Математический анализ.

1. Понятие числовой функции и способы её задания:

Опр: числовой функцией с областью определения $D \subset R$ наз-ся правило, которому каждому значению $x \in D$ ставится в соответствии единственное значение $y \in R$. при этом x-аргумент y-значение функции

$y=f(x)$ $f: D \to R$

Способы задания функции:

1) Аналитический способ (в виде формулы)

В этом случае функция записывается опред. формулой (D отличается мас естественным образом либо некоторыми ограничениями, исходя из формулы

Пример:

а) $y=x^2$ D-всеми естественными образом и оно совпадает с ОДЗ$(x^2) \Rightarrow$
$\Rightarrow D(-\infty;+\infty)$

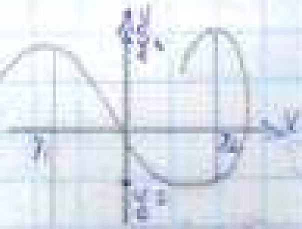
б) $y=x^2$ $D(0;+\infty)$

в) $y=\frac{1}{\sqrt{x-1}}$ ОДЗ, $x-1>0$ $x>1$
$D(1;+\infty)$

2) Графический способ:

Опр: Графиком функции $f(x)$ называется кривая на плоскости Oxy уравнение который имеет вид $y=f(x)$

а) $y=x^2$ 

б) 

Кривая не является графиком некоторой функции т.к. значению x_1 соответствует два значения y_1, y_2 и y_3 тем самым это противоречит определению функции!

Замечание: График некоторой функции пересекает любую вертикальную прямую в точке.

3) Табличный способ

x	x_1	x_2	x_3
y	y_1	y_2	y_3

– в научно-экспериментальных измерениях

Исследование зависимости температуры воздуха с изменением от температуры на улице

4) Неявный способ задания функции:

Состоит в том, что значение функции вычисляется в результате решения уравнения такого

$F(x,y)=0$ Пример: $e^y=xy$ $D(-\infty;0)$

2. Свойства функций

а) Четность, нечетность

Опр: $y=f(x)$ – наз-ся четной, если для любого x из области определения D $-x\in D$ и $f(-x)=f(x)$

$y=f(x)$ $\forall x \in D$ $-x \in D$ и $f(-x)=f(x)$

Замечание: график чётной функции симметричен оси Oy

Примеры:

1) $y=x^2$ $y(-x)=(-x)^2=x^2=y(x)$

2) $y=\cos x+2$ $y(-x)=\cos(-x)+2=\cos x+2=y(x)$

Опр: $y=f(x)$ наз-ся нечётной если $\forall x \in D$ $-x \in D$ и $f(-x)=-f(x)$

Замечание: график нечётной функции симметричен относительно начала координат.

Примеры:

1) $y=x-3x^3$

$y(-x)=-x-3(-x)^3=-x+3x^3=-(x-3x^3)=-y(x)$

2) $y=\sin x+\sin 3x$

$y(-x)=\sin(-x)+\sin(-3x)=-\sin x-\sin 3x=-(\sin x+\sin 3x)=-y(x)$

б) Монотонность функции

Опр. $y=f(x)$ наз-ся возрастающей(убывающей) функцией на интервале $(a;b)$ если:

$\forall x_1, x_2 \in (a;b)$, $x_1 < x_2$ выполняется неравенство

$f(x_1) < f(x_2)$ - возр

$f(x_1) > f(x_2)$ - убыв.

Если функция или возр. или убыв-ая на некотором интервале, то такая функция называется монотонной на этом интервале.

в) Периодичность функции

Опр: $y=f(x)$ наз-ся периодической с периодом $T>0$ если для любого $\forall x \in D$

$x+T \in D$ и $y(x+T)=y(x)$

Пример:

1) $y=\cos x+3\sin x$ $\quad T=2\pi$

$y(x+2\pi)=\cos(x+2\pi)+3\sin(x+2\pi)=\cos x+3\sin x$

г) Множество значений функции

Опр: множество всех значений функции называется множеством значений функции и обозначается через E

Множество значений E находят по графику функции

E – это проекция графика на ось Oy

Пример: $y=e^x$ $\quad E(0,+\infty)$

3. Действия с элементарными функциями.

Элементарные функции можно складывать, умножать, делить, вычитать, но дополнительно к этим элементарным действиям добавляется суперпозиция

$y=f(x)$ $\quad x=\varphi(t)$ $\quad y=f(\varphi(t))$ – композиция 2-х элем. функц.

15.11.12. 1. Предел последовательности.

Числовой последовательностью называется бесконечный набор чисел, таких что каждому числу приписывается свой порядковый номер.

Обозн: $a_1, a_2, a_3 \ldots$

Пример: 1) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$

2) $\{a_n = \frac{1}{n}\}$ $a_5 = \frac{1}{5}$

Некоторые последовательности имеют точки сгущения, эта точка сгущения называется пределом последовательности

$\lim_{n\to\infty} a_n = A$

Пр: $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

Замечание: в качестве предела последовательности могут выступать $+\infty$; $-\infty$, ∞

1) $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$

$\lim_{n\to\infty} n = +\infty$

2) $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$

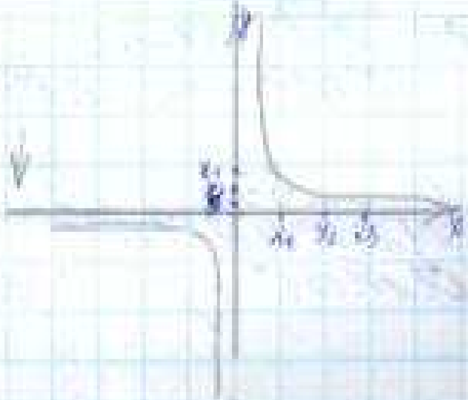
$\lim_{n\to\infty} -n = -\infty$

3) $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ (это значит либо $+\infty$, либо $-\infty$; либо

$\lim_{n\to\infty} (-1)^n n = \infty$

2. Предел функции в точке

$y = \frac{1}{x}$ - гипербола $\lim_{x\to\infty} y(x) = 0$



Опр: число A называется пределом функции $y=f(x)$ в точке $x=a$ если для любой последовательности $\{x_n\}$ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ существует

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$$

Обознач: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$

Пример:

1) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{1}{x} = 1$

2) $\lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$

3. Предел непрерывной функции

Опр: Ф-ия $y=f(x)$ наз-ся непрерывна в точке $x=x_0$ если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

Утверждение: любая элементарная функция непрерывна в любой точке из области своего определения

Следствие: если $x_0 \in D$, то $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

Пример: $\lim\limits_{x\to 1} \frac{2x^2-x+1}{4x^2+2} = \frac{1}{3}$

4. Типы неопределенностей при вычислении пределов

$\lim\limits_{x\to 1} \frac{x-1}{x^2-1}$ $\quad R\{x \neq \pm 1\}$ $x=1 \notin D$ $\quad \lim\limits_{x\to 1}(x-1)=0$

$\lim\limits_{x\to 1}(x^2-1)=0$

Числитель стремится к 0, потому дробь $\to 0$, но знам. тоже $\to 0$, поэтому дробь $\to\infty$

Эта ситуация неопределенности наз-ся — неопределенностью при вычислении пределов

$\lim_{x\to1}\frac{x+1}{x^2-1}=\infty$ $\quad\lim_{x\to1}x+1=2\quad\lim_{x\to1}x^2-1=0$

