По формуле (15.36) среднее число судов, находящихся у причала, $L_{сист.} = 0,8/(1-0,8) = 4$ (сутки) (или проще по (15.37) $L_{сист.} = 3,2+0,8 = 4$ (сутки), а среднее время пребывания судна у причала по формуле (15.41) $T_{сист.} = 4/0,8 = 5$ (сутки).

Очевидно, что эффективность разгрузки судов невысокая. Для ее повышения необходимо уменьшение среднего времени разгрузки судна $\bar{t}_{об.}$ либо увеличение числа причалов n. ▶

Многоканальная СМО с неограниченной очередью. Рассмотрим задачу. Имеется n-канальная СМО с неограниченной очередью. Поток заявок, поступающих в СМО, имеет интенсивность λ, а поток обслуживаний — интенсивность μ. Необходимо найти предельные вероятности состояний СМО и показатели ее эффективности.

Система может находиться в одном из состояний $S_0, S_1, S_2, \ldots, S_k, \ldots, S_n, \ldots$, нумеруемых по числу заявок, находящихся в СМО: S_0 — в системе нет заявок (все каналы свободны); S_1 — занят один канал, остальные свободны; S_2 — заняты два канала, остальные свободны; ..., S_k — занято k каналов, остальные свободны; ..., S_n — заняты все n каналов (очереди нет); S_{n+1} — заняты все n каналов, в очереди одна заявка; ..., S_{n+r} — заняты все n каналов, r заявок стоит в очереди, ...

Граф состояний системы показан на рис. 15.9. Обратим внимание на то, что в отличие от предыдущей СМО, интенсивность потока обслуживаний (переводящего систему из одного состояния в другое справа налево) не остается постоянной, а по мере увеличения числа заявок в СМО от 0 до n увеличивается от величины μ до $n\mu$, так как соответственно увеличивается число каналов обслуживания. При числе заявок в СМО большем, чем n, интенсивность потока обслуживаний сохраняется равной $n\mu$.

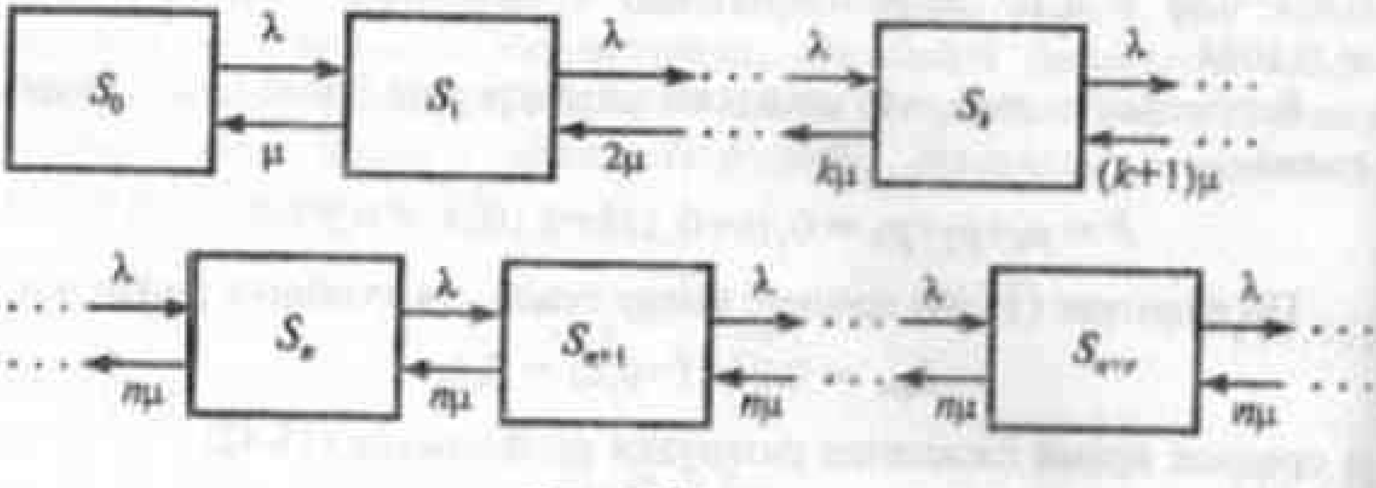

Рис. 15.9

Можно показать, что при $\rho/n < 1$ предельные вероятности существуют. Если $\rho/n \geq 1$, очередь растет до бесконечности. Используя формулы (15.16) и (15.17) для процесса гибели и размножения, можно получить следующие формулы для предельных вероятностей состояний n-канальной СМО с неограниченной очередью

$$p_0 = \left(1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \ldots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)}\right)^{-1}, \tag{15.45}$$

$$p_1 = \frac{\rho}{1!} p_0, \ldots, p_k = \frac{\rho^k}{k!} p_0, \ldots, p_n = \frac{\rho^n}{n!} p_0, \tag{15.46}$$

$$p_{n+1} = \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} p_0, \ldots, p_{n+r} = \frac{\rho^{n+r}}{n^r \cdot n!} p_0, \ldots \tag{15.47}$$

