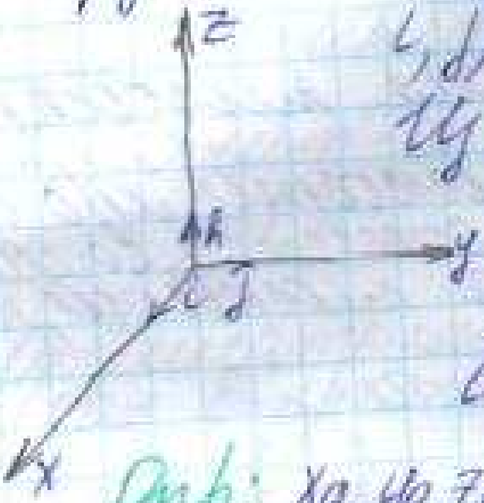
Три не нулевых не компланарных вектора в пространстве наз-ся – базисом пространства

(Т) Пусть $\bar e_1, \bar e_2, \bar e_3$ – базис в R^3 (пр-ва)
$\bar a$ – произв. вектор
$\exists$ – единственные числа $x, y, z \in R$:

$$\boxed{\bar a = x\bar e_1 + y\bar e_2 + z\bar e_3}$$

4. Координаты вектора

Рассмотрим пространство, си
координат



i, j, k - единич вектор
Из основной Т следу
для любого век
$\bar a$ ∃ ед-е числа
$x_a, y_a, z_a \in R$, так

$\bar a = x_a\bar i + y_a\bar j + z_a\bar k$

Опр: x_a, y_a, z_a - координаты в
ра

Запись:

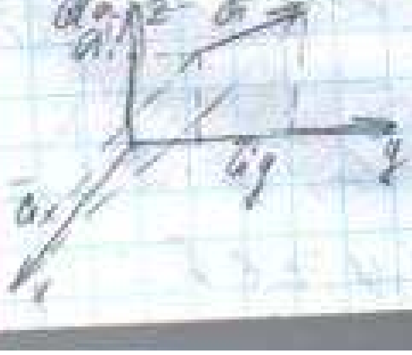
$\bar a = \{x_a, y_a, z_a\}$

Тоже координаты можно н
еще 2-мя способами

2-й способ: проектируем $\bar a$ н

Координаты вектора - это коо
т. конца вектора, смещенн
начало координат

3-й способ:



Координаты вект
проекции вект
оси координат

1. Действие с векторами в координатной форме

$\bar{a} = \{x_a, y_a\}$ $\bar{b} = \{x_b; y_b\}$

1) $\bar{a} \pm \bar{b} = (x_a \pm x_b; y_a \pm y_b)$

2) $\lambda \bar{a} = \{\lambda x_a; \lambda y_a\}$

3) $\bar{a} \parallel \bar{b} \Leftrightarrow \frac{x_a}{x_b} = \frac{y_a}{y_b}$

Задача. Разложить по базису

$\bar{a} = \{2; 1\}$ $\bar{e}_1 = \{1; 3\}$ $\bar{e}_2 = \{4; -3\}$

Решение:

1) Проверить неколлинеарность векторов $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$

$\frac{1}{4} \neq \frac{3}{-3} \Rightarrow \bar{e}_1, \bar{e}_2$ – базис

$\bar{a} = x\bar{e}_1 + y\bar{e}_2$

$x\bar{e}_1 = \{x; 3x\}$ $y\bar{e}_2 \{4y; -3y\}$

$x\bar{e}_1 + y\bar{e}_2 = \{x+4y; 3x-3y\}$

$\bar{a} = x\bar{e}_1 + y\bar{e}_2 \Rightarrow \begin{cases} x+4y=2 \\ 3x-3y=-1 \end{cases}$

$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = -3-12 = -15$

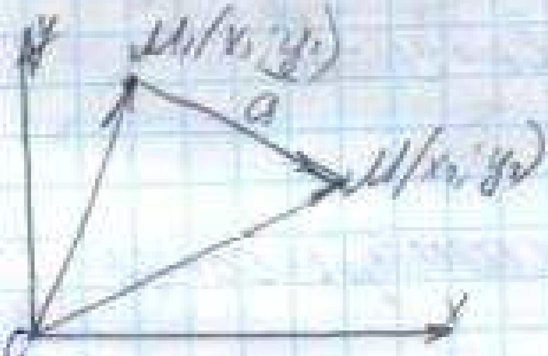
$\Delta x = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = -6+4 = -2$

$\Delta y = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -1-6 = -7$

$x = \frac{-2}{-15} = \frac{2}{15} \quad y = \frac{7}{15}$

$\overline{a} = \frac{2}{15}\overline{e}_1 + \frac{7}{15}\overline{e}_2$

2. Координата вектора с за
ми координатами начала
конца



$OM_1 = (x_1; y_1)$

$OM_2 = (x_2; y_2)$

$\overline{M_1M_2} = OM_2 - O$
$= \{x_2 - x_1; y_2 - y_1\}$

Для того чтобы получить
динаты вектора нужно
динат конца вычесть коор
ты начала

3. Деление отрезка в данном
шении

$M(x;y)$ - неизвестна

Известно, что $\frac{M_1M}{MM_2} = \lambda$

Найдём т. $M(x;y)$

Решение:

$\overline{M_1M} = \lambda \cdot \overline{MM_2}$

$\overline{M_1M} = \{x - x_1; y - y_1\}$

$M_1M_2 = \{x_2 - x, y_2 - y\}$

$\lambda\, \overline{M_1M_2} = \{\lambda(x_2 - x), \lambda(y_2 - y)\}$

$\begin{cases} x - x_1 = \lambda(x_2 - x) \\ y - y_1 = \lambda(y_2 - y) \end{cases}$ $\begin{cases} x + \lambda x = x_1 + \lambda x_2 \\ y + \lambda y = y_1 + \lambda y_2 \end{cases}$

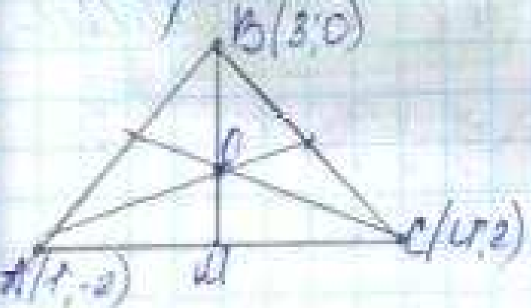
$$\begin{cases} x = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda} \\ y = \dfrac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda} \end{cases}$$

Частный случай

M - середина M_1M_2

$\lambda = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{x_1 + x_2}{2} \\ y = \dfrac{y_1 + y_2}{2} \end{cases}$

Задача:



Найти пересечение медиан

1) Найдём точку M - середина AC

$x = \dfrac{1+4}{2}$ $y = \dfrac{-2+2}{2}$ $x = 2,5$ $y = 0$

M(2,5;0)

2) BM B(3;0) M(2,5;0)

$\lambda = 2$ $x = (3+2\cdot2,5)/1+2 = 8/3 \approx 2,7$

$y = \frac{0+2\cdot 0}{1+2} = 0$ $B\bar{M}\left[\frac{2}{3}; 0\right]$

4. Скалярное произведение 2-х в
ров

Опр: Скалярное произведение 2-
торов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется число

