Решая систему (15.14), (15.15), можно получить

$$p_0=\left(1+\frac{\lambda_{01}}{\lambda_{10}}+\frac{\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{21}\lambda_{10}}+\ldots+\frac{\lambda_{n-1,n}\cdots\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{n,n-1}\cdots\lambda_{21}\lambda_{10}}\right)^{-1}, \qquad (15.16)$$

$$p_1=\frac{\lambda_{01}}{\lambda_{10}}p_0,\ p_2=\frac{\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{21}\lambda_{10}}p_0,\ \ldots,\ p_n=\frac{\lambda_{n-1,n}\cdots\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{n,n-1}\cdots\lambda_{21}\lambda_{10}}p_0. \qquad (15.17)$$

Легко заметить, что в формулах (15.17) для p_1, p_2, ..., p_n коэффициенты при p_0 есть слагаемые, стоящие после единицы в формуле (15.16). Числители этих коэффициентов представляют произведение всех интенсивностей, стоящих у стрелок, ведущих слева направо до данного состояния S_k (k=1, 2, ..., n), а знаменатели — произведение всех интенсивностей, стоящих у стрелок, ведущих справа налево до состояния S_k.

▷ **15.4.** Процесс гибели и размножения представлен графом (рис. 15.5). Найти предельные вероятности состояний.

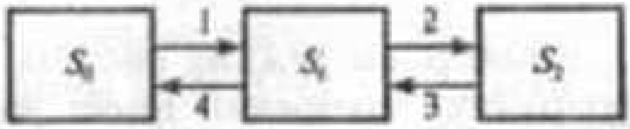

Рис. 15.5

Р е ш е н и е. По формуле (15.16) найдем

$$p_0=\left(1+\frac{1}{4}+\frac{2\cdot 1}{3\cdot 4}\right)^{-1}=0{,}706,$$

по (15.17) — $p_1=\frac{1}{4}0{,}706=0{,}176$, $p_2=\frac{2\cdot 1}{3\cdot 4}0{,}706=0{,}118$, т.е. в установившемся, стационарном режиме в среднем 70,6% времени система будет находиться в состоянии S_0, 17,6% — в состоянии S_1 и 11,8% — в состоянии S_2.▶

15.6. СМО с отказами

В качестве показателей эффективности СМО с отказами будем рассматривать:

А — абсолютную пропускную способность СМО, т.е. среднее число заявок, обслуживаемых в единицу времени;

Q — *относительную пропускную способность*, т.е. среднюю долю пришедших заявок, обслуживаемых системой;

$P_{отк.}$ — *вероятность отказа*, т.е. того, что заявка покинет СМО необслуженной;

$\bar{k}$ — *среднее число занятых каналов* (для многоканальной системы).

Одноканальная система с отказами. Рассмотрим задачу.

Имеется один канал, на который поступает поток заявок с интенсивностью λ. Поток обслуживаний имеет интенсивность μ[1]. Найти предельные вероятности состояний системы и показатели ее эффективности.

Система S (СМО) имеет два состояния: S_0 — канал свободен, S_1 — канал занят. Размеченный граф состояний представлен на рис. 15.6.

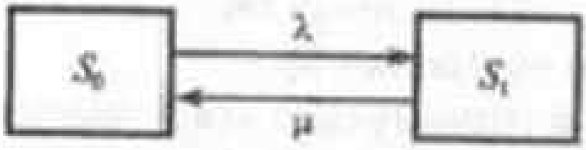

Рис. 15.6

В предельном, стационарном режиме система алгебраических уравнений для вероятностей состояний имеет вид (*см.* правило составления таких уравнений на с. 343).

$$\begin{cases} \lambda p_0 = \mu p_1, \\ \mu p_1 = \lambda p_0, \end{cases} \qquad (15.18)$$

т.е. система вырождается в одно уравнение. Учитывая нормировочное условие $p_0 + p_1 = 1$, найдем из (15.18) предельные вероятности состояний

$$p_0 = \frac{\mu}{\lambda + \mu}, \; p_1 = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}, \qquad (15.19)$$

которые выражают среднее относительное время пребывания системы в состоянии S_0 (когда канал свободен) и S_1 (когда канал

[1] Здесь и в дальнейшем предполагается, что все потоки событий, переводящие СМО из состояния в состояние, будут простейшими. К ним относится и поток обслуживаний — поток заявок, обслуживаемых одним непрерывно занятым каналом. Среднее время обслуживания $\bar{t}_{об.}$ обратно по величине интенсивности μ, т.е. $\bar{t}_{об.} = 1/\mu$.