Вероятность того, что заявка окажется в очереди,

$$P_{\text{оч.}} = \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)} p_0. \tag{15.48}$$

Для n-канальной СМО с неограниченной очередью, используя прежние приемы, можно найти:

среднее число занятых каналов

$$\bar{k} = \frac{\lambda}{\mu} = \rho, \tag{15.49}$$

среднее число заявок в очереди

$$L_{\text{оч.}} = \frac{\rho^{n+1} p_0}{n \cdot n! \left(1 - \frac{\rho}{n}\right)^2}, \tag{15.50}$$

среднее число заявок в системе

$$L_{\text{сист.}} = L_{\text{оч.}} + \rho. \tag{15.51}$$

Среднее время пребывания заявки в очереди и среднее время пребывания заявки в системе, как и ранее, находятся по формулам Литтла (15.42) и (15.41).

Замечание. Для СМО с неограниченной очередью при $\rho < 1$ любая заявка, пришедшая в систему, будет обслужена, т.е. вероятность отказа $P_{отк.} = 0$, относительная пропускная способность $Q = 1$, а абсолютная пропускная способность равна интенсивности входящего потока заявок, т.е. $A = \lambda$.

15.9. В универсаме к узлу расчета поступает поток покупателей с интенсивностью $\lambda = 81$ чел. в час. Средняя продолжительность обслуживания контролером-кассиром одного покупателя $\bar{t}_{об.} = 2$ мин. Определить:

а. Минимальное количество контролеров-кассиров n_{min}, при котором очередь не будет расти до бесконечности, и соответствующие характеристики обслуживания при $n=n_{min}$.

б. Оптимальное количество $n_{опт.}$ контролеров-кассиров, при котором относительная величина затрат $C_{отн.}$, связанная с издержками на содержание каналов обслуживания и с пребыванием в очереди покупателей, задаваемая, например, как $C_{отн} = \frac{1}{\lambda} n + 3T_{оч.}$, будет минимальна, и сравнить характеристики обслуживания при $n=n_{min}$ и $n=n_{опт.}$.

в. Вероятность того, что в очереди будет не более трех покупателей.

Решение. **а.** По условию $\lambda = 81(1/ч) = 81/60 = 1,35$ (1/мин.). По формуле (15.24) $\rho = \lambda/\mu = \lambda \bar{t}_{об.} = 1,35 \cdot 2 = 2,7$. Очередь не будет возрастать до бесконечности при условии $\rho/n < 1$, т.е. при $n > \rho = 2,7$. Таким образом, минимальное количество контролеров-кассиров $n_{min} = 3$.

Найдем характеристики обслуживания СМО при $n = 3$.

Вероятность того, что в узле расчета отсутствуют покупатели, по формуле (15.45) $p_0 = (1+2,7+2,7^2/2!+2,7^3/3!+2,7^4/3!(3-2,7))^{-1} = 0,025$, т.е. в среднем 2,5% времени контролеры-кассиры будут простаивать.

Вероятность того, что в узле расчета будет очередь, по (15.48)

$$P_{оч.} = (2,7^4/3!(3-2,7))0,025 = 0,735.$$

Среднее число покупателей, находящихся в очереди, по (15.50)

$$L_{оч.} = (2,7^4/3 \cdot 3!(1-2,7/3)^2)0,025 = 7,35.$$

Среднее время ожидания в очереди по (15.42)

$$T_{оч.} = 7,35/1,35 = 5,44 \text{ (мин)}.$$

Среднее число покупателей в узле расчета по (15.51)

$$L_{сист.} = 7{,}35+2{,}7 = 10{,}05.$$

Среднее время нахождения покупателей в узле расчета по (15.41)

$$T_{сист.} = 10{,}05/1{,}35 = 7{,}44 \text{ (мин)}.$$

Среднее число контролеров-кассиров, занятых обслуживанием покупателей, по (15.49) $\bar{k} = 2{,}7$.

Коэффициент (доля) занятых обслуживанием контролеров-кассиров

$$\bar{k} = \rho/n = 2{,}7/3 = 0{,}9.$$

Абсолютная пропускная способность узла расчета $A = 1{,}35$ (1/мин), или 81 (1/ч), т.е. 81 покупатель в час.