В этом примере неопределенность отсутствует

$\left[\frac{0}{0}\right];\ \left[\frac{\infty}{\infty}\right];\ \left[0\cdot\infty;\ \infty-\infty\right];\ \left[\frac{0}{1/\infty}\right];\ \left[\frac{0}{0}\right];\ \left[1^{\infty}\right]$

5. Метод сокращения

Утв: Если $f(x)=g(x)$ при $x\neq x_0$, то $\lim_{x\to x_0}f(x)=\lim_{x\to x_0}g(x)$

$$\lim_{x\to1}\frac{2x^2-x-1}{1-x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to1}\frac{2(x+\frac{1}{2})(x-1)}{(1-x)(1+x)}=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(2x+1)}{\underbrace{(1-x)}_{-(x-1)}(1+x)}=\lim_{x\to1}\frac{2x+1}{-1-x}=\frac{3}{-2}=-1{,}5$$

$$\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{6x-3}-\sqrt{2x+5}}{4-x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to2}\frac{(\sqrt{6x-3}-\sqrt{2x+5})(\sqrt{6x-3}+\sqrt{2x+5})}{(2-x)(2+x)(\sqrt{6x-3}+\sqrt{2x+5})}=$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{6x-3-(2x+5)}{(2-x)(2+x)(\sqrt{6x-3}+\sqrt{2x+5})}=\lim_{x\to2}\frac{4x-8}{(2-x)(2+x)(\sqrt{6x-3}+\sqrt{2x+5})}=\lim_{x\to2}\frac{-4}{(2+x)(\sqrt{2x+5}+\sqrt{6x-3})}=\frac{-4}{4\cdot6}=-\frac{1}{6}$$

6. Пределы при $x \to \infty$

а) $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+x+1}{x^2-4} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{4}{x^2}} =$

$= \lim_{x\to\infty} \frac{2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{4}{x^2}} = 2$

б) $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+x+1}{x-4} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}-\frac{4}{x^2}} = \infty$

в) $\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2-4}-2x}{3x+1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{1}{x}\sqrt{x^2-4}-2}{3+\frac{1}{x}} =$

$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-\sqrt{(1/x^2)(x^2-4)}-2}{3+1/x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-\sqrt{1-4/x^2}-2}{3+1/x} = \frac{-3}{3} = -1$

7. Использование эквивалентных функций

Опр: функция $\alpha(x)$ наз-ся бесконечно малой функцией при $x \to a$, если $\lim_{x\to a} \alpha(x) = 0$

Пример:

1) $\alpha(x) = x^2$ бмф $x \to 0$, т.к. $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$

2) $\alpha(x) = \sin x$ бмф $x \to 0$ т.к. $\lim_{x\to 0} \sin x = 0$

3) $\alpha(x) = x-1$ бмф $x \to 1$ т.к. $\lim_{x\to 1} (x-1) = 0$

Опр: две бмф $(x \to a)$ $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ наз-ся эквивалентными при $x \to a$, если $\lim_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$ $\quad \alpha(x) \sim \beta(x)$ $(x \to a)$

Таблица эквивалентности функций

$\alpha(x)$ – б.м.ф. $(x \to a)$

1) $\sin \alpha(x) \sim \alpha(x)$ $(x \to a)$

2) $tg\, \alpha(x) \sim \alpha(x)$ $(x \to a)$

3) $\arcsin \alpha(x) \sim \alpha(x)$ $(x \to a)$

4) $arctg\, \alpha(x) \sim \alpha(x)$ $(x \to a)$

5) $1 - \cos \alpha(x) \sim \frac{\alpha^2(x)}{2}$ $(x \to a)$

6) $e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)$ $(x \to a)$

7) $a^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x) \cdot \ln a$ $(x \to a)$

8) $\ln(1+\alpha(x)) \sim \alpha(x)$ $(x \to a)$

9) $\log_a(1+\alpha(x)) \sim \frac{\alpha(x)}{\ln a}$ $(x \to a)$

10) $(1+\alpha)^p - 1 \sim p\alpha$ $(x \to a)$

22.11.12. 1. Свойства пределов

Пусть $\lim_{x \to a} f(x) = A < \infty$, $\lim_{x \to a} g(x) = B <$

Тогда:

1) $\lim_{x \to a} c f(x) = c \lim_{x \to a} f(x)$

2) $\lim_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) - \lim g(x)$

3) $\lim_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x)$

4) $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$, если $B \neq 0$

5) $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)} = [\lim\limits_{x\to a} f(x)]^{\lim g(x)}$, если $A>0$

Пример:

$\lim\limits_{x\to1}(2x^2-x+1) = \lim\limits_{x\to1}2x^2 - \lim\limits_{x\to1}x + \lim\limits_{x\to1}1 =$

$= 2\lim\limits_{x\to1}x^2 - \lim\limits_{x\to1}x + \lim\limits_{x\to1}1 = 2\cdot1-1+1=2$

2. Использование эквивалентных функций при вычислении пределов

Теорема: если $\alpha\sim\alpha_1$ $(x\to a)$, $\beta\sim\beta_1$ $(x\to a)$, то

$\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha}{\beta} = \lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha_1}{\beta_1}$ (если существует этот предел)

Док-во: $\alpha\sim\alpha_1$, $(x\to a) \Rightarrow \lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha}{\alpha_1}=1 \Rightarrow$

$\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{\alpha}{\alpha_1}-1\right)=0 \Rightarrow \frac{\alpha}{\alpha_1}-1=\varphi(x)$ – б.м.ф. $(x\to a)$

$\Rightarrow \alpha=\alpha_1(1+\varphi(x))$

Аналогично, $\beta=\beta_1(1+\psi(x))$

$\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\lim\alpha_1(1+\varphi(x))}{\lim\beta_1(1+\psi(x))} = \lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha_1}{\beta_1}\cdot \overbrace{\lim\limits_{x\to a}\frac{1+\varphi(x)}{1+\psi(x)}}^{=1} =$

$= \lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha_1}{\beta_1}$

Пример:

1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt[5]{1+2x}-1}{\arcsin 3x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{5}\cdot2x}{3x}=\frac{2}{15}$

а) $\sqrt[5]{1+2x}-1 = (1+2x)^{\frac{1}{5}}-1 \sim \frac{1}{5}\cdot 2x$

$p = \frac{1}{5}$ $\alpha(x) = 2x$ – бмф $x \to 0$

δ) $\arcsin 3x \sim 3x$ $\alpha(x) = 3x$

г) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(e^{x^2}-1)}{1-\cos 3x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1}{\frac{9x^2}{2}} =$

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2}{\frac{9x^2}{2}} = \frac{2}{9}$

3. Теор. о произведении бмф на ограниченную

Опр: Функция $U(x)$ называется ограниченной при $x \to a$, если $|U(x)| \le M$ в некоторой выколотой окрестности точки $x = a$

$(c;d)$ - окрестность a

$(c,d) \setminus \{x=a\}$ - выколотая окрестность

Примеры:

1) $\cos 1/x$ - огран $(x \to 0)$, т.к. $|\cos 1/x| \le 1$ при $x \ne 0$

2) $\operatorname{arctg} x$ - огран. $(x \to +\infty)$, т.к. $|\operatorname{arctg} x| < \frac{\pi}{2}$

