уравнений (15.10), описывающая стационарный режим системы S, вместе с нормировочным условием (15.8) примет вид[1]:

$$\begin{cases} 3p_0 = 4p_1 + 6p_2, \\ 6p_1 = p_0 + 6p_3, \\ 7p_2 = 2p_0 + 4p_3, \\ p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1. \end{cases}$$

Решив систему, получим $p_0=0{,}60$, $p_1=0{,}15$, $p_2=0{,}20$, $p_3=0{,}05$.

Учитывая, что $p_0+p_2=0{,}60+0{,}20=0{,}80$, $p_0+p_1=0{,}60+0{,}15=0{,}75$, $p_1+p_3=0{,}15+0{,}05=0{,}20$, $p_2+p_3=0{,}20+0{,}05=0{,}25$, а затраты на ремонт первого и второго узла составляют теперь соответственно 8 и 4 ден. ед., вычислим средний чистый доход в единицу времени:

$$Д_1=0{,}80\cdot 10+0{,}75\cdot 6-0{,}20\cdot 8-0{,}25\cdot 4=9{,}9 \text{ ден.ед.}$$

Так как $Д_1$ больше $Д$ (примерно на 20%), то экономическая целесообразность ускорения ремонтов узлов очевидна.▶

15.5. Процесс гибели и размножения

В теории массового обслуживания широкое распространение имеет специальный класс случайных процессов — так называемый *процесс гибели и размножения*. Название этого процесса связано с рядом биологических задач, где он является математической моделью изменения численности биологических популяций.

Граф состояний процесса гибели и размножения имеет вид, показанный на рис. 15.4.

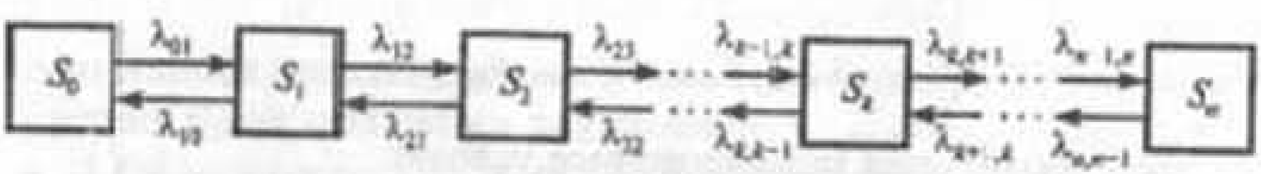

Рис. 15.4

Рассмотрим упорядоченное множество состояний системы S_0, S_1, S_2, ..., S_k. Переходы могут осуществляться из любого со-

---

[1] При записи системы (15.10) одно "лишнее" уравнение мы исключили.

стояния только в состояния с соседними номерами, т.е. из состояния S_k возможны переходы только либо в состояние S_{k-1}, либо в состояние S_{k+1}[1].

Предположим, что все потоки событий, переводящие систему по стрелкам графа, простейшие с соответствующими интенсивностями $\lambda_{k,k+1}$ или $\lambda_{k+1,k}$.

По графу, представленному на рис. 15.4, составим и решим алгебраические уравнения для предельных вероятностей состояний (их существование вытекает из возможности перехода из каждого состояния в каждое другое и конечности числа состояний).

В соответствии с правилом составления таких уравнений (см. 15.13) получим: для состояния S_0

$$\lambda_{01}p_0 = \lambda_{10}p_1, \tag{15.12}$$

для состояния S_1 — $(\lambda_{12}+\lambda_{10})p_1 = \lambda_{01}p_0+\lambda_{21}p_2$, которое с учетом (15.12) приводится к виду

$$\lambda_{12}p_1=\lambda_{21}p_2. \tag{15.13}$$

Аналогично, записывая уравнения для предельных вероятностей других состояний, можно получить следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \lambda_{01}p_0 = \lambda_{10}p_1, \\ \lambda_{12}p_1 = \lambda_{21}p_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \lambda_{k-1,k}p_{k-1} = \lambda_{k,k-1}p_k, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \lambda_{n-1,n}p_{n-1} = \lambda_{n,n-1}p_n, \end{cases} \tag{15.14}$$

к которой добавляется нормировочное условие

$$p_0 + p_1 + p_2+\ldots+p_n = 1. \tag{15.15}$$

---

[1] При анализе численности популяций считают, что состояние S_k соответствует численности популяции, равной k, и переход системы из состояния S_k в состояние S_{k+1} происходит при рождении одного члена популяции, а переход в состояние S_{k-1} — при гибели одного члена популяции.

Решая систему (15.14), (15.15), можно получить

$$p_0=\left(1+\frac{\lambda_{01}}{\lambda_{10}}+\frac{\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{21}\lambda_{10}}+\ldots+\frac{\lambda_{n-1,n}\cdots\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{n,n-1}\cdots\lambda_{21}\lambda_{10}}\right)^{-1}, \qquad (15.16)$$

$$p_1=\frac{\lambda_{01}}{\lambda_{10}}p_0,\ p_2=\frac{\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{21}\lambda_{10}}p_0,\ \ldots,\ p_n=\frac{\lambda_{n-1,n}\cdots\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{n,n-1}\cdots\lambda_{21}\lambda_{10}}p_0. \qquad (15.17)$$

Легко заметить, что в формулах (15.17) для $p_1, p_2, \ldots, p_n$ коэффициенты при p_0 есть слагаемые, стоящие после единицы в формуле (15.16). Числители этих коэффициентов представляют произведение всех интенсивностей, стоящих у стрелок, ведущих слева направо до данного состояния S_k ($k=1, 2, \ldots, n$), а знаменатели — произведение всех интенсивностей, стоящих у стрелок, ведущих справа налево до состояния S_k.

▷ **15.4.** Процесс гибели и размножения представлен графом (рис. 15.5). Найти предельные вероятности состояний.

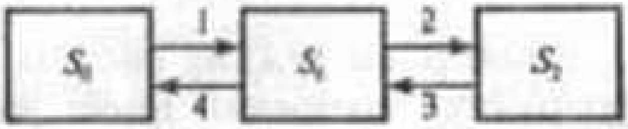

Рис. 15.5

Р е ш е н и е. По формуле (15.16) найдем

$$p_0=\left(1+\frac{1}{4}+\frac{2\cdot 1}{3\cdot 4}\right)^{-1}=0{,}706,$$

по (15.17) — $p_1=\frac{1}{4}0{,}706=0{,}176$, $p_2=\frac{2\cdot 1}{3\cdot 4}0{,}706=0{,}118$, т.е. в установившемся, стационарном режиме в среднем 70,6% времени система будет находиться в состоянии S_0, 17,6% — в состоянии S_1 и 11,8% — в состоянии S_2.▶

15.6. СМО с отказами

В качестве показателей эффективности СМО с отказами будем рассматривать:

A — абсолютную пропускную способность СМО, т.е. среднее число заявок, обслуживаемых в единицу времени;