$\bar{a}\cdot\bar{b} = |\bar{a}||\bar{b}|\cos\varphi$

Скалярное произведение в ко
натной форме

$\bar{a} = \{x_a; y_a\}$ $\bar{b} = \{x_b; y_b\}$

св-ва скалярного произведения
ва)

1) $\lambda(\bar{a}+\bar{b}) = \lambda\bar{a}+\lambda\bar{b}$
2) $(\lambda+\mu)\bar{a} = \lambda\bar{a}+\mu\bar{a}$
3) $\bar{a}+\bar{b} = \bar{b}+\bar{a}$
4) $(\bar{a}+\bar{b})+\bar{c} = \bar{a}+(\bar{b}+\bar{c})$
5) $\bar{a}\cdot\bar{b} = \bar{b}\cdot\bar{a}$
6) $\bar{a}\cdot(\bar{b}+\bar{c}) = \bar{a}\cdot\bar{b}+\bar{a}\cdot\bar{c}$
7) $(\lambda\bar{a})\bar{b} = \lambda\cdot(\bar{a}\cdot\bar{b})$

Основные св
действи
вектор

Замечание:

Скалярное произведение удовл
ряет тем-же свойствам ч
произведение чисел, за искл

Условие перпендикулярности:

$\bar{a} \perp \bar{b} \Leftrightarrow \bar{a} \cdot \bar{b} = 0$

Теорема: $\bar{a} = \{x_a; y_a\}$, $\bar{b} = \{x_b; y_b\} \Rightarrow \bar{a} \cdot \bar{b} = x_a x_b + y_a y_b$

Доказательство

$\bar{a} = x_a \bar{i} + y_a \bar{j}$ $\quad \bar{b} = x_b \bar{i} + y_b \bar{j}$

$\bar{a} \cdot \bar{b} = (x_a i + y_a j)(x_b i + y_b j) = x_a x_b i^2 + \underline{x_a y_b i j}^{0} + \underline{y_a x_b j i}_{0} + y_a y_b \cdot j^2 = \underline{x_a x_b + y_a y_b}$ т.к.

$i \perp j \quad i^2 = 1 \; j^2 = 1$

5. Вычисление углов:

$\cos\varphi = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}||\bar{b}|}$

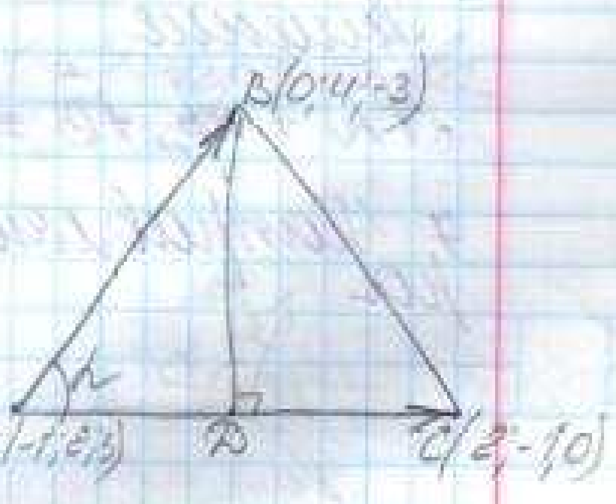
$\bar{a} \cdot \bar{a} = \bar{a} = |\bar{a}||\bar{a}| \cos 0 = |\bar{a}||\bar{a}| = |\bar{a}|^2$

$\boxed{\bar{a}^2 = |\bar{a}|^2} \Rightarrow |\bar{a}| = \sqrt{\bar{a}^2}$

$\bar{a}^2 = \bar{a} \cdot \bar{a} = x_a x_a + y_a y_a = x_a^2 + y_a^2$

$|\bar{a}| = \sqrt{x_a^2 + y_a^2}$

$\cos\varphi = \frac{x_a x_b + y_a y_b}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2}\sqrt{y_b^2 + x_b^2}}$



Задача:

Найти cos α

$\vec{AB} = \{1; 2; 6\}$

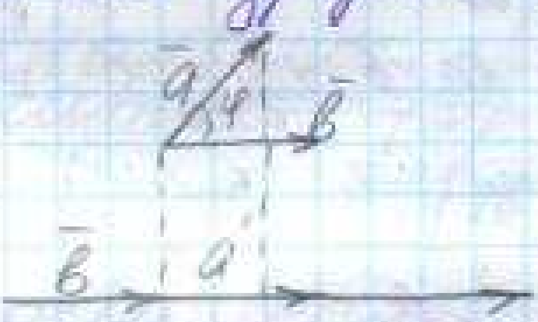
$\overline{AC} = \{3; -3; -3\}$

$\cos\alpha = \frac{1\cdot 3 + 2\cdot(-3) + (-6)\cdot(-3)}{\sqrt{1+4+36}\,\sqrt{9+9+9}} = \frac{15}{\sqrt{41}\cdot}$

$= \frac{5}{\sqrt{41}\cdot\sqrt{3}}$

$\alpha = \arccos\frac{5}{\sqrt{41}\cdot\sqrt{3}}$

6. Вычисление проекции вект на ось другого вектора



проекция $\bar{a}$ на
$= |\bar{a}| \cdot \cos\varphi$

(из тригонометрии
решения в прям
ном Δ)

$пр_{\bar{b}}\bar{a} = |\bar{a}| \cdot \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}||\bar{b}|} = \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{b}|}$

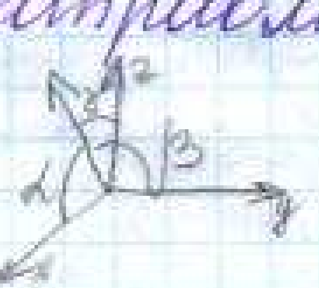
$пр_{\bar{b}}\bar{a} = \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{b}|} = \frac{x_a\cdot x_b + y_a\cdot y_b}{\sqrt{x_b^2 + y_b^2}}$

Задача: в Δ ABC (см предыдущ
ти AD

Решение

$\overline{AD} = пр_{AC}\overline{AB} = \frac{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}{|AC|} = \frac{15}{\sqrt{27}} = \frac{5}{\sqrt{3}}$

7. Направляющие косинус ра



α, β, γ - это угла о
вектора $\bar{a}$ с осям
Ox, Oy, Oz

Опр: Косинус α, β, γ - наз-ся направляющими косинусами вектора

$\bar{a} = \{x_a, y_a, z_a\}$

$x_a = пр_x \bar{a} = |\bar{a}| \cos\alpha$ (см ⑤)

$\cos\alpha = \frac{x_a}{|a|}$

аналогично:

$\cos\beta = \frac{y_a}{|a|}$ $\quad \cos\gamma = \frac{z_a}{|a|}$

Свойства направляющих косинусов:

1) $\bar{a}_0 = \{\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma\}$ - это единичный вектор сонаправленный с вектором $\bar{a}$ (орт вектора $\bar{a}$)