3) Утв. $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x)$, $f(x)$ - огран $(x \to a)$

Теорема: (без доказательства)

Если $\alpha(x)$ - бмф $(x \to a)$

$u(x)$ - огр $(x \to a)$, то $\lim\limits_{x\to a} [\alpha(x)\, u(x)] = 0$

Пример: 1) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\cos x}{x^2}$, $\lim\limits_{x\to\infty} (\frac{1}{x^2} \cdot \cos x)$

$\frac{1}{x}$ - б.м.ф. $(x\to\infty)$

$\cos x$ - огр. $(x\to\infty)$, т.к. $|\cos x| \le 1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\cos x}{x} = 0$

2) $\lim\limits_{x\to 0} e^{x_1} \cdot e^{x}$ $\quad e^{x_1}$ - б.м.ф. $(x\to 0)$

e^{x} - огран. $(x\to 0)$, т.к. $\lim\limits_{x\to 0} e^{x} = e^{0} = 1 < \infty$

4. Свойства эквивалентных функций

Пусть $\alpha(x) \sim \alpha_1(x)$ $(x\to a)$

$\beta(x) \sim \beta_1(x)$ $(x\to a)$

$u(x)$ - огран. $(x\to a)$

1) $\alpha(x) \cdot u(x) \sim \alpha_1(x) \cdot u(x)$ $x\to a$

$c\alpha(x) \sim c\alpha_1(x)$ $x\to a$

Пример

$$\lim_{x\to 0} \frac{x \cdot \sin 5x}{1-\cos 2x} = \lim_{x\to 0} \frac{5x^2}{2x^2} = \frac{5}{2} = 2{,}5$$

$1-\cos 2x \sim \frac{(2x)^2}{2} = 2x^2$

$x \cdot \sin x \sim x \cdot 5x = 5x^2$

$u(x) = x$ - огран. $(x\to 0)$

$\alpha(x) = \sin 5x$ - б.м.ф. $(x\to 0)$

$\sin 5x \sim 5x$

2) $\alpha(x)\beta(x) \sim \alpha_1(x)\beta_1(x)$ $(x\to a)$

Пример: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 2x \cdot \operatorname{arctg} 3x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{6x^2}{x^2} = 6$

$\sin 2x \cdot \operatorname{arctg} 3x \sim 2x \cdot 3x = 6x^2$

3) $\alpha(x) - \beta(x) \sim \alpha_1(x) - \beta_1(x)$ $(x \to a)$, если существует $\lim\limits_{x \to a} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} \neq 1$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - \cos 2x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1 + 1 - \cos 2x}{x^2} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos 2x - (1 - \cos x)}{x^2} =$$

$$(1-\cos 2x)^{=\alpha(x)} - (1 - \cos x)^{=\beta(x)}$$

$$1 - \cos 2x \sim \frac{(2x)^2}{2} = 2x^2 \ (x \to 0)$$

$$1 - \cos x = \frac{x^2}{2} \quad (x \to 0)$$

$\Rightarrow 1 - \cos 2x \not\sim 1 - \cos x$ — условие выполнено

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos 2x}{1 - \cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{2x^2}{x^2} = 2$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2x^2 - \frac{x^2}{2}}{x^2} = \frac{\frac{3}{2}x^2}{x^2} = 1{,}5$$

5. Предел степени

Теорема: $\lim\limits_{x \to a} u^v = [1^\infty] = e^{\lim\limits_{x \to a}(u-1)v}$

Док-во:

$$\lim_{x \to a} u^v = \lim_{x \to a} e^{\ln u^v} = e^{\lim\limits_{x \to a} \frac{\ln u}{1/v}\left[\frac{0}{0}\right]} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x \to a} \frac{\ln(1+u-1)}{1/v}} = e^{\lim\limits_{x \to a} \frac{\alpha}{1/v}} = e^{\lim\limits_{x \to a}(u-1)v}$$

$\ln(1 + u - 1) \sim u - 1 \qquad \alpha = u - 1$ — б.м.ф. $(x \to a)$

Пример:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{2x} = \left[1^{\infty}\right] = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-2}-1\right)\cdot 2x} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6x}{x-2}} = e^{6}$$

6. Односторонние пределы

Опр: Число A наз-ся правосторонним (левосторонним) пределом $f(x)$ в т. $x=a$ если для любой послед. $\{x_n > a\}$ ($\{x_n < a\}$): $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$

Обознач: прав $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = A$

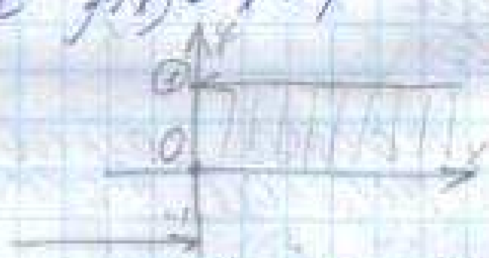
лев $\lim\limits_{x\to a-} f(x) = A$

Утв: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ существует $\Leftrightarrow$ сущ-ет

$\lim\limits_{x\to a+} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to a-} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = \lim\limits_{x\to a-} f(x)$

Пример: $x>0$ $f(x) = \frac{x}{x} = 1$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$



$\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = 1$ $\lim\limits_{x\to 0-} f(x) = -1 \Rightarrow 1 \neq -1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x)$ — не сущ-ет

Замечание:

Обычно односторонние пределы находят при помощи графиков.

Пример:

$y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$ $x=0$

$\lim\limits_{x \to 0+} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$

Если $x \to 0+ \Rightarrow \frac{1}{x} \to +\infty$

$\lim\limits_{x \to 0-} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$

7. Точки разрыва и их классификация

Опр: $x=a$ наз-ся точкой разрыва ф-и $f(x)$, если

1) $f(x)$ опред. в окрестности т.

2) $f(x)$ — не явл. непрерывн. функцией в $x=a$, т.е. не вып-ся $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

Дадим классификацию точек разрыва

1) Опр: точка разрыва $x=a$ наз-ся устранимой точкой разрыва, если

$\lim\limits_{x \to a+} f(x) = \lim\limits_{x \to a-} f(x)$

Пример: $y = e^{-\frac{1}{x^2}}$ $x=0$ — т. разрыва

$\lim\limits_{x \to 0+} e^{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x \to 0-} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$

2) Опр: т. разрыва $x=a$ называется т. разрыва I рода (скачок) если

$\lim_{x\to a+0} f(x)$, $\lim_{x\to a-0} f(x)$ сущ-ют

$\lim_{x\to a+0} f(x) \neq \lim_{x\to a-0} f(x)$

Пример:

$$y = \begin{cases} \frac{|x|}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$x=0$ т. разрыва I рода

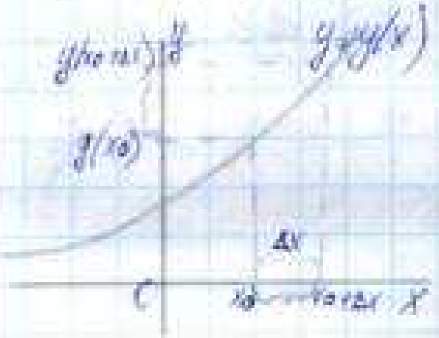
3) Опр: т. разрыва $x=a$ наз-ся т. разрыва II рода, если хоть бы один из односторонних пределов $= \infty$

Дифференциальное исчисление

1. Понятие производной функции в точке.

