На графе отсутствуют стрелки из S_0 в S_3 и из S_1 в S_2. Это объясняется тем, что выходы узлов из строя предполагаются независимыми друг от друга и, например, вероятностью одновременного выхода из строя двух узлов (переход из S_0 в S_3) или одновременного окончания ремонтов двух узлов (переход из S_3 в S_0) можно пренебречь.▶

Для математического описания марковского случайного процесса с дискретными состояниями и непрерывным временем, протекающего в СМО, познакомимся с одним из важных понятий теории вероятностей — понятием потока событий.

15.3. Потоки событий

Под *потоком событий* понимается последовательность однородных событий, следующих одно за другим в какие-то случайные моменты времени (например, поток вызовов на телефонной станции, поток отказов ЭВМ, поток покупателей и т.п.).

Поток характеризуется *интенсивностью* λ — частотой появления событий или средним числом событий, поступающих в СМО в единицу времени.

Поток событий называется *регулярным*, если события следуют одно за другим через определенные равные промежутки времени. Например, поток изделий на конвейере сборочного цеха (с постоянной скоростью движения) является регулярным.

Поток событий называется *стационарным*, если его вероятностные характеристики не зависят от времени. В частности, интенсивность стационарного потока есть величина постоянная: $\lambda(t)=\lambda$. Например, поток автомобилей на городском проспекте не является стационарным в течение суток, но этот поток можно считать стационарным в течение суток, скажем, в часы пик. Обращаем внимание на то, что в последнем случае фактическое число проходящих автомобилей в единицу времени (например, в каждую минуту) может заметно отличаться друг от друга, но среднее их число будет постоянно и не будет зависеть от времени.

Поток событий называется *потоком без последействия*, если для любых двух непересекающихся участков времени τ_1 и τ_2 — число событий, попадающих на один из них, не зависит от числа событий, попадающих на другие. Например, поток пассажиров, входящих в метро, практически не имеет последействия. А, скажем, поток покупателей, отходящих с покупками от прилавка, уже имеет последействие (хотя бы потому, что интервал времени между отдельными покупателями не может быть меньше, чем минимальное время обслуживания каждого из них).

Поток событий называется *ординарным*, если вероятность попадания на малый (элементарный) участок времени Δt двух и более событий пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью попадания одного события. Другими словами, поток событий ординарен, если события появляются в нем поодиночке, а не группами. Например, поток поездов, подходящих к станции, ординарен, а поток вагонов не ординарен.

Поток событий называется ***простейшим*** *(или стационарным* ***пуассоновским****), если он одновременно стационарен, ординарен и не имеет последействия.* Название "простейший" объясняется тем, что СМО с простейшими потоками имеет наиболее простое математическое описание. Заметим, что регулярный поток не является "простейшим", так как он обладает последействием: моменты появления событий в таком потоке жестко зафиксированы.

Простейший поток в качестве предельного возникает в теории случайных процессов столь же естественно, как в теории вероятностей нормальное распределение получается в качестве предельного для суммы случайных величин: *при наложении (суперпозиции) достаточно большого числа n независимых, стационарных и ординарных потоков (сравнимых между собой по интенсивностям λ_i $(i=1,2, \ldots, n)$ получается поток, близкий к простейшему с интенсивностью λ, равной сумме интенсивностей входящих потоков*, т.е.

$$\lambda=\sum_{i=1}^{n} \lambda_i .$$

Рассмотрим на оси времени Ot (рис. 15.2) простейший поток событий как неограниченную последовательность случайных точек.

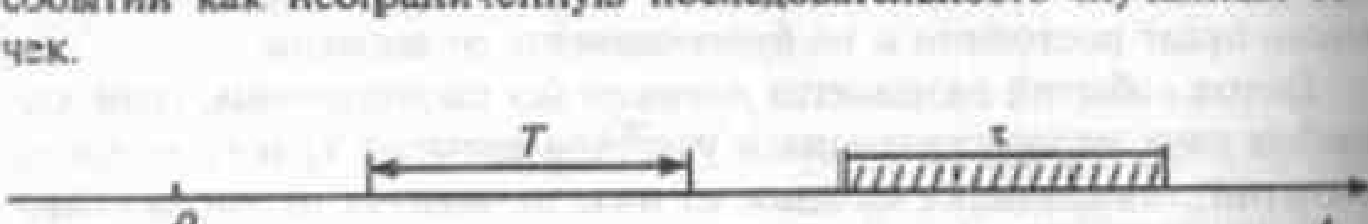

Рис. 15.2

Можно показать (*см.*, например, [3]), что для простейшего потока число m событий (точек), попадающих на произвольный участок времени τ, распределено по *закону Пуассона*

$$P_m(\tau) = \frac{(\lambda\tau)^m}{m!} e^{-\lambda\tau}, \tag{15.1}$$

для которого математическое ожидание случайной величины равно ее дисперсии: $a = \sigma^2 = \lambda\tau$.