$\bar{a}_0 = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\} = \left\{\frac{x_a}{|a|}; \frac{y_a}{|a|}; \frac{z_a}{|a|}\right\} =$

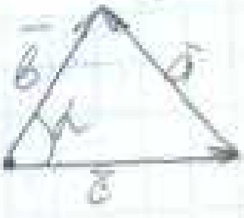
$= \frac{1}{|a|}\{x_a; y_a; z_a\} = \frac{1}{|a|} \cdot \bar{a}$

$\bar{a}_0 = \frac{1}{|a|} \bar{a} \Rightarrow \begin{cases} |\bar{a}_0| = 1 \\ \bar{a}_0 \uparrow\uparrow \bar{a} \end{cases}$

2) $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ из 1 св-ва

10.10.12 ① Применение скалярного
векторов к планиметрии

а) Теорема косинуса



$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$

$\bar a = \bar b - \bar c$

$a^2 = |\bar a|^2 = |\bar b - \bar c|^2$

Используем формулу из прош
лекции

$|\bar a|^2 = \bar a^2 = (\bar b - \bar c)^2 = (\bar b - \bar c)(\bar b - \bar c) = \bar b^2 -$
$+ c^2 = |\bar b|^2 + |\bar c|^2 - 2|\bar b||\bar c|\cos\alpha = b^2 + c^2 -$

б) Рассмотрим парал-ма и
помним

$d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2$
$d_1 = a + b$
$d_2 = a - b$

$\bar d_1^2 + \bar d_2^2 = |\bar d_1|^2 + |\bar d_2|^2 = |\bar a + \bar b|^2 + |\bar a - \bar b|^2 =$

$(\bar a - \bar b)^2 = \bar a^2 + 2\bar a\bar b + \bar b^2 + \bar a^2 - 2\bar a\bar b + \bar b^2 =$

$= 2\bar a^2 + 2\bar b^2$

Векторным произведением 2
ров $\bar a$ и $\bar b$ наз-ся вектор $\bar c =$

1) $|c| = |\bar a|\cdot|\bar b|\sin\alpha = S_{пар}$

2) $\bar c \perp \bar a$ $\bar c \perp \bar b$
направлен по правилу пра
ки (буравчика)

Свойства векторного произведения:

1. $\bar a \times \bar b = -\bar b \times \bar a$

2. $(\lambda \bar a)\cdot \bar b = \lambda(\bar a \times \bar b)$

3. $(\bar a + \bar b)\bar c = \bar c \bar a + \bar b \times \bar c$

4. $\bar a \times \bar b = 0 \Leftrightarrow \bar a \parallel \bar b$ – условие коллинеарности 2-х векторов

3. Векторное произведение в координатной форме.

Теорема: Пусть:

$$\left.\begin{array}{l}\bar a = \{xa; ya; za\}\\ \bar b = \{xb; yb; zb\}\end{array}\right\| \Rightarrow \bar a \times \bar b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ xa & ya & za \\ xb & yb & zb \end{vmatrix}$$

Доказательство:

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ \bar i \times \bar j = \bar k \\ \bar k \times \bar i = \bar j \\ \bar j \times \bar k = \bar i \end{array}\right\}$$ правые тройки и определение векторного произведения

$\bar i \times \bar i = 0$

$\bar i \times \bar j = \bar k$ ·

$|\bar i \times \bar j| = |\bar i| \times |\bar j| \cdot \sin 90^\circ = 1 = \underline{1}$

$$\left.\begin{array}{l}(\bar i \times \bar j) \perp \bar i \\ \qquad \perp \bar j\end{array}\right| \Rightarrow \bar i \times \bar j = \bar k$$

$\bar j \times \bar j = 0 \qquad \bar k \times \bar k = 0$

$\bar a \times \bar b = (xa\, \bar i + ya\cdot \bar j + za\cdot \bar k) \times (xb\, i + yb\, j + zb\, k) =$

$= \underline{xa\, i \times xb\, i} + xa\, i\, yb\, i \times j + xa\cdot zb\, i \times k +$

$y_a x_b\, j \times i + \cancel{y_a y_b\, j \times j}^{0} + y_a z_b\, j \times k +$

$+ z_a x_b\, k \times i + z_a y_b\, k \times j + \cancel{z_a z_b\, k \times k} =$

$= (x_a y_b - y_a x_b) k + (z_a x_b - x_a z_b) \cdot j$

$= \begin{vmatrix} y_a & z_a \\ y_b & z_b \end{vmatrix} \cdot i - \begin{vmatrix} x_a & z_a \\ x_b & z_b \end{vmatrix} \cdot j + \begin{vmatrix} x_a & y_a \\ x_b & y_b \end{vmatrix} k =$

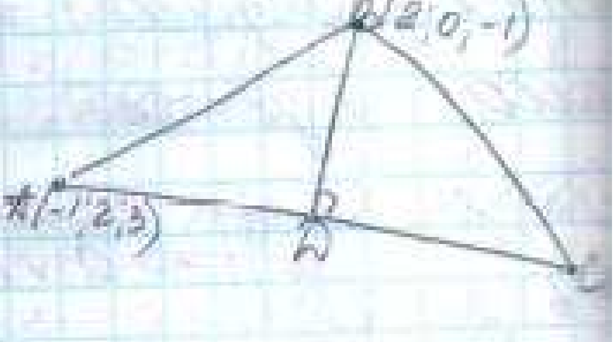
$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{vmatrix}$

Задача:

Найти:

S_{ABC} - ?

BD - ?



Решение:

1) $S_{ABC} = \frac{1}{2} S_{пар}$ $S_{ABC} = \frac{1}{2} |\overline{AB} \times \overline{AC}|$

$\overline{AB} = \{3; -2; -4\}$ $\overline{AC} = \{1; -3; -3\}$

Векторное произведение

$\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -2 & -4 \\ 1 & -3 & -3 \end{vmatrix} = i \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ -3 & -3 \end{vmatrix} - j$

$= -6i + 5j - 7k = \{-6; 5; -7\}$

$|\overline{AB} \times \overline{AC}| = \sqrt{36 + 25 + 49} = \sqrt{110}$

$S_\Delta = \frac{1}{2} \sqrt{110}$

2) $S_\Delta = \frac{1}{2} BD \times AC$

$$BD = \frac{S_\Delta}{\frac{1}{2} AC} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{110}}{\frac{1}{2}\sqrt{19}} = \frac{\sqrt{110}}{\sqrt{19}}$$

$AC = |\overline{AC}| = \sqrt{1+9+9} = \sqrt{19}$

4. Понятие смешанного произведения

Опр:

Смешанным произведением 3-х векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ наз-ся число:

$\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} = (\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c}$

Геометрический смысл смешанного произведения

$V_{\text{парал}} = (\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c})$

$V_{\text{парал}} = S_{\text{осн}} \; H = |\bar{a} \times \bar{b}|$

$|\text{пр}_{\bar{a}\times\bar{b}} \bar{c}| = |\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c}|$ так как

$|\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c}| = |(\bar{a} \times \bar{b})\, \bar{c}| =$

$= |\bar{a} \times \bar{b}) \cdot |\bar{c}| \cos\alpha = \text{пр}|a \times b|$

$\cdot |\text{пр}_{a \times b} \bar{c}|$

$V_{\text{пир}} = \frac{1}{6} V_{\text{пар}} = \frac{1}{6} |\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c}|$

5. Смешанное произведение координатных форм

Теорема!