Опр: Производная функции $y=f(x)$ в точке $x=x_0$ называется число

$$y'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(x_0+\Delta x) - y(x_0)}{\Delta x}$$



$\Delta y = y(x_0+\Delta x) - y(x_0)$ – приращение функции

Δx – приращение аргумента

$\Delta x \to 0 \quad \Delta y \to 0$

Опр: функция называется дифференцируемой в точке x_0 если существует производная функции в этой точке

Пример: $y = 2x^2 - x + 1$

Найти производную в точке x

$y(x) = 2x^2 - x + 1$

$y(x+\Delta x) = 2(x+\Delta x)^2 - (x+\Delta x) + 1 = 2x^2 + 4x\Delta x + 2\Delta x^2$

$- x - \Delta x + 1 = 2\Delta x^2 + (4x-1)\Delta x + 2x^2 - x + 1$

$\Delta y = 2\Delta x^2 + (4x-1)\Delta x + \cancel{2x^2 - x + 1} - \cancel{(2x^2 - x + 1)} =$

$= 2\Delta x^2 + (4x-1)\Delta x$

$$y'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\Delta x^2 + \Delta x(4x-1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\Delta x + 4x - 1}{1} = 4x - 1$$

Теорема:
Если ф-я дифференцируема в точке $x=x_0$, то ф-ия непрерывна в точке

Док-во:

y – дифф-ма в т. $x=x_0 \Rightarrow y'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} \Rightarrow$

$\frac{\Delta y}{\Delta x} - y'(x_0) = \alpha(\Delta x)$ – б.м.ф. $(\Delta x\to 0)$, т.к.

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha(x) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\left[\frac{\Delta y}{\Delta x} - y'(x_0)\right] = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} - y'(x_0) =$

$= y'(x_0) - y'(x_0) = 0$

$\Delta y = y'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x \Rightarrow \lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y = \lim(y'(x_0)\Delta x +$
$+ \alpha(\Delta x)\cdot\Delta x) = 0$

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}[y(x_0+\Delta x) - y(x_0)] = 0$

$\lim\limits_{\Delta x\to 0} y(x_0+\Delta x) = y(x_0)$

$x = x_0+\Delta x$ $\lim\limits_{x\to x_0} y(x) = y(x_0)$

Замечание: обратное утверждение не верно

Пример: $y=|x|$

Эта функция непрерывна в точке $x=x_0$, но не является дифференцируемой

$\Delta y = y(0+\Delta x) - 0 = |\Delta x| = \begin{cases}\Delta x, & \Delta x>0\\ -\Delta x & \Delta x<0\end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \begin{cases} 1, & \Delta x > 0 \\ -1, & \Delta x < 0 \end{cases} \Rightarrow$ предел не существует)

2. Механический смысл производной.

$x = x(t)$ - закон прямолинейного неравномерного движения мат. точки

$[t; t+\Delta t]$

Средняя скорость за Δt вычисляется по формуле

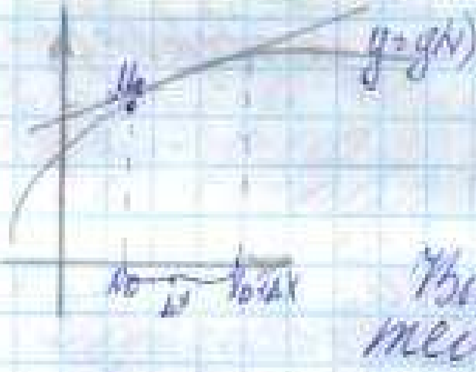
$$v_{ср} = \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

При $\Delta t \to 0$ $v_{ср} \to v(t)$

$$v(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$ - мгновенная скорость

$$v(t) = x'(t)$$

3. Геометрический смысл производной



Опр: касательной называется прямая являющаяся предельным положением секущей

Выведем уравнение касательной

Вывод: $y = k(x) + b$ - уравнение касат-ой с неопределенными коэффициентами k и b

$k_{кас} = \lim_{\Delta x \to 0} k \to 0$ (след из опред кас-ой)

$k_{сек} = tg\, \alpha_{сек} = \frac{M'M}{M_0M'} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

$k_{кас} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'(x_0)$

Вывод: угловой коэффициент касательной равен производной функции в точке

$y = y'(x_0)x + b$ $(x_0; y(x_0))$ - точка лежащая на касательной

$y(x_0) = y'(x_0)x_0 + b$

$b = y(x_0) - y'(x_0)x_0$

Уравнение касательной

$y = y'(x_0)x + y(x_0) - y'(x_0)x_0$

$y = y'(x_0)(x - x_0) + y(x_0)$

Выведем уравнение нормали

Опр: нормалью кас-ся называется прямая, проходящая через точку касания $\perp$ касательной

Случай 1. $y'(x_0) = 0 \Rightarrow$ ур-е касат

$y = y(x_0)$ - горизонтальная прямая

нормаль: $x = x_0$

Случай 2: $y'(x_0) \neq 0$

Ур-е касат-ой $y = k_{кас} x + b$
Ур-е нормали $y = k_{норм} x + b_2$

Условие ⊥ двух прямых (касат. и нормали)

$k_{кас} \cdot k_{норм} = -1$

$k_{норм} = \frac{1}{-k_{кас}} = -\frac{1}{y'(x_0)}$

Напоминание: уравнение прямой с угловым коэффициентом k, проходящей через точку $(x_0; y_0)$ имеет вид

$$y = k(x - x_0) + y_0$$

$(x_0; y_0) = (x_0; y(x_0))$ - т. касания

$$y = -\frac{1}{y'(x_0)}(x - x_0) + y(x_0)$$

Задача:
Найти уравнение касательной и нормали

$y = \frac{x^2+1}{x-3}$ в т. $x_0 = 4$

$y(x_0) = \frac{4^2+1}{4-3} = 17$

$y'(x) = \frac{(x^2+1)'(x-3) - (x^2+1)(x-3)'}{(x-3)^2} = \frac{2x(x-3) - (x^2+1)}{(x-3)^2} = \frac{x^2-6x-1}{(x-3)^2}$

$y'(x_0) = \frac{4^2 - 6\cdot 4 - 1}{(4-3)^2} = -9$

Ур-е касательной:

$y = -9(x-4)+17$ $\quad$ $y = -9x+53$

Ур-е нормали

$y = \frac{1}{9}(x-4)+17$

$y = \frac{1}{9}x - \frac{4}{9}+17$ $\quad$ $y = \frac{1}{9}x + 16\frac{5}{9}$

4. Правило дифференцирования.

а) $(cu)' = c(u)'$

б) $(u \pm v)' = u' + v'$

в) $(u \cdot v)' = u'v + v'u$

г) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$

д) Правило логарифмического дифференцирования

$(u') = u(\ln u)'$

Док-во: в

$y = uv$

$\Delta y = u(x_0+\Delta x)\cdot v(x_0+\Delta x) - u(x_0)v(x_0)$

$\Delta u = u(x_0+\Delta x) - u(x_0)$

$\Delta v = v(x_0+\Delta x) - v(x_0)$

$u(x_0+\Delta x) = u + \Delta u$

$v(x_0+\Delta x) = v + \Delta v$

$\Delta y = (v+\Delta v)(u+\Delta u) - uv = uv + v\cdot\Delta u + u\Delta v + \Delta u\Delta v - uv$

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{v\Delta u + u\Delta v + \Delta u\Delta v}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \underbrace{v\frac{\Delta u}{\Delta x}}_{u'} - \underbrace{u\frac{\Delta v}{\Delta x}}_{v'} + \underbrace{\Delta v\frac{\Delta u}{\Delta x}}_{0}$$

5. Таблица производных элементарных функций.

