Можно заметить, что среднее время на покупку билетов по второму варианту увеличилось более чем в 2 раза. Такое значительное увеличение связано с тем, что СМО работает на пределе своих возможностей ($\rho = 0{,}9$): достаточно незначительно увеличить среднее время обслуживания $\bar{t}_{об.}$, т.е. уменьшить μ, и ρ превзойдет 1, т.е. очередь начнет неограниченно возрастать.

б. Выше было получено, что по первому варианту продажи билетов при среднем времени обслуживания одного пассажира $\bar{t}_{об.} = 2$ (мин) среднее время на покупку билетов составит $T_{сист._1} = 10{,}5$ (мин). По условию для второго варианта продажи $T_{сист._2} < T_{сист._1}$ или с учетом (15.36) и (15.41): $\dfrac{1}{\lambda}\dfrac{\rho}{1-\rho} < T_{сист._1}$.

Полагая $\rho = \lambda/\mu = \lambda \bar{t}_{об.}$, получим $\dfrac{\bar{t}_{об.}}{1-\lambda\bar{t}_{об.}} < T_{сист._1}$, откуда найдем $\bar{t}_{об.} < \dfrac{T_{сист._1}}{1+\lambda T_{сист._1}}$ или $\bar{t}_{об} < \dfrac{10{,}5}{1+0{,}45\cdot 10{,}5} = 1{,}83$ (мин).

Итак, средние затраты времени на покупку билетов по второму варианту продажи уменьшатся, если среднее время обслуживания одного пассажира уменьшится более чем на 0,17 мин, или более чем на 8,5%.▶

СМО с ограниченной очередью. СМО с ограниченной очередью отличаются от рассмотренных выше задач лишь тем, что число заявок в очереди ограничено (не может превосходить некоторого заданного *m*). Если новая заявка поступает в момент, когда все места в очереди заняты, она покидает СМО необслуженной, т.е. получает отказ.

Очевидно: для вычисления предельных вероятностей состояний и показателей эффективности таких СМО может быть использован тот же подход, что и выше, с той разницей, что суммировать надо не бесконечную прогрессию (как, например, мы делали при выводе формулы (15.33)), а конечную. Соответствующие формулы сведем в табл. 15.3.

Среднее время пребывания заявки в очереди и в системе, как и ранее, определяем по формулам Литтла (15.44) и (15.43).

▶ **15.11.** По условию задачи **15.8** найти показатели эффективности работы причала. Известно, что приходящее судно покидает причал (без разгрузки), если в очереди на разгрузку стоит более 3 судов.

Решение. По условию $m = 3$. Используем формулы, приведенные во второй графе табл. 15.3.

Вероятность того, что причал свободен:

$$p_0 = \frac{1-0,6}{1-0,8^{3+2}} = 0,297.$$

Вероятность того, что приходящее судно покинет причал без разгрузки:

$$P_{отк.} = 0,8^{3+1} \cdot 0,297 = 0,122.$$

Относительная пропускная способность причала:

$$Q = 1 - 0,122 = 0,878.$$

Абсолютная пропускная способность причала $A = 0,4 \cdot 0,878 = 0,351$, т.е. в среднем в сутки разгружается 0,35 судна.

Среднее число судов, ожидающих разгрузку

$$L_{оч.} = \frac{0,8^2\left[1-0,8^3(3+1-3\cdot 0,8)\right]}{(1-0,8^{3+2})(1-0,8)} = 0,861,$$

а среднее время ожидания разгрузки по (15.42)

$$T_{оч.} = \frac{0,861}{0,8} = 1,076 \text{ (сутки)}.$$

Среднее число судов, находящихся у причала

$$L_{сист.} = 0,861 + (1-0,297) = 1,564,$$

а среднее время пребывания судна у причала по (15.41):

$$T_{сист.} = \frac{1,564}{0,8} = 1,955 \text{ (сутки)}. ▶$$

СМО с ограниченным временем ожидания. На практике часто встречаются СМО с так называемыми "нетерпеливыми" заявками. Такие заявки могут уйти из очереди, если время ожидания превышает некоторую величину. В частности, такого рода заявки возникают в различных технологических системах, в которых задержка с началом обслуживания может привести к потере качества продукции, в системах оперативного управления, когда срочные сообщения теряют ценность (или даже смысл), если они не поступают на обслуживание в течение определенного времени.

Таблица 15.3

Показатели	Одноканальная СМО с ограниченной очередью	Многоканальная СМО с ограниченной очередью
Предельные вероятности	$p_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{m+2}}$ $p_1=\rho p_0,\ p_2=\rho^2 p_0,\ \ldots,\ p_k = \rho^k p_0$	$p_0=\left[1+\frac{\rho}{1!}+\ldots+\frac{\rho^n}{n!}+\ldots+\frac{\rho^{n+1}(1-(\rho/n)^m)}{n\cdot n!(1-\rho/n)}\right]^{-1}$ $p_1=\frac{\rho}{1!}p_0,\ldots,p_k=\frac{\rho^k}{k!}p_0,\ldots,p_n=\frac{\rho^n}{n!}p_0,$ $p_{n+1}=\frac{\rho^{n+1}}{n\cdot n!}p_0,\ldots,p_{n+r}=\frac{\rho^{n+r}}{n^r\cdot n!}p_0\ (r=1,\ \ldots,\ m)$
Вероятность отказа	$P_{\text{отк.}} = P_{m+1} = \rho^{m+1}p_0$	$P_{\text{отк.}} = P_{n+m} = \frac{\rho^{n+m}}{n^m\cdot n!}p_0$
Абсолютная пропускная способность	$A = \lambda Q = \lambda(1-\rho^{m+1}p_0)$	$A = \lambda Q = \lambda(1-\frac{\rho^{n+m}}{n^m\cdot n!}p_0)$

