не принимается, и предприятие вынуждено обратиться в другой вычислительный центр. Среднее время работы с одним заказом составляет 3 ч. Интенсивность потока заявок 0,25 (1/ч). Найти предельные вероятности состояний и показатели эффективности работы вычислительного центра.

Решение. По условию $n=3$, $\lambda=0{,}25$ (1/ч), $\bar{t}_{об.}=3$ (ч). Интенсивность потока обслуживаний $\mu=1/\bar{t}_{об.}=1/3=0{,}33$. Интенсивность нагрузки ЭВМ по формуле (15.24) $\rho=0{,}25/0{,}33=0{,}75$. Найдем предельные вероятности состояний:

по формуле (15.25) $p_0=(1+0{,}75+0{,}75^2/2!+0{,}75^3/3!)^{-1}=0{,}476$;

по формуле (15.26) $p_1=0{,}75\cdot0{,}476=0{,}357$; $p_2=(0{,}75^2/2!)\cdot0{,}476=0{,}134$; $p_3=(0{,}75^3/3!)\cdot0{,}476=0{,}033$, т.е. в стационарном режиме работы вычислительного центра в среднем 47,6% времени нет ни одной заявки, 35,7% — имеется одна заявка (занята одна ЭВМ), 13,4% — две заявки (две ЭВМ), 3,3% времени — три заявки (заняты три ЭВМ).

Вероятность отказа (когда заняты все три ЭВМ), таким образом, $P_{отк.}=p_3=0{,}033$.

По формуле (15.28) относительная пропускная способность центра $Q = 1-0{,}033 = 0{,}967$, т.е. в среднем из каждых 100 заявок вычислительный центр обслуживает 96,7 заявок.

По формуле (15.29) абсолютная пропускная способность центра $A = 0{,}25\cdot0{,}967 = 0{,}242$, т.е. в один час в среднем обслуживается 0,242 заявки.

По формуле (15.30) среднее число занятых ЭВМ $\bar{k} = 0{,}242/0{,}33 = 0{,}725$, т.е. каждая из трех ЭВМ будет занята обслуживанием заявок в среднем лишь на 72,5/3 = 24,2%.

При оценке эффективности работы вычислительного центра необходимо сопоставить доходы от выполнения заявок с потерями от простоя дорогостоящих ЭВМ (с одной стороны, у нас высокая пропускная способность СМО, а с другой стороны — значительный простой каналов обслуживания) и выбрать компромиссное решение.▶

15.7. СМО с ожиданием (очередью)

В качестве показателей эффективности СМО с ожиданием, кроме уже известных показателей — абсолютной A и относительной Q пропускной способности, вероятности отказа $P_{отк.}$, среднего числа занятых каналов $\bar{k}$ (для многоканальной системы) будем рассматривать также следующие: $L_{\text{сист.}}$ — *среднее число заявок в системе*; $T_{\text{сист.}}$ — *среднее время пребывания заявки в системе*; $L_{\text{оч.}}$ — *среднее число заявок в очереди* (*длина очереди*); $T_{\text{оч.}}$ — *среднее время пребывания заявки в очереди*; $P_{\text{зан.}}$ — *вероятность того, что канал занят* (*степень загрузки канала*).

Одноканальная система с неограниченной очередью. На практике часто встречаются одноканальные СМО с неограниченной очередью (например, телефон-автомат с одной будкой). Рассмотрим задачу.

Имеется одноканальная СМО с очередью, на которую не наложены никакие ограничения (ни по длине очереди, ни по времени ожидания). Поток заявок, поступающих в СМО, имеет интенсивность λ, а поток обслуживаний — интенсивность μ. Необходимо найти предельные вероятности состояний и показатели эффективности СМО.

Система может находиться в одном из состояний $S_0, S_1, S_2, ..., S_k$, по числу заявок, находящихся в СМО: S_0 — канал свободен; S_1 — канал занят (обслуживает заявку), очереди нет; S_2 — канал занят, одна заявка стоит в очереди; ... S_k — канал занят, $(k-1)$ заявок стоят в очереди и т.д.

Граф состояний СМО представлен на рис. 15.8.