1) $(c)' = 0$
2) $(x)' = 1$
3) $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
4) $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$
5) $(x^p)' = px^{p-1}$
6) $(e^x)' = e^x$
7) $(a^x)' = a^x \ln a$
8) $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$
9) $(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}$
10) $(\sin x)' = \cos x$
11) $(\cos x)' = -\sin x$
12) $(tg x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
13) $(ctg x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
14) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
15) $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
16) $(arctg x)' = \frac{1}{1+x^2}$
17) $(arcctg x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

Док-во 3: $y = \sqrt{x}$

$\Delta y = \sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x})(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x})}{\Delta x (\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x})} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x (\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x})} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Лекция

1. Правило дифференцирования сложной функции.

$y = y(u(x))$ - сложн. функция

$y(u)$ - внешняя функция

$u(x)$ - внутренняя функция

Пример: $y = e^{2x}$

$y = e^u$ - внешняя $u = 2x$ - внутренняя

Теорема:

Если $y = y(u(x))$ - сложн. фун-я, то

$y' = y'(u)\big|_{u = u(x)} u'(x)$ ~~$u = u(x)$~~

Комментарий: вертикальная черта означает подстановку вместо u выражения $u(x)$ $|u = u(x)$

Примеры:

1) $y = e^{2x}$ $\quad \left.\begin{array}{l} y = e^u \\ u = 2x \end{array}\right\| \to y'(e^u)'\big|_{u=2x} (2x)' =$

$= e^u\big|_{u=2x} \cdot 2 = 2e^{2x}$

2) $\cos(\sqrt{x}) = y$

$$\left.\begin{array}{l} y = \cos(u) \\ u = \sqrt{x} \end{array}\right| \Rightarrow y' = (\cos u)'\big|_{u=\sqrt{x}} \cdot (\sqrt{x})' =$$

$$= -\sin\sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

3) $y = \ln^5 x$

Замечание: внешняя функция всегда определяет последнее действие

$$\left.\begin{array}{l} y = u^5 \\ u = \ln x \end{array}\right| \Rightarrow y' = (u^5)'\big|_{u=\ln x} \cdot (\ln(x))' = 5u^4\big|_{u=\ln x} \cdot \frac{1}{x} =$$

$$= 5\ln^4 x \cdot \frac{1}{x}$$

„Народный" способ дифф-я сложн. ф-ии

$$y = \sqrt{tg^3\left(\sqrt{\sin(x^5)}\right)}$$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{tg^3\sqrt{\sin(x^5)}}} \cdot 3\,tg^2\sqrt{\sin(x^5)} \cdot \frac{1}{\cos^2\sqrt{\sin(x^5)}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\sin(x^5)}} \cdot$$

$$\cdot \cos(x^5) \cdot 5x^4$$

Ключ к успеху - последняя операция

Пример: $y = e^{\sqrt{\cos x}} \cdot tg^3 x$

$$y' = \left(e^{\sqrt{\cos x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\cos x}} \cdot (-\sin x)\right) \cdot tg^3 x + 3\,tg^2 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \cdot e$$

2. Правило логарифмического дифф-я

$$(u)' = u \cdot (\ln u)'$$

Случай №1:

$$((\cos x)^{\sqrt{\sin x}})' = (\cos x)^{\sqrt{\sin x}} \cdot \left(\ln (\cos x)^{\sqrt{\sin x}}\right)' = (\cos x)^{\sqrt{\sin x}} \cdot$$

$$\cdot \left(\sqrt{\sin x} \cdot \ln(\cos x)\right)' = \cos x^{\sqrt{\sin x}} \left(\frac{1}{2\sqrt{\sin x}} \cdot \cos x \cdot \ln \cos x +\right.$$

$$\left. + \frac{1}{\cos x} \cdot (-\sin x) \cdot \sqrt{\sin x}\right)$$

2. Понятие дифференциала

Пусть $y(x)$ диф в т. $x \Rightarrow y'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha(\Delta x) = y'(x) - \frac{\Delta y}{\Delta x}$ – б.м.ф $(\Delta x \to 0) \Rightarrow$

$\Rightarrow \Delta x\, \alpha(\Delta x) = y'(x)\Delta x - \Delta y$

$\Delta y = y'\Delta x + \Delta x\, \alpha_1(\Delta x)$, где $\alpha_1(\Delta x) = -\alpha(\Delta x)$ – б.м.ф $(\Delta x \to 0)$

$y' \cdot \Delta x \gg \Delta x\, \alpha_1(\Delta x)$ при $\Delta x \to 0$, т.к.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x\, \alpha_1(\Delta x)}{y'\Delta x} = 0$$

Показано, что приращение функции состоит из двух слагаемых и причем 1-ое слагаемое $\gg$ 2-го

Опр: Дифференциалом функции $y(x)$ называется величина dy и

$dy = y'(x)\,\Delta x$ которая является главной линейной частью приращения функции

Геометрический смысл дифференциала

α - угол наклона касательной

Из геометрического смысла производной предыдущего следует что:

$y'(x_0) = tg\alpha$

Из $\Delta M_0AB \Rightarrow AB = M_0B \cdot tg(\alpha) = \Delta x y'(x_0) = dy(x_0)$

$AB = dy(x_0)$ $\quad dy = AB$

Отсюда следует приближенное равенство $\Delta y \approx dy$

3. Приближенные вычисления при помощи дифференциала

$\Delta y \approx dy$

$y(x_0+\Delta x) - y(x_0) \approx y'(x_0)\Delta x$

$y(x_0+\Delta x) \approx y(x_0) + y'(x_0)\Delta x$

$x = x_0 + \Delta x \Rightarrow \Delta x = x - x_0$

$y(x) \approx y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0)$ (*)

Вычислить $(1,998)^5$ на калькул. $= 31,8403$

Решение:

1) Определить функцию значение кото-

рой надо вычислить приближенно

$y = x^5 \quad x = 1{,}998$

2) Найти ближайший аргумент x_0, для которого значение ф-ии вычислить легко

$x_0 = 2 \quad y(x_0) = 2^5 = 32$

3) Найти значение значение производной в x_0

$y' = 5x^4 \quad y'(x_0) = 5 \cdot 2^4 = 80$

4) Вычисляем приближенное значение по формуле (*)

$(1{,}998)^5 \approx y(x) \approx 32 + 80(1{,}998 - 2) = 32 + 80 \cdot (-0{,}002)$

$= 32 - 0{,}16 = 31{,}84$

4. Правило Лопиталя.