Продолжение

Относительная пропускная способность	$Q = 1 - P_{\text{отк.}} = 1 - \rho^{m+1} p_0$	$Q = 1 - P_{\text{отк.}} = 1 - \dfrac{\rho^{n+m}}{n^m \cdot n!} p_0$
Среднее число заявок в очереди	$L_{\text{оч.}} = \rho^2 \dfrac{\left[1 - \rho^m (m + 1 - m\rho)\right]}{(1 - \rho^{m+2})(1 = \rho)}$	$L_{\text{оч.}} = \dfrac{\rho^{n+1} p_0 \left[1 - \left(m + 1 - m\dfrac{\rho}{n}\right)\left(\dfrac{\rho}{n}\right)^m\right]}{n \cdot n! \left(1 - \dfrac{\rho}{n}\right)^2}$
Среднее число заявок под обслуживанием (среднее число занятых каналов)	$L_{\text{об.}} = 1 - p_0$	$\bar{k} = \rho\left(1 - \dfrac{\rho^{n+m}}{n^m \cdot n!} p_0\right)$
Среднее число заявок в системе	$L_{\text{сист.}} = L_{\text{оч.}} + L_{\text{об.}}$	$L_{\text{сист.}} = L_{\text{оч.}} + \bar{k}$

В простейших математических моделях таких систем предполагается, что заявка может находиться в очереди случайное время, распределенное по показательному закону с некоторым параметром ν, т.е. можно условно считать, что каждая заявка, стоящая в очереди на обслуживание, может покинуть систему с интенсивностью ν.

Соответствующие показатели эффективности СМО с ограниченным временем получаются на базе результатов, полученных для процесса гибели и размножения.

В заключение отметим, что на практике часто встречаются *замкнутые* системы обслуживания, у которых входящий поток заявок существенным образом зависит от состояния самой СМО. В качестве примера можно привести ситуацию, когда на ремонтную базу поступают с мест эксплуатации некоторые машины: понятно, что чем больше машин находится в состоянии ремонта, тем меньше их продолжает эксплуатироваться и тем меньше интенсивность потока вновь поступающих на ремонт машин. Для замкнутых СМО характерным является ограниченное число источников заявок, причем каждый источник "блокируется" на время обслуживания его заявки (т.е. он не выдает новых заявок). В подобных системах при конечном числе состояний СМО предельные вероятности будут существовать при любых значениях интенсивностей потоков заявок и обслуживаний. Они могут быть вычислены, если вновь обратиться к процессу гибели и размножения.

15.8. Понятие о статистическом моделировании СМО (методе Монте-Карло)

Основное допущение, при котором анализировались рассмотренные выше СМО, состоит в том, что все потоки событий, переводящие их из состояния в состояние, были простейшими. При нарушении этого требования общих аналитических методов для таких систем не существует. Имеются лишь отдельные результаты, позволяющие выразить в аналитическом виде характеристики СМО через параметры задачи.

В случаях, когда для анализа работы СМО аналитические методы не применимы (или же требуется проверить их точность), используют универсальный *метод статистического моделирования*, или, как его называют, *метод Монте-Карло*.

Идея метода Монте-Карло состоит в том, что вместо аналитического описания СМО производится "розыгрыш" случайного процесса, проходящего в СМО, с помощью специально организованной процедуры. В результате такого "розыгрыша" получается каждый раз новая, отличная от других реализация случайного процесса. Это множество реализаций можно использовать как некий искусственно полученный статистический материал, который обрабатывается обычными методами математической статистики. После такой обработки могут быть получены приближенно любые характеристики обслуживания.

Например, необходимо проанализировать очереди, возникающие в магазине, для решения вопроса о расширении магазина. Время подхода покупателей и время их обслуживания носят случайный характер, и их распределения могут быть установлены по имеющейся информации. В результате взаимодействия этих случайных процессов создается очередь.

Согласно методу Монте-Карло перебирают (с помощью ЭВМ) все возможные состояния системы с различным числом покупателей в час, временем их обслуживания и т.п., сохраняя те же характеристики распределения. В результате многократного искусственного воссоздания работы магазина рассчитывают характеристики обслуживания, как если бы они были получены при наблюдении над реальным потоком покупателей.

При моделировании случайных явлений методом Монте-Карло мы пользуемся самой случайностью как аппаратом исследования. Заметим, что для сложных систем обслуживания с немарковским случайным процессом метод статистического моделирования, как правило, оказывается проще аналитического.