Если вектор $\bar{a}\{x_a, y_a, z_a\}$

$\bar{b}\{x_b; y_b; z_b\}$

$\bar{c}\{x_c, y_c, z_c\}$, т

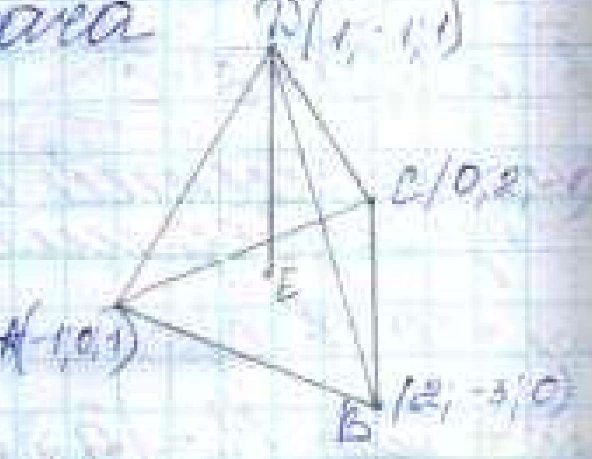
$$\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c} = \begin{vmatrix} x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \\ x_c & y_c & z_c \end{vmatrix}$$

Задача

Найти

Vпир

DE - высота



Решение

1) $\overline{AB} = \{3; -3; -1\}$ $\overline{AC} = \{1; 2; -2\}$

$\overline{AD} = \{2; -1; 0\}$

$$\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AD} = \begin{vmatrix} 3 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 2\ 8 + 1/$$

$$V_{пир} = \frac{1}{6}\cdot 11 = \frac{11}{6}$$

2) $V_{пир} = \frac{1}{3} S_{осн}\cdot DE$ $DE = \frac{V_{пир}}{S_{ос}}$

$\overline{AB} \cdot \overline{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -3 & -1 \\ -1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 8i + 5j + 9k = \{8, 5, 9\}$

$S_{осн} = \frac{1}{2}\sqrt{64+25+81} = \frac{1}{2}\sqrt{170} = \frac{\sqrt{170}}{2}$

$DE = \frac{11}{\cancel{2}} \cdot \frac{2 \cdot 2}{\sqrt{170}} = \frac{11}{\sqrt{170}}$

6. Условие компланарности 3-х векторов

Теорема!: Три вектора $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ - компланарны $\Leftrightarrow \bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} = 0$

Задача:

Проверить лежат ли 4 точки в одной плоскости

$M_1(-1;2;1)$, $M_2(0;1;-3)$, $M_3(4;-2;1)$

$M_4(2;0;0)$

Решение:

Четыре точки лежат в одной плоскости $\Leftrightarrow$ M_4M_1, M_4M_2, M_4M_3 - компланарны

$M_4M_1\{-3;2;1\}$ $M_4M_3\{2;-2;1\}$

$M_4M_2\{-2;1;-3\}$

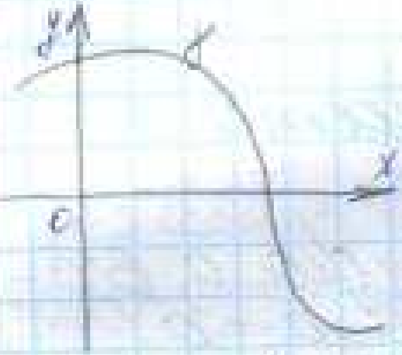
$\overline{M_4M_1} \cdot \overline{M_4M_2} \cdot \overline{M_4M_3} = \begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} =$

$= -3 \cdot (-5) - 2 \cdot 4 + 1 \cdot 2 = 15 - 8 + 2 = 9 \neq 0$

Ответ: 4 точки не лежат в одной пл-ти

Аналитическая геометрия (на плоскости)

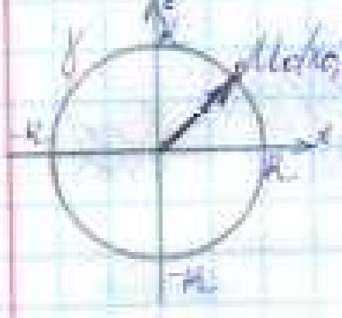
1. Понятие уравнения крив плоскости



Опр: Уравнение Φ
наз-ся уравнени
ся γ если $M_0(x_0$
$\Phi(x_0;y_0)=0$

Пример.

γ - окружность с центром в т
радиуса R



$M_0(x_0;y_0)\in\gamma \Leftrightarrow |M_0O| =$
$\Leftrightarrow |\overline{OM_0}| = R$

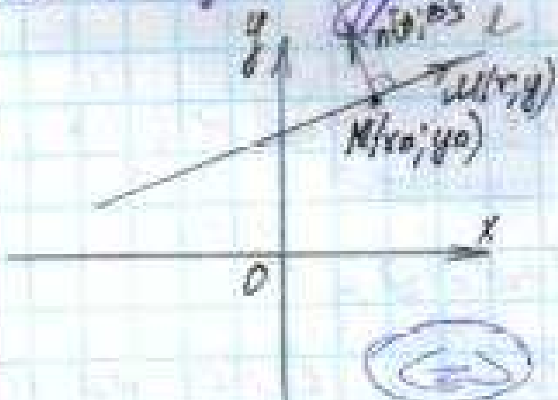
$\overline{OM_0}\{x_0;y_0\} \Leftrightarrow \sqrt{x_0^2+y_0^2} = R \Leftrightarrow$

Ур-е окружности x^2+y

Замечание:

Уравнение окружности с цен
в точке $M_0(a;b)$ и радиусе R
вид $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$

2. Общее уравнение прямой н



$M(x;y)\in l \Leftrightarrow M_0$

$\overline{M_0M}\cdot\bar n = 0 \Leftrightarrow$

$\overline{M_0M} = \{x-x_0;y-y_0$

$\Leftrightarrow A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$

$\Leftrightarrow Ax+By\underbrace{-Ax_0-By_0}_{c}=0$

$Ax+By+C=0$

Опр: Ур-е $Ax+By+C=0$ называют общим уравнением прямой на плоскости

Замечание:

1) Уравнение прямой проходящей через точку $M_0(x_0;y_0) \perp \bar{n}=\{A;B\}$ имеет вид

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$$

2) Любое уравнение вида $Ax+By+C=0$ где $A^2+B^2\neq0$, является уравнением некоторой прямой, перпендикулярной к вектору $\bar{n}=\{A;B\}$ ($\perp$ вектор к прямой наз-ся нормальным для прямой)

3) Общее ур-е наз-ся универсальным в том смысле что любая прямая м/б задана общим уравнением