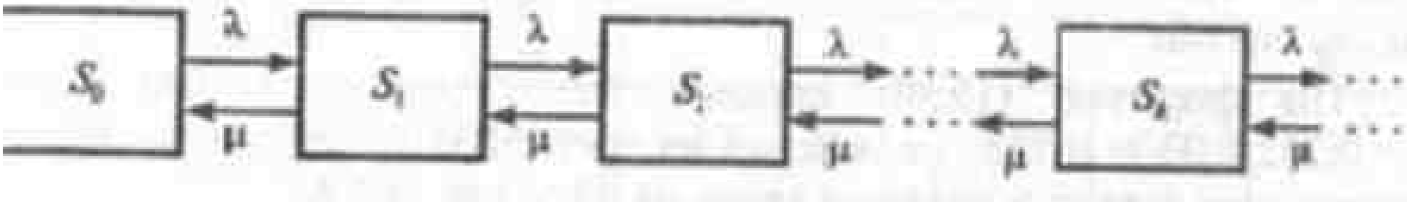

Рис. 15.8

Это процесс гибели и размножения, но с бесконечным числом состояний, в котором интенсивность потока заявок равна λ, а интенсивность потока обслуживаний μ.

Прежде чем записать формулы предельных вероятностей, необходимо быть уверенным в их существовании, ведь в случае, когда время $t \to \infty$, очередь может неограниченно возрастать. Доказано, что *если* $\rho < 1$, *т.е. среднее число приходящих заявок меньше среднего числа обслуженных заявок (в единицу времени), то предельные вероятности существуют. Если* $\rho \geq 1$, *очередь растет до бесконечности.*

Для определения предельных вероятностей состояний воспользуемся формулами (15.16), (15.17) для процесса гибели и размножения (здесь мы допускаем известную нестрогость, так как ранее эти формулы были получены для случая конечного числа состояний системы). Получим:

$$p_0 = \left[1 + \frac{\lambda}{\mu} + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k + \ldots\right]^{-1} =$$

$$= \left(1 + \rho + \rho^2 + \ldots + \rho^k + \ldots\right)^{-1}. \qquad (15.32)$$

Так как предельные вероятности существуют лишь при $\rho < 1$, то геометрический ряд со знаменателем $\rho < 1$, записанный в скобках в формуле (15.32), сходится к сумме, равной $\frac{1}{1-\rho}$. Поэтому

$$p_0 = 1 - \rho, \qquad (15.33)$$

и с учетом соотношений (15.17)

$$p_1 = \rho p_0,\ p_2 = \rho^2 p_0,\ \ldots,\ p_k = \rho^k p_0,\ \ldots$$

найдем предельные вероятности других состояний

$$p_1 = \rho(1-\rho),\ p_2 = \rho^2(1-\rho),\ \ldots,\ p_k = \rho^k(1-\rho),\ \ldots. \qquad (15.34)$$

Предельные вероятности $p_0, p_1, p_2, \ldots, p_k, \ldots$ образуют убывающую геометрическую прогрессию со знаменателем $\rho < 1$, следовательно, вероятность p_0 — наибольшая. Это означает, что если СМО справляется с потоком заявок (при $\rho < 1$), то наиболее вероятным будет отсутствие заявок в системе.

Среднее число заявок в системе $L_{\text{сист.}}$ определим по формуле математического ожидания, которая с учетом (15.34) примет вид

$$L_{\text{сист.}} = \sum_{k=1}^{\infty} k p_k = (1-\rho) \sum_{k=1}^{\infty} k \rho^k \qquad (15.35)$$

(суммирование от 1 до ∞, так как нулевой член $0 p_0 = 0$).

Можно показать, что формула (15.35) преобразуется (при $\rho < 1$) к виду

$$L_{\text{сист.}} = \frac{\rho}{1-\rho}. \tag{15.36}$$

Найдем среднее число заявок в очереди $L_{\text{оч}}$. Очевидно, что

$$L_{\text{оч.}} = L_{\text{сист.}} - L_{\text{об.}}, \tag{15.37}$$

где $L_{\text{об.}}$ — среднее число заявок, находящихся под обслуживанием.

Среднее число заявок под обслуживанием определим по формуле математического ожидания числа заявок под обслуживанием, принимающего значения 0 (если канал свободен) либо 1 (если канал занят):

$$L_{\text{об.}} = 0 \cdot p_0 + 1(1-p_0),$$

т.е. среднее число заявок под обслуживанием равно вероятности того, что канал занят:

$$L_{\text{об.}} = P_{\text{зан.}} = 1 - p_0. \tag{15.38}$$

В силу (15.33)

$$L_{\text{об.}} = P_{\text{зан.}} = \rho. \tag{15.39}$$

Теперь по формуле (15.37) с учетом (15.36) и (15.39)

$$L_{\text{оч.}} = \frac{\rho^2}{1-\rho}. \tag{15.40}$$

Доказано, что *при любом характере потока заявок, при любом распределении времени обслуживания, при любой дисциплине обслуживания среднее время пребывания заявки в системе (очереди) равно среднему числу заявок в системе (в очереди), деленному на интенсивность потока заявок*, т.е.

$$T_{\text{сист.}} = \frac{1}{\lambda} L_{\text{сист.}}, \tag{15.41}$$

$$T_{\text{оч.}} = \frac{1}{\lambda} L_{\text{оч.}}. \tag{15.42}$$

Формулы (15.41) и (15.42) называются *формулами Литтла*. Они вытекают из того, что *в предельном, стационарном режиме среднее число заявок, прибывающих в систему, равно среднему числу заявок, покидающих ее*: оба потока заявок имеют одну и ту же интенсивность λ.