Теорема:

Пусть $\alpha(x), \beta(x)$ - б.м.ф. $(x \to a)$, причём $\alpha(a) = \beta(a) = 0$

Пусть $\frac{\alpha'(x)}{\beta'(x)}$ - непрерывная ф-я в т. $x = a$,

тогда $\lim\limits_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim\limits_{x \to a} \frac{\alpha'(x)}{\beta'(x)}$

Комментарий:

Условие теоремы $\alpha(a) = \beta(a) = 0$ и $\frac{\alpha'(x)}{\beta'(x)}$ -

непрерывна в т. $x=a$ - обычно всегда выполняется, проверять не надо

Доказательство:

1) $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{\varphi(x)-\varphi(a)} = \lim\limits_{x\to a}\frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{x-a}} =$

$= \frac{\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\lim\limits_{x\to a}\frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{x-a}} = \frac{f'(a)}{\varphi'(a)}$

2) $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ - непрерывна в т. $x=a \Rightarrow \lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \frac{f'(a)}{\varphi'(a)}$

3) Из „1" и „2" следует, что $\Rightarrow$ левая и правая часть совпадают.

Примеры

1) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x^2-x-1}{5x^2+6x-11} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 1}\frac{(2x^2-x-1)'}{(5x^2+6x-11)'} =$

$= \lim\limits_{x\to 1}\frac{4x-1}{10x+6} = \frac{3}{16}$

2) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{3x+1}-2}{1-x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 1}\frac{\frac{3}{2\sqrt{3x+1}}}{-2x} = \frac{3}{4}\Big/-2 = -\frac{3}{8}$

3) Правило Лопиталя может быть использовано в одной задаче несколько раз.

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x}{e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{e^x} = 0$

Используется также для неопределённости $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$

Лекция

1. Производные высокого порядка

$y(x) \to y'(x) \to y'' = (y')' \to$

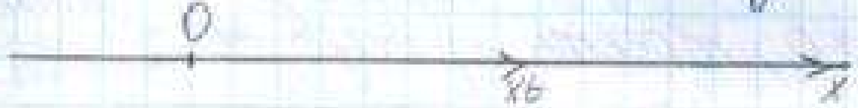
Пример: 1) $y = 2x^4 - 3x^2 + 5$

$y' = 8x^3 - 6x$ $\quad y'' = 24x^2 - 6$ $\quad y''' = 48x$

$y^{IV} = 48$ $\quad y^{V} = 0$

2) $y = e^x$ $\quad y' = e^x$ $\quad y'' = e^x$

Механический смысл y''



$x(t)$ – закон движения материальной точки

$a_{ср} = \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t}$ – среднее ускорение на $[t, t+\Delta t]$

$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t}$ – ускорение в момент времени t

$a = v' = (x')' = x''(t)$

Вторая производная от закона движения есть ускорение

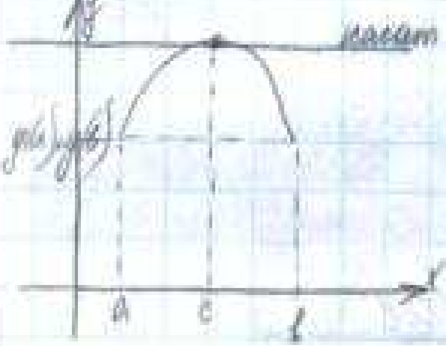
2. Основные теоремы дифференциального исчисления

1) Теорема Ролля:

Пусть: 1) $y(x)$ непрерывна на $[a, b]$

2) $y(x)$ дифференцируема на (a, b)
3) $y(a) = y(b)$

Тогда существует точка $c \in (a, b)$:
$y'(c) = 0$



Геометрическая интерпретация теоремы

При выполнении условий теоремы (см. рисунок) всегда найдется точка на графике (c) в которой касательная || оси Ox т.к. k - угл. коэф. касат = 0, так что произв = 0

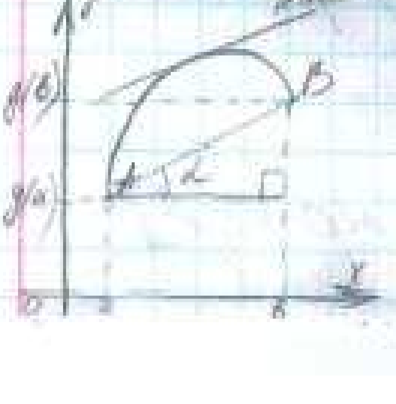
2) Теорема Лагранжа

Пусть:
1) $y(x)$ непрерывна на $[a, b]$
2) $y(x)$ диф-ма на (a, b)

Тогда существует $c \in (a, b)$:

$$\boxed{y(b) - y(a) = y'(c)(b-a)}$$

Геометрическая интерпретация теоремы



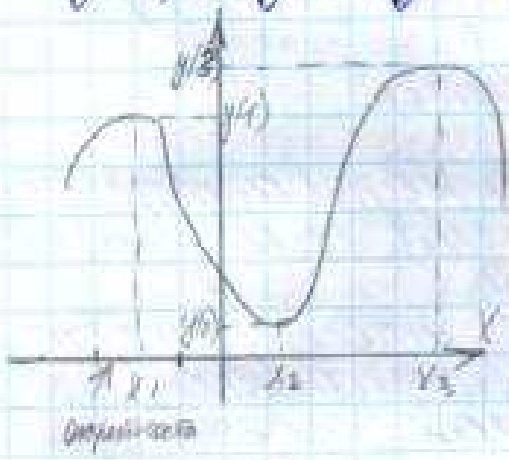
$$y'(c) = \frac{y(b) - y(a)}{b-a} = tg\,\alpha$$

При выполнении условий теоремы на графике найдется такая точка, в которой касательная ∥ хорде АВ

3. Понятие точки экстремума

Опр: точка $x = x_0$ наз-ся т. max (min) для функции $y = y(x)$, если для $\forall x$ из некоторой окрестности т. x_0 вып-ся неравенство

$$y(x_0) > y(x) \quad (y(x_0) < y(x))$$



$x_1; x_3$ – точки max

x_2 – точка min

y_1, y_3 – max

y_2 – min

Опр: Точки max и min наз-ся точками экстремума

Опр: Значения функции в точках max и min наз-ся максимумами и минимумами

Опр: Максимумы и минимумы наз-ся экстремумами

4. Понятие критических и стационарных точек

Опр: точка $x_0 \in D(y)$ наз-ся критической для функции $y = y(x)$, если $y'(x_0)$ не существует, либо $y'(x_0) = 0$

Пример:

1) $y=x^3$ $y'=3x^2$ y' существует везде

$y'=0$ при $x=0$ $x=0$ крит. точка

2) $y=\sqrt[3]{x^2}$ $D(y)=R$

$y'=(x^{\frac{2}{3}})'=\frac{2}{3x^{-\frac{1}{3}}}=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

y' - не существует при $x=0 \in D(y)$

$y'\neq 0$ x_0 - крит. точка

Опр: точка $x_0 \in D(y)$ называется стационарной для $y=y(x)$, если $y'(x_0)=0$

Утверждение: любая стационарная точка является критической, но не всякая критическая точка является стационарной

$x=0$ из примера 1 явл. стационарной, но $x=0$ из 2 не явл. стационарной

5. Необходимое и достаточное условие монотонности функции.

Теорема: Если $y(x)$ - возрастающая (убывающая) на интервале (a,b) и дифференцируемая функция для $x \in (a,b)$, то $y'(x)\geq 0$ - возр. ($y'(x)\leq 0$) убыв.