3. Каноническое уравнение прямой

Вектор $\bar{a} \parallel \ell$ - называется направляющим вектором для прямой

$\overline{M_0M}=\{x-x_0;y-y_0\}$

т. $M(x,y)\in \ell \Leftrightarrow \overline{M_0M}\parallel\bar{a}\Leftrightarrow \frac{x-x_0}{\alpha}=\frac{y-y_0}{\beta}\Leftrightarrow$

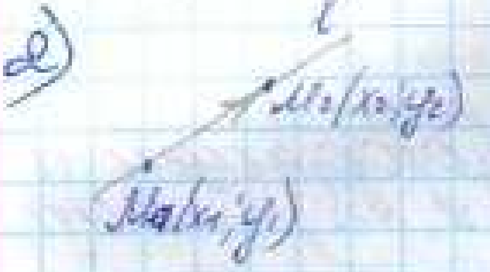
Опр: Соотношение пропорциональности

$\frac{x-x_0}{\alpha} = \frac{y-y_0}{\beta}$ наз-ся каноническ
уравнением прям

Замечание:

1) Отношение пропорциональ
$\frac{x-x_0}{\alpha} = \frac{y-y_0}{\beta}$ истинно $\Leftrightarrow \beta(x-x_0) =$

2)



$\bar{a} = \overline{M_1M_2} = \{x_2-x_1; y$

$M_0 = M_1$

$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$ - ур-е пр
проходящ
через M

Задача:

$M_0(1;-2)$ $2x-3y+4=0$ $(M_0 \notin l)$

Найти ур-е прямой проходя
рез M_0

а) $\parallel l$ б) $\perp l$

а) $\left.\begin{matrix} m \parallel l \\ \bar{n} \perp l \end{matrix}\right| \Rightarrow \bar{n} \perp m$

Замечание 1 $\Rightarrow$ ур. m имеет ви

$2(x-1) - 3(y+2) = 0$ $2x-3y-8=0$

б) $\left.\begin{matrix} l \perp m \\ \bar{n} \perp l \end{matrix}\right| m \parallel \bar{n}$

Выписываем каноническ

$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{0-3}$ $-3x+3 = 2y+4$ $-3x-2y-1=0$ $3x+2y+1=0$

4. Параметрическое уравнение прямой

$$M \in \ell \Leftrightarrow \overline{M_0M} \parallel \bar{a} \Leftrightarrow$$

$M_0(x_0,y_0)$ $M(x,y)$ $\bar{a}$

$$\exists t \in \mathbb{R} : \overline{M_0M} = t\bar{a} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 + t\alpha \\ y = y_0 + t\beta \end{cases}$$

Опр: Полученная система наз-ся параметрическими уравнениями прямой

Замечания:

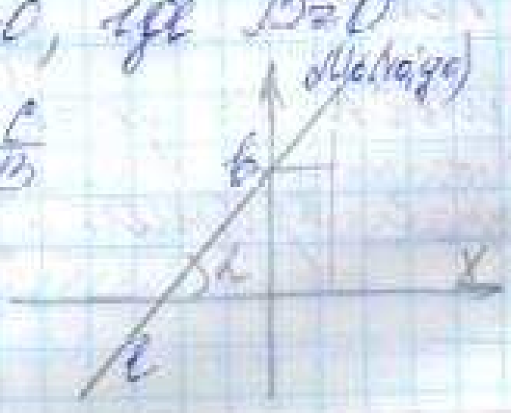
1) Параметр t является коэффициентом растяжения $\bar{a}$ до вектора $\overline{M_0M}$

2) Параметрическое уравнение как и каноническое ур-е может быть записано для любой прямой на плоскости.

5. Уравнение прямой с угловым коэффициентом.

Пусть ℓ: $Ax+By+C=0$, где $B \neq 0$

$By = -Ax - C$ $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$



$y = kx + b$, где $k = -\frac{A}{B}$

$b = -\frac{C}{B}$

Выясним геометрический смы
k и b

1. b - указывает на точку пере
с осью Оу

2. k - равен tg угла наклона

Угол наклона прямой на-
на который нужно повернуть про-
тив часовой стрелки до совме
прямой

$k = \operatorname{tg}\alpha$, т.к. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{y_0 - b}{x_0}$

$(x_0; y_0) \in l \Rightarrow y_0 = kx_0 + b$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{kx_0 + b - b}{x_0} = \frac{kx_0}{x_0} = k$

Опр: ур-е $y = kx + b$ называется
нием прямой с угловым ко
том

Замечание:

1) Уравнение прямой проходящей
$M(x_0; y_0)$ с коэффициентом k (угловым
имеет вид
$$y = k(x - x_0) + y_0$$

Док-во.

$M_0 \in k \Rightarrow y_0 = kx_0 + b \Rightarrow b = y_0 - k$

Ур-е прямой $y = kx + y_0 + kx_0$
$y = k(x - x_0) + y_0$

2) Две прямые l: $l_1: y = k_1x + b_1$

$l_2: y = k_2x + b_2$

$l_2 \parallel l_1 \Leftrightarrow k_1 = k_2$

3) Прямые $\parallel$ оси Oy не могут быть заданы уравнением с угловым коэффициентом

6. Уравнение прямой в отрезках

l: $Ax + By + C = 0$, где $A \neq 0$ $B \neq 0$ $C \neq 0$

$Ax + By = -C$ $\quad -\frac{A}{C}x - \frac{B}{C}y = 1$

$-\frac{x}{C/A} - \frac{y}{C/B} = 1$ $\quad a = -\frac{C}{A}$

$b = -\frac{C}{B}$

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

Опр: полученное уравнение называется уравнением прямой в отрезках

Геометрический смысл a и b

a и b - указывают на точки пересечения прямой с осями соответственно a с Ox и b с Oy

Правило

Для нахождения точки пересечения 2-х линий нужно решить систему уравнений этих линий

$Ox: y = 0$ $\quad l: \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

$$\begin{cases} y=0 \\ \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \end{cases} \quad \begin{cases} y=0 \\ x=a \end{cases} \quad \frac{x}{a}=1 \quad \begin{matrix} x=a \\ y=0 \end{matrix}$$

$\Rightarrow$ $M_1(a, 0)$ - т. пересечения l с Ox
$M_2(0, b)$ - т. l с Oy

Задача:

Составить ур-е прямой пере
Ox и Oy в точках $x=-1$ $y=-2$

Решение: $\frac{x}{-1}+\frac{y}{-2}=1$ $2x-y=$

$2x+2=y$ $2x-y+2=0$

$y=2x+2$

Лекция

1 Расстояние от точки до п

$l: Ax+By+C=0 \Rightarrow$

Формула d:

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

Вывод: $d=|пр_{\vec{n}}\overline{M_0M}|=\left|\frac{\vec{n}\,\overline{M_0M}}{|\vec{n}|}\right|=\frac{A}{}$

$$=\frac{|Ax+By-Ax_0-By_0|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{|-Ax_0-By_0-C|}{\sqrt{A^2+B^2}}=$$

Задача

Найти BD-высоту

Решение

Найдём уравнение прямой AC

$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$ $\frac{x+2}{2+2} = \frac{y-3}{-1-3}$ $\frac{x+2}{4} = \frac{y-3}{-4}$