занят), т.е. определяют соответственно относительную пропускную способность Q системы и вероятность отказа $P_{отк}$:

$$Q=\frac{\mu}{\lambda+\mu}, \qquad (15.20)$$

$$P_{отк.}=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}. \qquad (15.21)$$

Абсолютную пропускную способность найдем, умножив относительную пропускную способность Q на интенсивность потока отказов

$$A=\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}. \qquad (15.22)$$

▷ **15.5.** Известно, что заявки на телефонные переговоры в телевизионном ателье поступают с интенсивностью λ, равной 90 заявок в час, а средняя продолжительность разговора по телефону $\bar{t}_{об.}=2$ мин. Определить показатели эффективности работы СМО (телефонной связи) при наличии одного телефонного номера.

Решение. Имеем $\lambda=90$ (1/ч), $\bar{t}_{об.}=2$ мин. Интенсивность потока обслуживаний $\mu=1/\bar{t}_{об.}=1/2=0{,}5$ (1/мин)=30 (1/ч). По (15.20) относительная пропускная способность СМО $Q=30/(90+30)=0{,}25$, т.е. в среднем только 25% поступающих заявок осуществят переговоры по телефону. Соответственно вероятность отказа в обслуживании составит $P_{отк.}=0{,}75$ (*см.* (15.21)). Абсолютная пропускная способность СМО по (15.29) $A=90\cdot0{,}25=22{,}5$, т.е. в среднем в час будут обслужены 22,5 заявки на переговоры. Очевидно, что при наличии только одного телефонного номера СМО будет плохо справляться с потоком заявок.▶

Многоканальная система с отказами. Рассмотрим классическую *задачу Эрланга.*

Имеется n каналов, на которые поступает поток заявок с интенсивностью λ. Поток обслуживаний имеет интенсивность μ. Найти предельные вероятности состояний системы и показатели ее эффективности.

Система S (СМО) имеет следующие состояния (нумеруем их по числу заявок, находящихся в системе): $S_0, S_1, S_2, ..., S_k, ... S_n$, где S_k — состояние системы, когда в ней находится k заявок, т.е. занято k каналов.

Граф состояний СМО соответствует процессу гибели и размножения и показан на рис. 15.7.

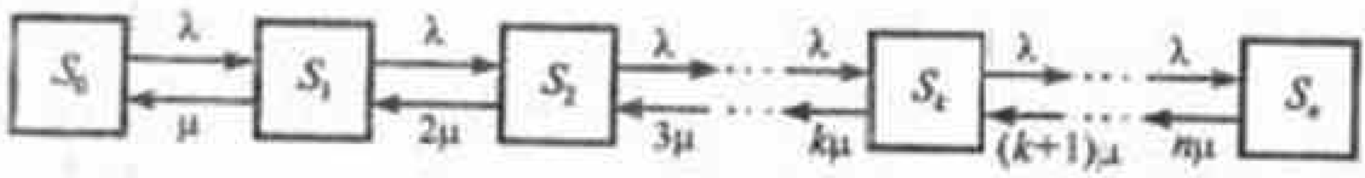

Рис. 15.7

Поток заявок последовательно переводит систему из любого левого состояния в соседнее правое с одной и той же интенсивностью λ. Интенсивность же потока обслуживаний, переводящих систему из любого правого состояния в соседнее левое состояние, постоянно меняется в зависимости от состояния. Действительно, если СМО находится в состоянии S_2 (два канала заняты), то она может перейти в состояние S_1 (один канал занят), когда закончит обслуживание либо первый, либо второй канал, т.е. суммарная интенсивность их потоков обслуживаний будет 2μ. Аналогично суммарный поток обслуживаний, переводящий СМО из состояния S_3 (три канала заняты) в S_2, будет иметь интенсивность 3μ, т.е. может освободиться любой из трех каналов и т.д.