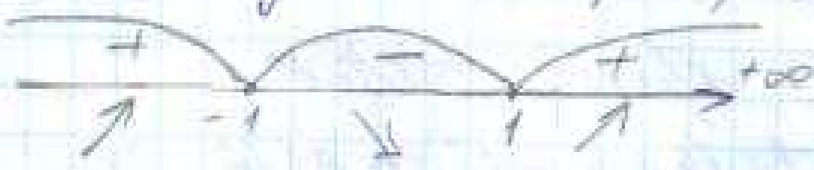
Теорема: (достаточное условие)

Пусть $y'(x)>0$ или $y'(x)<0$ для $x\in(a,b)$ тогда $y(x)$ - возр (убыв) на (a,b)

Пример: $y = x^3 - 3x + 1$

Исследовать на монотонность

Решение: $y' = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x-1)(x+1)$



6. Необходимое и достаточное условие точки экстремума.

Теорема: (необходимое условие)

Если $x = x_0$ — т. экстремума для $y = y(x)$, то $x = x_0$ — крит. точка для $y = y(x)$

Замечание: Из теоремы следует, что точки экстремума следует искать среди критических точек

Замечание: Не всякая крит точка является точкой экстремума

Например: $y = x^3$ $y' = 3x^2$ $y' = 0$ при $x = 0$ — крит. точка, которая не явл точкой экстремума

Теорема: (достаточное условие)

Пусть $x = x_0$ — критическая для $y = y(x)$, причем $y'(x)$ меняет знак при переходе через т. $x = x_0$

а) с плюса на минус точка т-max

б) с минуса на плюс, точка-min

Пример: Исследовать на экстремум

$y = (2x-1)e^{-x}$

Решение:

1) $D(y) = R$

2) Поиск крит. точек

$y' = 2e^{-x} + (2x-1)(-e^{-x}) = e^{-x}(2-2x+1) = e^{-x}(3-2x)$

$y' = 0$ при $x = \frac{3}{2}$

y' – существует везде $x = \frac{3}{2}$ крит. точк

3) Исследовать крит. точки на экстремум

$x_{max} = \frac{3}{2}$

$y_{max} = 2e^{-\frac{3}{2}}$

Ответ: $x_{max} = 1,5$ $y_{max} = 2\frac{1}{e^{\frac{3}{2}}}$

Пример №2:

$y = \ln\left(\frac{x}{x-1}\right) + 1$

Исслед. на экстр

1) $D(y) = (-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$

$\frac{x}{x-1} > 0$

2) Поиск крит. точек

$y' = \frac{1}{\frac{x}{x-1}} \cdot \frac{1(x-1) - 1x}{(x-1)^2} = \frac{-1}{x(x-1)}$

$y' \neq 0$ y' не сущ при $x_1 = 0 \notin D$ =>

$x_2 = 1 \notin D$

⇒ критических точек нет ⇒ т. экстр нет

Ответ: т. экстр. нет

7. Наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке

Теорема: Пусть $y(x)$ - непрерывна на отрезке $[a, b]$

$x_1, x_2, \ldots$ - крит. точки функции на (a, b)

$y_{наиб} = \max \left\{ \begin{matrix} y(a), y(b) \\ y(x_1), y(x_2) \end{matrix} \ldots \right\}$ $y_{наим} = \min \left\{ \begin{matrix} y(a), y(b) \\ y(x_1), y(x_2) \end{matrix} \right\}$

Пример: задача РГР №5

$y = \sqrt[3]{2(x-1)^2(x-4)}$ на $[0; 4]$

1) $D(y) = \mathbb{R} \Rightarrow [0; 4] \in D(y) \Rightarrow y(x)$ непрерывна $[0; 4]$

2) Поиск крит. точек на $(0; 4)$

$y' = \left(\left(2(x-1)^2(x-4)\right)^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3} \cdot 2(x-1)^2(x-4)^{-\frac{2}{3}} \cdot$

$\cdot \left(2(x-1)^2(x-4)\right)' = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^4(x-4)^2}} \cdot 2\left(\left((x-1)^2\right)'(x-4) + \right.$

$\left. + (x-1)^2 \cdot (x-4)'\right) = \frac{2}{3(x-1)\sqrt[3]{4(x-1)(x-4)^2}} \cdot \left(2(x-1)(x-4) + (x-1)^2\right) =$

$= \frac{2}{3} \cdot \frac{\cancel{(x-1)}(2x-8+x-1)}{\cancel{(x-1)}\sqrt[3]{4(x-1)(x-4)^2}} = \frac{2(3x-9)}{3\sqrt[3]{4(x-1)(x-4)^2}} = \frac{2(x-3)}{\sqrt[3]{4(x-1)(x-4)^2}}$

$y' = 0$ при $x = 3 \in (0; 4)$

y' не существует при $x = 1 \in (0; 4)$ и y не существует $y = 4 \notin (0; 4)$

$x_1 = 1$, $x_2 = 3$ - критические точки и инф вала $[0;4)$

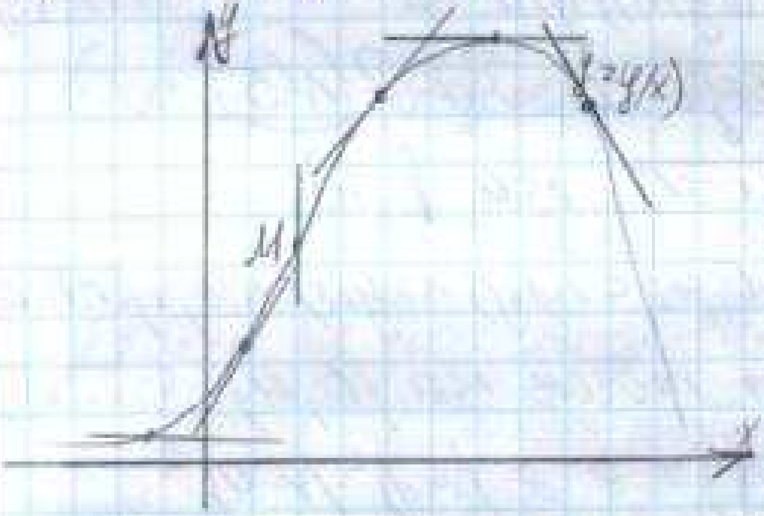
3) $y(0) = \sqrt[3]{-8} = -2$ $\quad y(4) = 0 \quad y(1) = 0$

$y(3) = \sqrt[3]{-8} = -2$

Ответ: $y_{наиб} = 0 = y(1) = y(4)$

$y_{наим} = -2 = y(0) = y(3)$

20.12.12 2. Выпуклость и вогнутость графика функции



Опр: График функции называется выпуклым (вверх) на участке $(A;B)$, если касательная, проведенная в любой точке этого участка, лежит выше графика в некоторой малой окрестности точки касания.

Опр: График функции называется вогнутым (вып. вниз) на участке AB, если касательная, проведенная в любой точке этого участка, лежит ниже графика в некоторой малой окрестности точки касания.