$-(x+2) = y-3$ $y-3+x+2=0$

$y+x=1$. AC $y+x-1=0$

$BD = \frac{|1+2-1|}{\sqrt{1+1}} = \frac{2}{\sqrt{2}}$

2. Нормальное уравнение прямой

$l: Ax+By+C=0$ $/\sqrt{A^2+B^2}$

$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}x + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}y + \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}} = 0$

$mx + ny + p = 0$

Спр: $|p| = \left|\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right| = \frac{|C|}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{|A\cdot 0+B\cdot 0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

$|p|$ - расстояние от начала координат до указанной линии

$\bar{n}_0 = \{m; n\}$ - единичный нормальный вектор

т.е. $m^2+n^2 = \left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)^2 + \left(\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)^2 = \frac{A^2}{A^2+B^2} +$

$\frac{B^2}{A^2+B^2} = 1 \Rightarrow m = \cos\alpha$

$n = \cos\beta$ – направляющие косинусы вектора и прямо

3. Взаимное расположение прямых на плоскости

$l_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $y = k_1x + b_1$

$l_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0$, $y = k_2x + b_2$

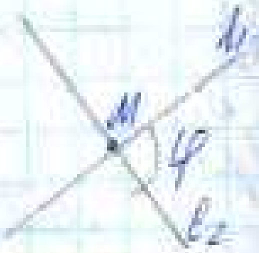
а) $l_1 = l_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$ или

$$\begin{cases} k_1 = k_2 \\ b_1 = b_2 \end{cases}$$

б) $l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$ или

$$\begin{cases} k_1 = k_2 \\ b_1 \neq b_2 \end{cases}$$

в) $l_1 \cap l_2 = M$



$\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$ либо $k_1 \neq k_2$

Случай 1:

$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 = 0$ или

$\Leftrightarrow k_1 \cdot k_2 = -1$

Случай 2: φ – острый угол

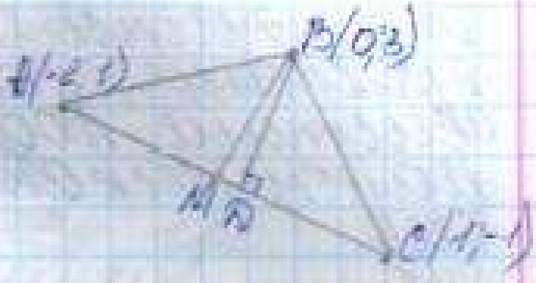
$$\cos\varphi = \frac{|\bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2|}{|\bar{n}_1| \cdot |\bar{n}_2|} = \frac{|A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

$tg\,\varphi = \left|\frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 \cdot k_2}\right|$

Задача

Найти $\begin{cases} BM - \text{мед} \\ BD - \text{высоту} \end{cases}$

$tg\,\varphi - ?$



Решение:

$AC = \{3;-2\}$

1) M - середина AC $\Rightarrow M(-0,5;\, 0)$

2) Ур BM = $\frac{x+0,5}{0+0,5} = \frac{y-0}{3-0}$

$2x+1 = y/3 \qquad y = 6x+3$

3) Ур BD: $AC = \{3;-2\} \perp BD$

$A(x-x_0) + B(y-y_0) = 0$

$B(0;3) \qquad 3(x-0) - 2(y-3) = 0$

$3x - 2y + 6 = 0$

$2y = 3x+6 \qquad y = \frac{3}{2}x + 3 \quad k_1 = 6 \quad k_2 = \frac{3}{2}$

$tg\,\varphi = \left|\frac{6 - \frac{3}{2}}{1 + 6\cdot\frac{3}{2}}\right| = \frac{\frac{9}{2}}{10} = \frac{9}{20}$

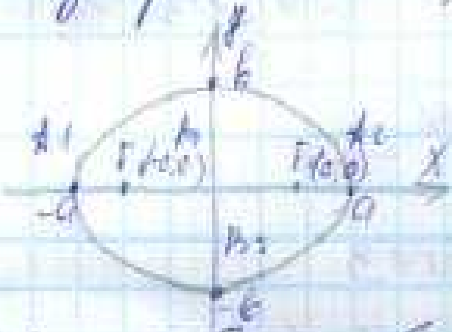
Кривые 2-го порядка

1. Эллипс:

Опр: эллипсом называется кривая уравнение которой в некоторой системе координат называемой канонической имеет следующий вид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>b)$$

а) Изображение, основные понятия



A_1A_2 либо $2a$ наз-ся большой осью

B_1B_2 либо $2b$ малая ось

OA_2 либо a - большая полуось

OB_2 либо b - малая полуось

A_1, A_2, B_1, B_2 - вершина эллипса

$F_1(-c;0)$ $F_2(c;0)$, где $c=\sqrt{a^2-b^2}$ - это фокусы

б) Свойства

1) Сумма расстояний от любой точки эллипса до фокуса равна $2a$

2) Опр: эксцентриситетом эллипса на-ся величина

$\varepsilon=\frac{c}{a}$ $\quad 0<\varepsilon<1$

Пусть $\varepsilon \to 0 \Rightarrow \varepsilon \to c \Rightarrow \varepsilon \to 0$

Пусть $\varepsilon \to 1 \Rightarrow b \to 0 \Rightarrow$ эллипс преобразуется в отрезок

3) Опр: расстояние от точки эллипса до фокусов наз-се фокальными радиусами и равна

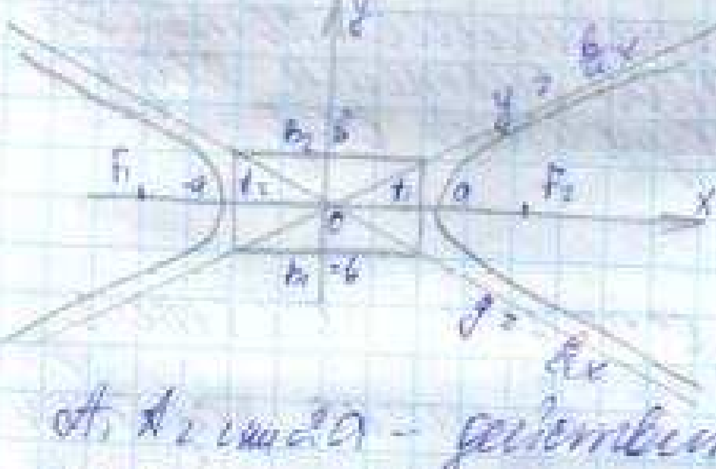
$r_{лев} = a + \varepsilon x$ $r_{прав} = a - \varepsilon x$, где x - абсцисса точки эллипса

2. Гипербола

Опр: Гиперболой наз-ся кривая ур-е которой в некоторой системе координат называемой канонической имеет следующий вид

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

а) Изображение, основные понятия



$A_1 A_2$ - действит. вершины

$B_1 B_2$ - мнимые вершины

$A_1 A_2$ или $2a$ - действительная ось

$B_1 B_2$ или $2b$ - мнимая ось

OA_1 или a - действит. полуось

OB_2 или b - мнимая полуось

$F_1(-c,0)$ $F_2(c,0)$ где $c=\sqrt{a^2+b^2}$

б) Свойства:

1) модуль разности расстояний от любой точки гиперболы до фокусов всегда равен $2a$

2) Опр: $\varepsilon = \frac{c}{a}$ $\varepsilon > 1$
$\varepsilon \to 1 \Rightarrow b \to 0$

$\varepsilon \to 1 \Rightarrow b \to \infty$

Гипербола превращается в две вертикальные II прямые

3) Расстояния от т. гиперболы до фокусов наз-ся фокальными радиусами и равны

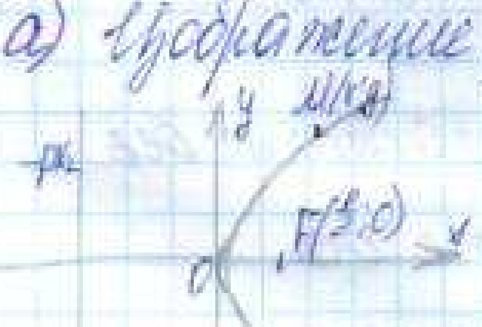
$r_{бл} = \varepsilon|x| - a$ $r_{д} = \varepsilon|x| + a$

3. Парабола:

Опр: парабола - уравнение которой в нем каноническая система координат имеет следующий вид

$y^2 = 2px\ (p>0)$

а) Изображение, основные понятия



O - вершина параболы

$x = -\frac{p}{2}$ - директриса параболы

$F(\frac{p}{2},0)$ - фокус

б) Свойства

1) Любая точка параболы равноудалена от директрисы и фокуса

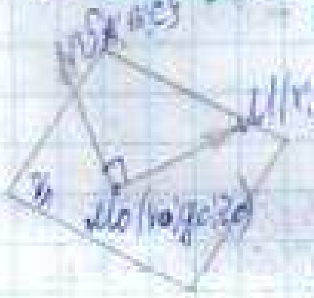
2) Расстояние от точки параболы до фокуса наз-ся фокальным радиусом, который равен

$r = x + \frac{p}{2}$, где x - абсцисса точки M

Аналитическая геометрия в пространстве

1.11.12

1. Общее уравнение плоскости



$M \in \pi \Leftrightarrow \overline{M_0M} \perp \bar{n} \Leftrightarrow$

$\overline{M_0M} \cdot \bar{n} = 0$

$\overline{M_0M} = \{x-x_0; y-y_0; z-z_0\} \Leftrightarrow Ax+By+Cz+$
$+D=0$, где $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$

Опр: уравнение $Ax+By+Cz+D=0$ наз-ся общим уравнением плоскости.

Замечание:

1) Любое уравнение вида $Ax+By+Cz+D=0$ является уравнением некоторой плоскости $\perp \bar{n}\{A;B;C\}$

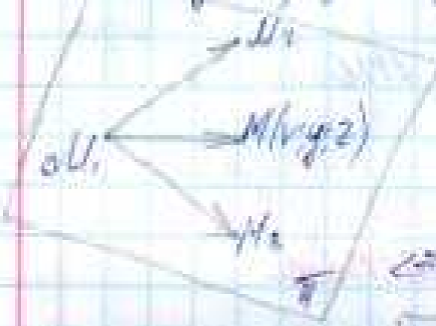
2) Уравнение плоскости проходящей через точку $M_0(x_0;y_0;z_0) \perp \bar{n}\{A;B;C\}$ имеет вид

$$\boxed{A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0}$$

3) Для любой плоскости в пространстве существует общее уравнение

2. Уравнение плоскости проходящей через три точки, не лежащие на одной прямой.

$M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$, $M_3(x_3;y_3;z_3)$



$M \in \Pi \Leftrightarrow \overline{M_1M_2}, \overline{M_1M_3}, \overline{M_1M}$ - компланарны

$\Leftrightarrow \overline{M_1M} \cdot \overline{M_1M_2} \cdot \overline{M_1M_3} = 0 \Leftrightarrow$

$$\boxed{\begin{vmatrix} x-x_1, & y-y_1, & z-z_1 \\ x_2-x_1, & y-y_2, & z-z_2 \\ x_3-x_1, & y-y_3, & z-z_3 \end{vmatrix} = 0}$$

Опр: Полученное уравнение называется уравнением проходящим через три точки

Задача

Найти уравнение плоскости, проходящей через три точки

$M_1(-1;0;2)$ $M_2(0;-3;-1)$ $M_3(2;1;0)$

Решение:

$$\begin{vmatrix} x+1 & y-0 & z-2 \\ 1 & -3 & -3 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \qquad (x+1)9 - y\cdot 7 + (z-2)\cdot 10 = 0$$

$$9x - 7y - 10z - 11 = 0$$

3. Уравнение плоскости в отрезках.

Пусть П: $Ax+By+Cz+D=0$, где $A\neq 0, B\neq 0$, $C\neq 0, D\neq 0$

$$Ax+By+Cz=-D$$

$$\frac{Ax}{-D}+\frac{By}{-D}+\frac{Cz}{-D}=1 \qquad \frac{x}{-D/A}+\frac{y}{-D/B}+\frac{z}{-D/C}=1$$

$\boxed{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1}$ - уравнение плоскости в отрезках

Комментарий:

Геометрический смысл a, b, c

1) $x=a$ $y=b$ $z=c$ – это точки пересечения плоскости с осями Ox; Oy; Oz

2) Не всякие плоскости могут быть записаны уравнением в отрезках

4. Построение плоскостей в системе координат Ox; Oy; Oz.

Пример 1. построить фрагмент плоскости $2x-y-4z=4$

Решение:

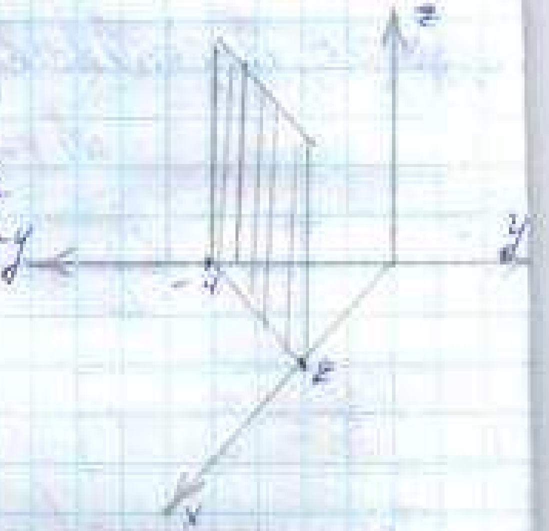
$$\frac{x}{2}+\frac{y}{-4}+\frac{z}{-1}=1$$

Пример 2.
(плоскости цилиндрического типа)

Опр: Уравнение поверхности в которой отсутствует одна из неизвестных величин (x, y, z) называется поверхности цилиндрического типа

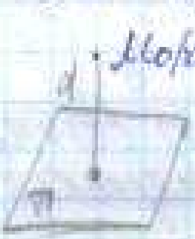
$2x - y = 4$ $\qquad \frac{x}{2} + \frac{y}{-4} = 1$

Построенные линии называются направляющими



5. Полезные формулы для плоскости.