В формуле (15.16) для схемы гибели и размножения получим для предельной вероятности состояния

$$p_0 = \left(1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda^2}{2!\mu^2} + \ldots + \frac{\lambda^k}{k!\mu^k} + \ldots + \frac{\lambda^n}{n!\mu^n}\right)^{-1}, \qquad (15.23)$$

где члены разложения $\frac{\lambda}{\mu}$, $\frac{\lambda^2}{2!\mu^2}$, ..., $\frac{\lambda^n}{n!\mu^n}$ будут представлять собой коэффициенты при p_0 в выражениях для предельных вероятностей $p_1, p_2, \ldots, p_k, \ldots, p_n$. Величина

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} \qquad (15.24)$$

называется *приведенной интенсивностью потока заявок* или *интенсивностью нагрузки канала*. Она выражает среднее число заявок, приходящее за среднее время обслуживания одной заявки. Теперь

$$p_0 = \left(1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + \ldots + \frac{\rho^k}{k!} + \ldots + \frac{\rho^n}{n!}\right)^{-1}, \qquad (15.25)$$

$$p_1 = \rho p_0,\ p_2 = \frac{\rho^2}{2!} p_0,\ \ldots,\ p_k = \frac{\rho^k}{k!} p_0,\ \ldots,\ p_n = \frac{\rho^n}{n!} p_0. \qquad (15.26)$$

Формулы (15.25) и (15.26) для предельных вероятностей получили названия *формул Эрланга*[1] в честь основателя теории массового обслуживания.

Вероятность отказа СМО есть предельная вероятность того, что все n каналов системы будут заняты, т.е.

$$P_{\text{отк}} = \frac{\rho^n}{n!} p_0. \qquad (15.27)$$

Относительная пропускная способность — вероятность того, что заявка будет обслужена:

$$Q = 1 - P_{\text{отк}} = 1 - \frac{\rho^n}{n!} p_0. \qquad (15.28)$$

Абсолютная пропускная способность:

$$A = \lambda Q = \lambda\left(1 - \frac{\rho^n}{n!} p_0\right). \qquad (15.29)$$

Среднее число занятых каналов $\bar{k}$ есть математическое ожидание числа занятых каналов:

$$\bar{k} = \sum_{k=0}^{n} k p_k,$$

где p_k — предельные вероятности состояний, определяемых по формулам (15.25), (15.26).

Однако среднее число занятых каналов можно найти проще, если учесть, что абсолютная пропускная способность системы A есть не что иное, как интенсивность потока *обслуженных* системой заявок (в единицу времени). Так как каждый занятый канал обслуживает в среднем μ заявок (в единицу времени), то среднее число занятых каналов

$$\bar{k} = \frac{A}{\mu}. \qquad (15.30)$$

---

[1] Эрланг А.К. (конец XIX в. — начало XX в.) — датский инженер, математик.

или, учитывая (15.29), (15.24):

$$\bar{k} = \rho\left(1 - \frac{\rho^n}{n!} p_0\right). \quad (15.31)$$

▷ **15.6.** В условиях задачи **15.5** определить оптимальное число телефонных номеров в телевизионном ателье, если условием оптимальности считать удовлетворение в среднем из каждых 100 заявок не менее 90 заявок на переговоры.

Решение. Интенсивность нагрузки канала по формуле (15.25) $\rho=90/30=3$, т.е. за время среднего (по продолжительности) телефонного разговора $\bar{t}_{об.}=2$ мин. поступает в среднем 3 заявки на переговоры.