В частности, вероятность того, что за время τ не произойдет ни одного события (m=0), равна

$$P_0(\tau) = e^{-\lambda\tau}. \tag{15.2}$$

Найдем распределение интервала времени T между произвольными двумя соседними событиями простейшего потока.

В соответствии с (15.2) вероятность того, что на участке времени длиной t не появится ни одного из последующих событий, равна

$$P(T \geq t) = e^{-\lambda t}, \tag{15.3}$$

а вероятность противоположного события, т.е. функция распределения случайной величины T, есть

$$F(t) = P(T < t) = 1 - e^{-\lambda t}. \tag{15.4}$$

Плотность вероятности случайной величины есть производная ее функции распределения (рис. 15.3), т.е.

$$\varphi(t) = F'(t) = \lambda e^{-\lambda t}. \tag{15.5}$$

Распределение, задаваемое плотностью вероятности (15.5) или функцией распределения (15.4), называется *показательным* (или *экспоненциальным*). Таким образом, интервал времени между двумя соседними произвольными событиями имеет показательное распределение, для которого матема-

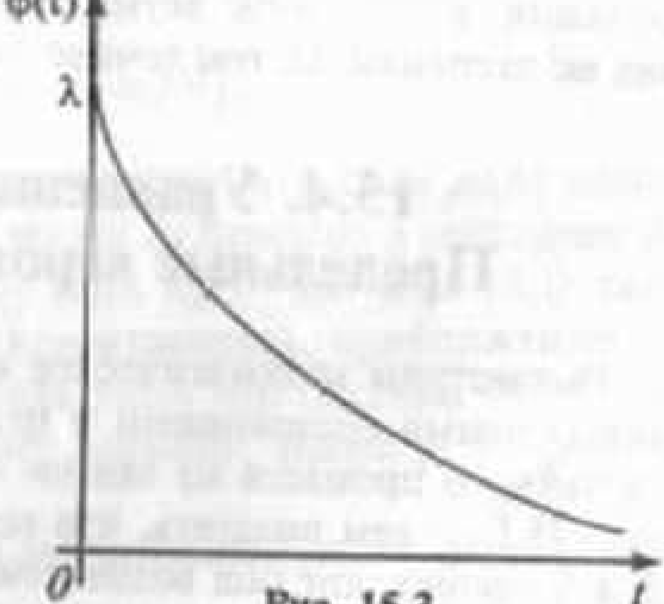

Рис. 15.3

тическое ожидание равно среднему квадратическому отклонению случайной величины

$$a = \sigma = \frac{1}{\lambda} \qquad (15.6)$$

и обратно по величине интенсивности потока λ.

Важнейшее свойство показательного распределения (присущее только показательному распределению) состоит в следующем: если промежуток времени, распределенный по показательному закону, уже длился некоторое время τ, то это никак не влияет на закон распределения оставшейся части промежутка $(T-\tau)$: он будет таким же, как и закон распределения всего промежутка T.

Другими словами, для интервала времени T между двумя последовательными соседними событиями потока, имеющего показательное распределение, любые сведения о том, сколько времени протекал этот интервал, не влияют на закон распределения оставшейся части. Это свойство показательного закона представляет собой, в сущности, другую формулировку для "отсутствия последействия" — основного свойства простейшего потока.

Для простейшего потока с интенсивностью λ вероятность попадания на *элементарный* (*малый*) отрезок времени Δt хотя бы одного события потока равна согласно (15.4)

$$P_{\Delta t} = P(T < \Delta t) = 1 - e^{-\lambda \Delta t} \approx \lambda \Delta t . \qquad (15.7)$$

(Заметим, что эта приближенная формула, получаемая заменой функции $e^{-\lambda \Delta t}$ лишь двумя первыми членами ее разложения в ряд по степеням Δt, тем точнее, чем меньше Δt).

15.4. Уравнения Колмогорова. Предельные вероятности состояний

Рассмотрим математическое описание марковского процесса с дискретными состояниями и непрерывным временем на примере случайного процесса из задачи **15.1**, граф которого изображен на рис. 15.1. Будем полагать, что все переходы системы из состояния S_i в S_j происходят под воздействием простейших потоков событий с интенсивностями λ_{ij} (i, j=0, 1, 2, 3); так, переход системы из состояния S_0 в S_1 будет происходить под воздействием потока отка-