тическое ожидание равно среднему квадратическому отклонению случайной величины

$$a = \sigma = \frac{1}{\lambda} \tag{15.6}$$

и обратно по величине интенсивности потока λ.

Важнейшее свойство показательного распределения (присущее только показательному распределению) состоит в следующем: если промежуток времени, распределенный по показательному закону, уже длился некоторое время τ, то это никак не влияет на закон распределения оставшейся части промежутка $(T-\tau)$: он будет таким же, как и закон распределения всего промежутка T.

Другими словами, для интервала времени T между двумя последовательными соседними событиями потока, имеющего показательное распределение, любые сведения о том, сколько времени протекал этот интервал, не влияют на закон распределения оставшейся части. Это свойство показательного закона представляет собой, в сущности, другую формулировку для "отсутствия последействия" — основного свойства простейшего потока.

Для простейшего потока с интенсивностью λ вероятность попадания на *элементарный* (*малый*) отрезок времени Δt хотя бы одного события потока равна согласно (15.4)

$$P_{\Delta t} = P(T < \Delta t) = 1 - e^{-\lambda \Delta t} \approx \lambda \Delta t\ . \tag{15.7}$$

(Заметим, что эта приближенная формула, получаемая заменой функции $e^{-\lambda \Delta t}$ лишь двумя первыми членами ее разложения в ряд по степеням Δt, тем точнее, чем меньше Δt).

15.4. Уравнения Колмогорова. Предельные вероятности состояний

Рассмотрим математическое описание марковского процесса с дискретными состояниями и непрерывным временем на примере случайного процесса из задачи **15.1**, граф которого изображен на рис. 15.1. Будем полагать, что все переходы системы из состояния S_i в S_j происходят под воздействием простейших потоков событий с интенсивностями λ_{ij} (i, j=0, 1, 2, 3); так, переход системы из состояния S_0 в S_1 будет происходить под воздействием потока отказов первого узла, а обратный переход из состояния S_1 в S_0 — под воздействием потока "окончаний ремонтов" первого узла и т.п.

Граф состояний системы с проставленными у стрелок интенсивностями будем называть *размеченным* (*см.* рис. 15.1). Рассматриваемая система S имеет четыре возможных состояния: S_0, S_1, S_2, S_3.

Вероятностью i-го состояния называется вероятность $p_i(t)$ того, что в момент t система будет находиться в состоянии S_i. Очевидно, что для любого момента t сумма вероятностей всех состояний равна единице:

$$\sum_{i=0}^{3} p_i(t)=1. \tag{15.8}$$

Рассмотрим систему в момент t и, задав малый промежуток Δt, найдем вероятность $p_0(t+\Delta t)$ того, что система в момент $t+\Delta t$ будет находиться в состоянии S_0. Это достигается разными способами.

1. Система в момент t с вероятностью $p_0(t)$ находилась в состоянии S_0, а за время Δt не вышла из него.

Вывести систему из этого состояния (*см.* граф на рис. 15.1) можно суммарным простейшим потоком с интенсивностью $(\lambda_{01}+\lambda_{02})$, т.е. в соответствии с (15.7), с вероятностью, приближенно равной $(\lambda_{01}+\lambda_{02})\Delta t$. А вероятность того, что система не выйдет из состояния S_0, равна $[1-(\lambda_{01}+\lambda_{02})\Delta t]$. Вероятность того, что система будет находиться в состоянии S_0 по первому способу (т.е. того, что находилась в состоянии S_0 и не выйдет из него за время Δt), равна по теореме умножения вероятностей:

$$p_0(t)\left[1-\left(\lambda_{01}+\lambda_{02}\right)\Delta t\right].$$

2. Система в момент t с вероятностями $p_1(t)$ (или $p_2(t)$) находилась в состоянии S_1 или S_2 и за время Δt перешла в состояние S_0.

Потоком интенсивностью λ_{10} (или λ_{20} — *см.* рис. 15.1) система перейдет в состояние S_0 с вероятностью, приближенно равной $\lambda_{10}\Delta t$ (или $\lambda_{20}\Delta t$). Вероятность того, что система будет находиться в состоянии S_0 по этому способу, равна $p_1(t)\lambda_{10}\Delta t$ (или $p_2(t)\lambda_{20}\Delta t$).

Применяя теорему сложения вероятностей, получим

$$p_0(t+\Delta t)=p_1(t)\lambda_{10}\Delta t+p_2(t)\lambda_{20}\Delta t+p_0(t)\left[1-\left(\lambda_{01}+\lambda_{02}\right)\Delta t\right],$$

откуда

$$\frac{p_0(t+\Delta t)-p_0(t)}{\Delta t}=p_1(t)\lambda_{10}+p_2(t)\lambda_{20}-(\lambda_{01}+\lambda_{02})p_0(t).$$

Переходя к пределу при $\Delta t \to 0$ (приближенные равенства, св
занные с применением формулы (15.7), перейдут в точные), по
чим в левой части уравнения производную $p_0'(t)$ (обозначим
для простоты: p_0'):

$$p_0'=\lambda_{10}p_1+\lambda_{20}p_2-(\lambda_{01}-\lambda_{02})p_0.$$

Получили дифференциальное уравнение первого порядка, т
уравнение, содержащее как саму неизвестную функцию, так и
производную первого порядка.