Будем постепенно увеличивать число каналов (телефонных номеров) $n=2, 3, 4, \ldots$ и определим по формулам (15.25), (15.28), (15.29) для получаемой n-канальной СМО характеристики обслуживания. Например, при $n = 2$ $p_0 = \left(1 + 3 + 3^2/2!\right)^{-1} = 0{,}118 \approx 0{,}12$; $Q = 1 - \left(3^2/2!\right) \cdot 0{,}118 = 0{,}471 \approx 0{,}47$; $A=90 \cdot 0{,}471=42{,}4$ и т.д. Значение характеристик СМО сведем в табл. 15.1.

Таблица 15.1

Характеристика обслуживания	Число каналов (телефонных номеров)					
	1	2	3	4	5	6
Относительная пропускная способность Q	0,25	0,47	0,65	0,79	0,90	0,95
Абсолютная пропускная способность A	22,5	42,4	58,8	71,5	80,1	85,3

По условию оптимальности $Q \geq 0{,}9$, следовательно, в телевизионном ателье необходимо установить 5 телефонных номеров (в этом случае $Q = 0{,}90$ — *см.* табл. 15.1). При этом в час будут обслуживаться в среднем 80 заявок ($A = 80{,}1$), а среднее число занятых телефонных номеров (каналов) по формуле (15.30) $\bar{k} = 80{,}1/30 = 2{,}67$.▶

▷ **15.7.** В вычислительный центр коллективного пользования с тремя ЭВМ поступают заказы от предприятий на вычислительные работы. Если работают все три ЭВМ, то вновь поступающий заказ не принимается, и предприятие вынуждено обратиться в другой вычислительный центр. Среднее время работы с одним заказом составляет 3 ч. Интенсивность потока заявок 0,25 (1/ч). Найти предельные вероятности состояний и показатели эффективности работы вычислительного центра.

Решение. По условию $n=3$, $\lambda=0,25$ (1/ч), $\bar{t}_{об.}=3$ (ч). Интенсивность потока обслуживаний $\mu=1/\bar{t}_{об.}=1/3=0,33$. Интенсивность нагрузки ЭВМ по формуле (15.24) $\rho=0,25/0,33=0,75$. Найдем предельные вероятности состояний:

по формуле (15.25) $p_0=(1+0,75+0,75^2/2!+0,75^3/3!)^{-1}=0,476$;

по формуле (15.26) $p_1=0,75\cdot0,476=0,357$; $p_2=(0,75^2/2!)\cdot0,476=$ $=0,134$; $p_3=(0,75^3/3!)\cdot0,476=0,033$, т.е. в стационарном режиме работы вычислительного центра в среднем 47,6% времени нет ни одной заявки, 35,7% — имеется одна заявка (занята одна ЭВМ), 13,4% — две заявки (две ЭВМ), 3,3% времени — три заявки (заняты три ЭВМ).

Вероятность отказа (когда заняты все три ЭВМ), таким образом, $P_{отк.}=p_3=0,033$.

По формуле (15.28) относительная пропускная способность центра $Q = 1-0,033 = 0,967$, т.е. в среднем из каждых 100 заявок вычислительный центр обслуживает 96,7 заявок.

По формуле (15.29) абсолютная пропускная способность центра $A = 0,25\cdot0,967 = 0,242$, т.е. в один час в среднем обслуживается 0,242 заявки.

По формуле (15.30) среднее число занятых ЭВМ $\bar{k} =$ $= 0,242/0,33 = 0,725$, т.е. каждая из трех ЭВМ будет занята обслуживанием заявок в среднем лишь на $72,5/3 = 24,2\%$.

При оценке эффективности работы вычислительного центра необходимо сопоставить доходы от выполнения заявок с потерями от простоя дорогостоящих ЭВМ (с одной стороны, у нас высокая пропускная способность СМО, а с другой стороны — значительный простой каналов обслуживания) и выбрать компромиссное решение.▶

15.7. СМО с ожиданием (очередью)

В качестве показателей эффективности СМО с ожиданием, кроме уже известных показателей — абсолютной A и относительной Q пропускной способности, вероятности отказа $P_{отк.}$, средне-