Точки на графике, отделяющие участки выпуклости и вогнутости графика наз. точкой перегиба

Одна часть касат-ой проведённой в точке перегиба лежит выше графика, а другая ниже

3. Необходимое и достаточное условие выпуклости графика

Т.1. Необходимое условие

Пусть график функции $y=y(x)$ выпуклый (вогнутый) на участке с соответствующим интервалом (a,b) и существует 2-ая производная $y''(x)$ на (a,b) тогда $y''(x)\le 0$ ($y''\ge 0$) на $(a;b)$

Т.2. Достаточное условие

Пусть $y''(x)>0$ ($y''(x)<0$) на (a,b). Тогда график функции $y(x)$ вогнутый (выпуклый) на участке соотв. (a,b)

Задача: исследовать выпуклость графика функции

$y=x^3-3x+1$ $\quad y'=3x^2-3$ $\quad y''=6x$

$-$ $\quad 0 \quad$ $+$ $\quad y''$

Замечание: график функции можно построить при помощи исследования y', но исследование y'' может просто уточнить построение графика

4. Необходимое и достаточное условие точек перегиба.

Т.1 (необходимое условие)

Пусть $M(x_0; y_0)$ – т. перегиба графика $y=y(x)$, причем существует $y''(x)$ в некоторой окрестности т. x_0 непрерывная в x_0, тогда $y''(x_0)=0$

Т.2. (достаточное условие)

Пусть существует $y''(x)$ в окр. т. $x=x_0$ причем при переходе через т. $x=x_0$ $y''(x)$ меняет знак. Тогда $M(x_0; y(x_0))$ – точка перегиба.

5. Вертикальная асимптота

Опр: Прямая $x=a$ наз-ся вертикальной асимптотой для графика $y=y(x)$, если $\lim\limits_{x\to a+0} y(x)=\infty$ либо $\lim\limits_{x\to a-0} y(x)=\infty$

Примеры

1) $y=\frac{x+1}{x-2}$ $x=2$ – вертикальная асимптота

$\lim\limits_{x\to 2+0} \frac{x+1}{x-2}=\left[\frac{3}{+0}\right]=+\infty$

$\lim\limits_{x\to 2-0} \frac{x+1}{x-2}=\left[\frac{3}{-0}\right]=-\infty$

Пример №2

$y = \frac{x+1}{x^2}$ $x=0$ верт асимптота

$$\lim_{x\to 0+0} \frac{x+1}{x^2} \boxed{\frac{1}{+0}} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0-0} \frac{x+1}{x^2} \boxed{\frac{1}{+0}} = +\infty$$

Пример №3 $y = e^{\frac{1}{x-1}}$

$x=1$ - верт. асимптота $\lim_{x\to 1+0} e^{\frac{1}{x-1}} = +\infty$

$\lim_{x\to 1-0} e^{\frac{1}{x-1}} = 0$

6. Наклонная асимптота

Замечание:

Горизонтальная асимптота - наклонная

Опр: Прямая $y = kx+b$ называется наклонной для графика $y = y(x)$ если при $x\to+\infty$ $x\to-\infty$

$$\lim_{\substack{x\to+\infty \\ x\to-\infty}} [y(x) - (kx+b)] = 0$$

Геометрическая интерпретация

Теорема: прямая $y = kx+b$ является

наклонной асимптотой для $y=y(x)$
$\Leftrightarrow$ когда существуют 2 предела

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{y(x)}{x} \qquad b = \lim_{x\to+\infty} [y(x) - kx]$$

Задача: Найти наклонную асимптоту при $x\to\infty$ для

$y = \frac{x^2+1}{x-2}$ 1) $k = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2+1}{x-2}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x^2-2x} = \frac{1}{1} = 1$

2) $b = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{x^2+1}{x-2} - 1\cdot x\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1-x(x-2)}{x-2} =$

$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1-x^2+2x}{x-2} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+2x}{x-2} = \frac{2}{1} = 2$

$y = x+2$

Замечание:

Существуют наклонные асимптоты, которые график пересекает ∞ число раз

Пример $y = \frac{\sin x}{x}$

$k = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\sin x}{x}}{x} = \lim_{x\to\infty} \sin x \cdot \frac{1}{x^2} = 0$

$b = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{\sin x}{x} - 0x\right] = 0 \Rightarrow y = 0$ — прямая асимптота

7. Схема исследования функции $y=\frac{x^2+1}{x-2}$

1. Область определения

$D(y)=(-\infty;2)\cup(2;+\infty)$

2. Чётность, нечётность

$y(-x)=\frac{(-x)^2+1}{-(x-2)}=\frac{x^2-1}{-x+2}$ $\quad y(x)\ne\pm y(-x)$ – общего вида

3. y' – диаграмма

$y'=\frac{2x(x-2)-x^2-1}{(x-2)^2}=\frac{x^2-4x-1}{x-2}=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x-2)^2}$

$D_1=4+1=5 \quad x_{1,2}=2\pm\sqrt{5}$

$+ \quad 2 \quad + \quad x_1 \quad - \quad x_2 \quad +$

$\nearrow \quad \nearrow \quad \searrow \quad \nearrow$

$x=x_1$ – max

$x=x_2$ – min

4. y'' – диаграмма

$y''=\frac{(2x-4)(x-2)^2-(x^2-4x-1)(x-2)2}{(x-2)^4}=\frac{\cancel{2x^2}-\cancel{8x}+8-\cancel{2x^2}+\cancel{8x}+2}{(x-2)^3}=\frac{10}{(x-2)^3}$

$- \quad 2 \quad +$

5. асимптоты

$x=2$ – верт $\quad y=x+2$ – наклонная

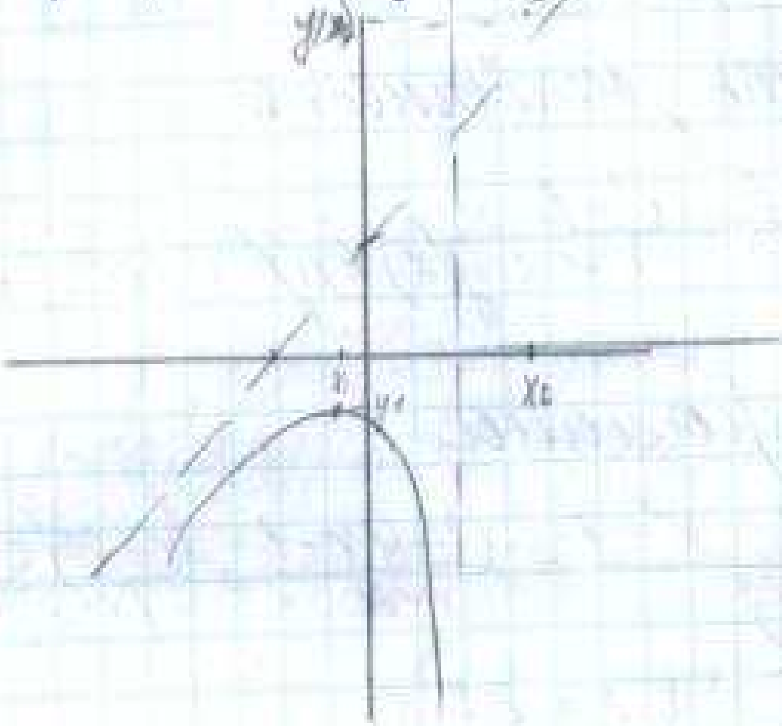
6. Точки на графике

с Ox $\quad y=0 \quad x^2+1=0$

с Oy $\quad x=0 \quad y=-0,5$

x	x_1	0	x_4
y	0	-0,5	?

7. График функции



8. Множество значений функции

$E(y) = (-\infty; y_1] \cup [y_2; +\infty)$