Рассуждая аналогично для других состояний системы S, мож
получить систему дифференциальных уравнений Колмогорова д
вероятностей состояний:

$$\begin{cases} p_0'=\lambda_{10}p_2+\lambda_{20}p_2-(\lambda_{01}+\lambda_{02})p_0, \\ p_1'=\lambda_{01}p_0+\lambda_{31}p_3-(\lambda_{10}+\lambda_{13})p_1, \\ p_2'=\lambda_{02}p_0+\lambda_{32}p_3-(\lambda_{20}+\lambda_{23})p_2, \\ p_3'=\lambda_{13}p_1+\lambda_{23}p_2-(\lambda_{31}+\lambda_{32})p_3. \end{cases} \quad (15.$$

Сформулируем правило составления уравнен
Колмогорова. *В левой части каждого из них стоит прои
ная вероятности i-го состояния. В правой части — сумма прои
дений вероятностей всех состояний (из которых идут стрел
данное состояние) на интенсивности соответствующих пот
событий, минус суммарная интенсивность всех потоков, выводя
систему из данного состояния, умноженная на вероятность дан
(i-го состояния).*

В системе (15.9) независимых уравнений на единицу мен
общего числа уравнений. Поэтому для решения системы необ
димо добавить уравнение (15.8).

Особенность решения дифференциальных уравнений вооб
состоит в том, что требуется задать так называемые началь
условия, т.е. в данном случае вероятности состояний систем
начальный момент $t = 0$. Так, например, систему уравнений (1
естественно решать при условии, что в начальный момент
узла исправны и система находилась в состоянии S_0, т.е. при н
чальных условиях $p_0(0)=1$, $p_1(0)=p_2(0)=p_3(0)=0$.

Уравнения Колмогорова дают возможность найти все вероятности состояний как *функции времени.* Особый интерес представляют вероятности системы $p_i(t)$ в *предельном стационарном режиме*, т.е. при $t \to \infty$, которые называются *предельными* (или *финальными*) вероятностями состояний.

В теории случайных процессов доказывается, что *если число состояний системы конечно и из каждого из них можно (за конечное число шагов) перейти в любое другое состояние, то предельные вероятности существуют.*

Предельная вероятность состояния S_i имеет четкий смысл: она показывает *среднее относительное время пребывания системы в этом состоянии.* Например, если предельная вероятность состояния S_0, т.е. $p_0=0,5$, то это означает, что в среднем половину времени система находится в состоянии S_0.

Так как предельные вероятности постоянны, то, заменяя в уравнениях Колмогорова их производные нулевыми значениями, получим систему линейных алгебраических уравнений, описывающих стационарный режим. Для системы S с графом состояний, изображенном на рис. 15.1), такая система уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} (\lambda_{01} + \lambda_{02})p_0 = \lambda_{10}p_1 + \lambda_{20}p_2, \\ (\lambda_{10} + \lambda_{13})p_1 = \lambda_{01}p_0 + \lambda_{31}p_3, \\ (\lambda_{20} + \lambda_{23})p_2 = \lambda_{02}p_0 + \lambda_{32}p_3, \\ (\lambda_{31} + \lambda_{32})p_3 = \lambda_{13}p_1 + \lambda_{23}p_2. \end{cases} \quad \textbf{(15.10)}$$

Систему (15.10) можно составить непосредственно по размеченному графу состояний, если руководствоваться **правилом**, согласно которому *слева в уравнениях стоит предельная вероятность данного состояния p_i, умноженная на суммарную интенсивность всех потоков, ведущих из данного состояния, а справа — сумма произведений интенсивностей всех потоков, входящих в i-е состояние, на вероятности тех состояний, из которых эти потоки исходят.*

15.2. Найти предельные вероятности для системы S из задачи **15.1**, граф состояний которой приведен на рис. 15.1, при $\lambda_{01}=1$, $\lambda_{02}=2$, $\lambda_{10}=2$, $\lambda_{13}=2$, $\lambda_{20}=3$, $\lambda_{23}=1$, $\lambda_{31}=3$, $\lambda_{32}=2$.