Анализ характеристик обслуживания свидетельствует о значительной перегрузке узла расчета при наличии трех контролеров-кассиров.

б. Относительная величина затрат при $n = 3$

$$C_{отн.} = \frac{1}{\lambda} n + 3T_{оч.} = 3/1{,}35+3\cdot 5{,}44 = 18{,}54.$$

Рассчитаем относительную величину затрат при других значениях n (табл. 15.2).

Таблица 15.2

Характеристика обслуживания	Число контролеров-кассиров				
	3	4	5	6	7
Вероятность простоя контролеров-кассиров p_0	0,025	0,057	0,065	0,067	0,067
Среднее число покупателей в очереди $T_{оч.}$	5,44	0,60	0,15	0,03	0,01
Относительная величина затрат $C_{отн.}$	18,54	4,77	4,14	4,53	5,22

Как видно из табл. 15.2, минимальные затраты получены при $n = \kappa_{опт.} = 5$ контролерах-кассирах.

Определим характеристики обслуживания узла расчета при $n = n_{\text{опт.}} = 5$. Получим $P_{\text{оч.}} = 0{,}091$; $L_{\text{оч.}} = 0{,}198$; $T_{\text{оч.}} = 0{,}146$ (мин); $L_{\text{сист.}} = 2{,}90$; $T_{\text{сист.}} = 2{,}15$ (мин); $\bar{k} = 2{,}7$; $k_3 = 0{,}54$.

Как видим, при $n = 5$ по сравнению с $n = 3$ существенно уменьшились вероятность возникновения очереди $P_{\text{оч.}}$, длина очереди $L_{\text{оч.}}$ и среднее время пребывания в очереди $T_{\text{оч.}}$ и соответственно среднее число покупателей $L_{\text{сист.}}$ и среднее время нахождения в узле расчета $T_{\text{сист.}}$, а также доля занятых обслуживанием контролеров k_3. Но среднее число занятых обслуживанием контролеров-кассиров $\bar{k}$ и абсолютная пропускная способность узла расчета A естественно не изменились.

в. Вероятность того, что в очереди будет не более 3 покупателей, определится как

$$P(r \le 3) = \underbrace{p_1+p_2+p_3+p_4+p_5}_{\substack{\text{(когда заняты от 1} \\ \text{до 5 контролеров-кассиров)}}} + \underbrace{p_{5+1}+p_{5+2}+p_{5+3}}_{\substack{\text{(когда в очереди} \\ \text{стоят от 1 до 3 покупателей)}}} =$$

$= 1 - P_{\text{оч.}} + p_{5+1} + p_{5+2} + p_{5+3}$, где каждое слагаемое найдем по формулам (15.45)—(15.48). Получим при $n = 5$:

$$P(r \le 3) = 1 - \frac{2{,}7^6}{5!(5-2{,}3)}0{,}065 + \frac{2{,}7^6}{5 \cdot 5!}0{,}065 +$$

$$+ \frac{2{,}7^7}{5^2 \cdot 5!}0{,}065 + \frac{2{,}7^8}{5^3 \cdot 5!}0{,}065 = 0{,}986.$$

(Заметим, что в случае $n=3$ контролеров-кассиров та же вероятность существенно меньше: $P(r \le 3)=0{,}464$).▶

15.10. Железнодорожная касса с двумя окошками продает билеты в два пункта A и B. Интенсивность потока пассажиров, желающих купить билеты, для обоих пунктов одинакова: $\lambda_A = \lambda_B = 0{,}45$ (пассажиров в минуту). На обслуживание пассажиров кассир тратит в среднем 2 мин. Рассматриваются два варианта продажи билетов: первый — билеты продаются в одной кассе с двумя окошками одновременно в оба пункта A и B, второй — билеты продаются в двух специализированных кассах (по одному окошку в каждой), одна только в пункт A, другая — только в пункт B. Необходимо:

а. Сравнить два варианта продажи билетов по основным характеристикам обслуживания.

6. Определить, как надо изменить среднее время обслуживания одного пассажира, чтобы по второму варианту продажи пассажиры затрачивали на приобретение билетов в среднем меньше времени, чем по первому варианту.

Решение. а. По **первому варианту** имеем двухканальную СМО, на которую поступает поток заявок интенсивностью $\lambda = 0,45+0,45 = 0,9$; интенсивность потока обслуживаний $\mu = 1/2 = 0,5$; $\rho = \lambda/\mu = 1,8$. Так как $\rho/n = 1,8/2 = 0,9 < 1$, то предельные вероятности существуют.