1) Расстояние до плоскости П: Ax+By+Cz+D=0 от точки Mo(xo;yo;zo)



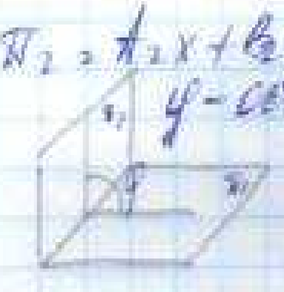
$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

2) Угол между плоскостями

$\pi_1 = Ax + By + C_1z + D_1 = 0$

$\pi_2 = A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$

φ - острый



$$\cos\varphi = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1 \cdot C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

6. Общее уравнение прямой

$\pi_1 = A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$

$\pi_2 = A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$

$$X \in l \Leftrightarrow \begin{cases} X \in \pi_1 \\ X \in \pi_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

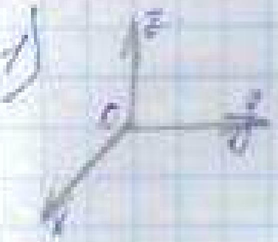
наз-ся общими уравнениями прямой

Комментарий

1) Общие ур прямой могут быть записаны неоднозначно

2) Любая прямая может быть записана общими уравнениями

Примеры:

1) 

Прямая Ox $\begin{cases} z=0 - Oxy \\ y=0 - Oxz \end{cases}$

2) l $\begin{cases} x-2y+4z-1=0 \\ x+3z=0 \end{cases}$

Найти направляющий вектор прямой

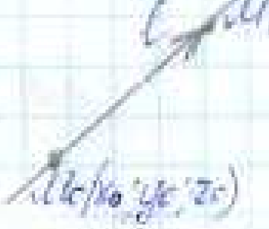
Решение: Найдём 2 точки на пр-ой

1) $x=0$ $z=0$ $\Rightarrow -2y-1=0$ $y=-\frac{1}{2}$ $M_1(0;-\frac{1}{2};0)$

2) $y=0$ $\begin{cases} x+4z-1=0 \\ x+3z=0 \end{cases}$ $\begin{cases} z-1=0 \Rightarrow z=1 \\ x=-3 \end{cases}$ $M_2(-3;0;1)$

$\bar{a} = \overline{M_1M_2} = \{-3; \frac{1}{2}; 1\}$ $\bar{a}_1 = \{-6; 1; 2\}$

7. Каноническое уравнение прямой в пространстве



$\bar{a} = (\alpha; \beta; \gamma)$

$M \in l \Leftrightarrow \overline{M_0M} \parallel \bar{a} \Leftrightarrow \boxed{\frac{x-x_0}{\alpha} = \frac{y-y_0}{\beta} = \frac{z-z_0}{\gamma}}$

Опр: Последнее отношение пропорцио
нальности называется канониче
ским для прямой в пространств

Из каноническое ур-е можно полу
чить параметрическое если прира
внять уравнение плоскости к ⓣ

$\frac{x-x_0}{\alpha} = \frac{y-y_0}{\beta} = \frac{z-z_0}{\gamma} = t$

$\begin{cases} \frac{x-x_0}{\alpha} = t \\ \frac{y-y_0}{\beta} = t \\ \frac{z-z_0}{\gamma} = t \end{cases}$ $\begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \\ z = z_0 + \gamma t \end{cases}$

8. Взаимное расположение прямой и плоскости

Пример $\begin{cases} x = -2+3t \\ y = t \\ z = 4t \end{cases}$ $\pi = 2x - y + z - 4 = 0$

- вычислить взаимное расположение пр
ямой и плоскости:

Решение:

$2(-2+3t) - t + 4 - t - 4 = 0$

$-4 + 6t - 2t = 0$ $4t = 4$ $t = 1$

Возможные ситуации:

а) Уравнение не имеет решений в этом случае прямая || плоскости

б) Ур-е имеет бесконечное множество решений (0=0) - в этом случае прямая полностью лежит в плоскости

в) Ур-е имеет единственное решение (в нашем случае t=1) - в этом случае существует единственная точка пересечения

$M_0 \begin{cases} x = -2+3\cdot 1 = 1 \\ y = 1 \\ z = 4-1 = 3 \end{cases}$ $M_0(1;1;3)$ - ее точка пересечения

Полезная формула

$$\frac{x-x_0}{\alpha} = \frac{y-y_0}{\beta} = \frac{z-z_0}{\gamma} = 0$$

π: $Ax+By+Cz+D=0$

$$\sin\varphi = \frac{|A\alpha+B\beta+C\gamma|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}}$$

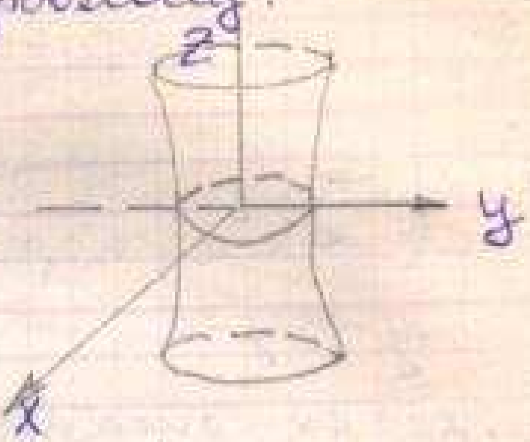
12. Поверхности 2го порядка

а) шар: $(x-a)^2+(y-a)^2+(z-a)^2 = R^2$

б) эллипсоид: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} = 1$

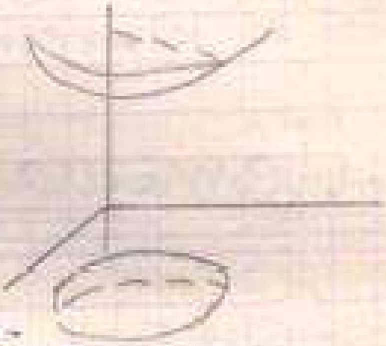
в). однополосной гиперболоид.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$



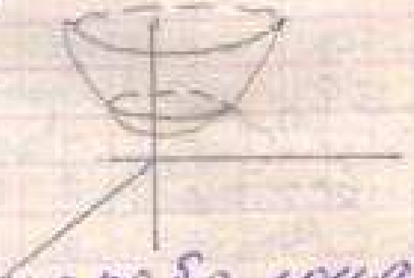
г). двуполосный гиперболоид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$



д). эллиптический параболоид

$$z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$$



ж). гиперболический параболоид

$$z=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$$

е). Конус.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

Обычно при решении задач у-ние поверхности имеют измененный вид, например:

$$z=4-x^2-y^2$$

$$x^2+y^2=-(z-4)$$

с переменными ур-ниями возможны преобразования.

1). $x \to -x$ осевая симметрия от
тельно пр-ма Oy?

2). $y \to -y$ . . . . Ox?
$x \to x-a$ параллельный перенос
оси Ox

$y \to y-a$ — " —

3). $x \to kx$ - сжатие, если $k > 1$, вдо
к раст., если $k < 1$ оси

[illegible] анал