Решение. Система алгебраических уравнений, описывающих стационарный режим для данной системы, имеет вид (15.10) или

$$\begin{cases} 3p_0 = 2p_1 + 3p_2, \\ 4p_1 = p_0 + 3p_3, \\ 4p_2 = 2p_0 + 2p_3, \\ p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1. \end{cases} \tag{15.11}$$

(Здесь мы вместо одного "лишнего" уравнения системы (15.10) записали нормировочное условие (15.8)).

Решив систему (15.11), получим p_0=0,40, p_1=0,20, p_2=0,27, p_3=0,13, т.е. в предельном, стационарном режиме система S в среднем 40% времени будет находиться в состоянии S_0 (оба узла исправны), 20% — в состоянии S_1 (первый узел ремонтируется, второй работает), 27% — в состоянии S_2 (второй узел ремонтируется, первый работает) и 13% времени — в состоянии S_3 (оба узла ремонтируются).▶

▷ **15.3.** Найти средний чистый доход от эксплуатации в стационарном режиме системы S в условиях задач **15.1** и **15.2**, если известно, что в единицу времени исправная работа первого и второго узлов приносит доход соответственно в 10 и 6 ден.ед., а их ремонт требует затрат соответственно в 4 и 2 ден.ед. Оценить экономическую эффективность имеющейся возможности уменьшения вдвое среднего времени ремонта каждого из двух узлов, если при этом придется вдвое увеличить затраты на ремонт каждого узла (в единицу времени).

Решение. Из задачи **15.2** следует, что в среднем первый узел исправно работает долю времени, равную p_0+p_3=0,40+0,27=0,67, а второй узел — p_0+p_1=0,40+0,20=0,60. В то же время первый узел находится в ремонте в среднем долю времени, равную p_1+p_3=0,20+0,13=0,33, а второй узел — p_2+p_3=0,27+0,13=0,40. Поэтому средний чистый доход в единицу времени от эксплуатации системы, т.е. разность между доходами и затратами, равен

$$Д=0,67\cdot 10+0,60\cdot 6-0,33\cdot 4-0,40\cdot 2=8,18 \text{ ден.ед.}$$

Уменьшение вдвое среднего времени ремонта каждого из узлов в соответствии с (15.6) будет означать увеличение вдвое интенсивностей потока "окончаний ремонтов" каждого узла, т.е. теперь λ_{10}=4, λ_{20}=6, λ_{31}=6, λ_{32}=4 и система линейных алгебраических уравнений (15.10), описывающая стационарный режим системы S, вместе с нормировочным условием (15.8) примет вид[1]:

$$\begin{cases} 3p_0 = 4p_1 + 6p_2, \\ 6p_1 = p_0 + 6p_3, \\ 7p_2 = 2p_0 + 4p_3, \\ p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1. \end{cases}$$

Решив систему, получим $p_0=0{,}60$, $p_1=0{,}15$, $p_2=0{,}20$, $p_3=0{,}05$.

Учитывая, что $p_0+p_2=0{,}60+0{,}20=0{,}80$, $p_0+p_1=0{,}60+0{,}15=0{,}75$, $p_1+p_3=0{,}15+0{,}05=0{,}20$, $p_2+p_3=0{,}20+0{,}05=0{,}25$, а затраты на ремонт первого и второго узла составляют теперь соответственно 8 и 4 ден. ед., вычислим средний чистый доход в единицу времени:

$$Д_1=0{,}80\cdot10+0{,}75\cdot6-0{,}20\cdot8-0{,}25\cdot4=9{,}9 \text{ ден.ед.}$$

Так как $Д_1$ больше Д (примерно на 20%), то экономическая целесообразность ускорения ремонтов узлов очевидна.▶

15.5. Процесс гибели и размножения

В теории массового обслуживания широкое распространение имеет специальный класс случайных процессов — так называемый *процесс гибели и размножения*. Название этого процесса связано с рядом биологических задач, где он является математической моделью изменения численности биологических популяций.

Граф состояний процесса гибели и размножения имеет вид, показанный на рис. 15.4.

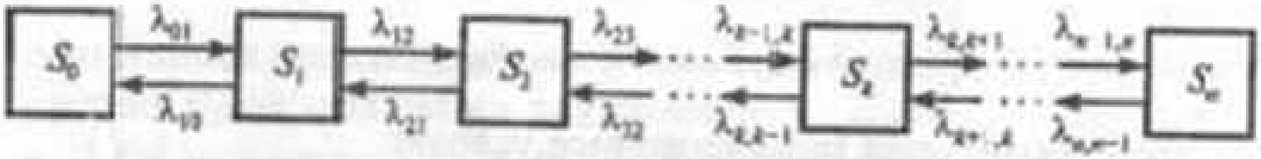

Рис. 15.4

Рассмотрим упорядоченное множество состояний системы S_0, S_1, S_2, ..., S_k. Переходы могут осуществляться из любого со-

[1] При записи системы (15.10) одно "лишнее" уравнение мы исключили.