Вероятность простоя двух кассиров по (15.45)

$$p_0 = \left(1 + \frac{1,8}{1!} + \frac{1,8^2}{2!} + \frac{1,8^3}{2!(2-1,8)}\right)^{-1} = 0,0526.$$

Среднее число пассажиров в очереди по (15.50)

$$L_{оч.} = 1,8^3/2\cdot2!(1-1,8/2)\cdot0,0526 = 7,67.$$

Среднее число пассажиров у кассы по (15.51)

$$L_{сист.} = 7,67+1,8 = 9,47.$$

Среднее время на ожидание в очереди и покупку билетов равно соответственно (по формулам (15.42) и (15.41)): $T_{оч.} = 7,67/0,9 = 8,52$ (мин) и $T_{сист.} = 9,47/0,9 = 10,5$ (мин).

По второму варианту имеем две одноканальные СМО (два специализированных окошка); на каждую поступает поток заявок с интенсивностью $\lambda = 0,45$. По-прежнему $\mu = 0,5$; $\rho = \lambda/\mu = 0,9 < 1$, предельные вероятности существуют. По формулам (15.40), (15.36), (15.42), (15.41)

$$L_{оч.} = 0,9^2/(1-0,9) = 8,1;\ L_{сист.} = 0,9/(1-0,9) = 9,0;$$

$$T_{оч.} = 8,1/0,45 = 18,0 \text{ (мин)},\ T_{сист.} = 9,0/0,45 = 20,0 \text{ (мин)}.$$

Итак, по второму варианту увеличились и длина очереди, и среднее время ожидания в ней и в целом на покупку билетов. Такое различие объясняется тем, что в первом варианте (двухканальная СМО) меньше средняя доля времени, которую простаивает каждый из двух кассиров: если он не занят обслуживанием пассажира, покупающего билет в пункт *A*, он может заняться обслуживанием пассажира, покупающего билет в пункт *B*, и наоборот. Во втором варианте такой взаимозаменяемости нет.

Можно заметить, что среднее время на покупку билетов по второму варианту увеличилось более чем в 2 раза. Такое значительное увеличение связано с тем, что СМО работает на пределе своих возможностей ($\rho = 0{,}9$): достаточно незначительно увеличить среднее время обслуживания $\bar{t}_{об.}$, т.е. уменьшить μ, и ρ превзойдет 1, т.е. очередь начнет неограниченно возрастать.

б. Выше было получено, что по первому варианту продажи билетов при среднем времени обслуживания одного пассажира $\bar{t}_{об.} = 2$ (мин) среднее время на покупку билетов составит $T_{сист._1} = 10{,}5$ (мин). По условию для второго варианта продажи

$T_{сист._2} < T_{сист._1}$ или с учетом (15.36) и (15.41): $\frac{1}{\lambda}\frac{\rho}{1-\rho} < T_{сист._1}$.

Полагая $\rho = \lambda/\mu = \lambda\bar{t}_{об.}$, получим $\frac{\bar{t}_{об.}}{1-\lambda\bar{t}_{об.}} < T_{сист._1}$, откуда

найдем $\bar{t}_{об.} < \frac{T_{сист._1}}{1+\lambda T_{сист._1}}$ или $\bar{t}_{об} < \frac{10{,}5}{1+0{,}45\cdot 10{,}5} = 1{,}83$ (мин).

Итак, средние затраты времени на покупку билетов по второму варианту продажи уменьшатся, если среднее время обслуживания одного пассажира уменьшится более чем на 0,17 мин, или более чем на 8,5%.▶

СМО с ограниченной очередью. СМО с ограниченной очередью отличаются от рассмотренных выше задач лишь тем, что число заявок в очереди ограничено (не может превосходить некоторого заданного m). Если новая заявка поступает в момент, когда все места в очереди заняты, она покидает СМО необслуженной, т.е. получает отказ.

Очевидно: для вычисления предельных вероятностей состояний и показателей эффективности таких СМО может быть использован тот же подход, что и выше, с той разницей, что суммировать надо не бесконечную прогрессию (как, например, мы делали при выводе формулы (15.33)), а конечную. Соответствующие формулы сведем в табл. 15.3.

Среднее время пребывания заявки в очереди и в системе, как и ранее, определяем по формулам Литтла (15.44) и (15.43).

▶ **15.11.** По условию задачи **15.8** найти показатели эффективности работы причала. Известно, что приходящее судно покидает причал (без разгрузки), если в очереди на разгрузку стоит более 3 судов.