На основании формул (15.41) и (15.42) с учетом (15.36) и (15.40) среднее время пребывания заявки в системе определится по формуле:

$$T_{\text{сист.}}=\frac{\rho}{\lambda(1-\rho)}\ , \tag{15.43}$$

а среднее время пребывания заявки в очереди —

$$T_{\text{оч.}}=\frac{\rho^2}{\lambda(1-\rho)}\,. \tag{15.44}$$

▷ **15.8.** В порту имеется один причал для разгрузки судов. Интенсивность потока судов равна 0,4 (судов в сутки). Среднее время разгрузки одного судна составляет 2 суток. Предполагается, что очередь может быть неограниченной длины. Найти показатели эффективности работы причала, а также вероятность того, что ожидают разгрузки не более чем 2 судна.

Решение. Имеем $\rho = \lambda/\mu = \lambda \bar{T}_{\text{об.}} = 0{,}4\cdot 2 = 0{,}8$. Так как $\rho = 0{,}8 < 1$, то очередь на разгрузку не может бесконечно возрастать и предельные вероятности существуют. Найдем их.

Вероятность того, что причал свободен, по (15.33) $p_0 = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$, а вероятность того, что он занят, $P_{\text{зан.}} = 1-0{,}2 = 0{,}8$. По формуле (15.34) вероятности того, что у причала находятся 1, 2, 3 судна (т.е. ожидают разгрузки 0, 1, 2 судна), равны: $p_1 = 0{,}8(1-0{,}8) = 0{,}16$; $p_2 = 0{,}8^2\cdot(1-0{,}8) = 0{,}128$; $p_3 = 0{,}8^3\cdot(1-0{,}8) = 0{,}1024$.

Вероятность того, что ожидают разгрузку не более чем 2 судна, равна

$$P = p_1+p_2+p_3 = 0{,}16+0{,}128+0{,}1024 = 0{,}3904.$$

По формуле (15.40) среднее число судов, ожидающих разгрузки,

$$L_{\text{оч.}} = 0{,}8^2/(1-0{,}8) = 3{,}2,$$

а среднее время ожидания разгрузки по формуле (15.42)

$$T_{\text{оч.}} = 3{,}2/0{,}8 = 4 \text{ (сутки)}.$$

По формуле (15.36) среднее число судов, находящихся у причала, $L_{сист.} = 0{,}8/(1-0{,}8) = 4$ (сутки) (или проще по (15.37) $L_{сист.} = 3{,}2+0{,}8 = 4$ (сутки), а среднее время пребывания судна у причала по формуле (15.41) $T_{сист.} = 4/0{,}8 = 5$ (сутки).

Очевидно, что эффективность разгрузки судов невысокая. Для ее повышения необходимо уменьшение среднего времени разгрузки судна $\bar{t}_{об.}$ либо увеличение числа причалов n.▶

Многоканальная СМО с неограниченной очередью. Рассмотрим задачу. Имеется n-канальная СМО с неограниченной очередью. Поток заявок, поступающих в СМО, имеет интенсивность λ, а поток обслуживаний — интенсивность μ. Необходимо найти предельные вероятности состояний СМО и показатели ее эффективности.

Система может находиться в одном из состояний $S_0, S_1, S_2, \ldots, S_k, \ldots, S_n, \ldots$, нумеруемых по числу заявок, находящихся в СМО: S_0 — в системе нет заявок (все каналы свободны); S_1 — занят один канал, остальные свободны; S_2 — заняты два канала, остальные свободны; ..., S_k — занято k каналов, остальные свободны; ..., S_n — заняты все n каналов (очереди нет); S_{n+1} — заняты все n каналов, в очереди одна заявка; ..., S_{n+r} — заняты все n каналов, r заявок стоит в очереди, ...

Граф состояний системы показан на рис. 15.9. Обратим внимание на то, что в отличие от предыдущей СМО, интенсивность потока обслуживаний (переводящего систему из одного состояния в другое справа налево) не остается постоянной, а по мере увеличения числа заявок в СМО от 0 до n увеличивается от величины μ до $n\mu$, так как соответственно увеличивается число каналов обслуживания. При числе заявок в СМО большем, чем n, интенсивность потока обслуживаний сохраняется равной $n\mu$.

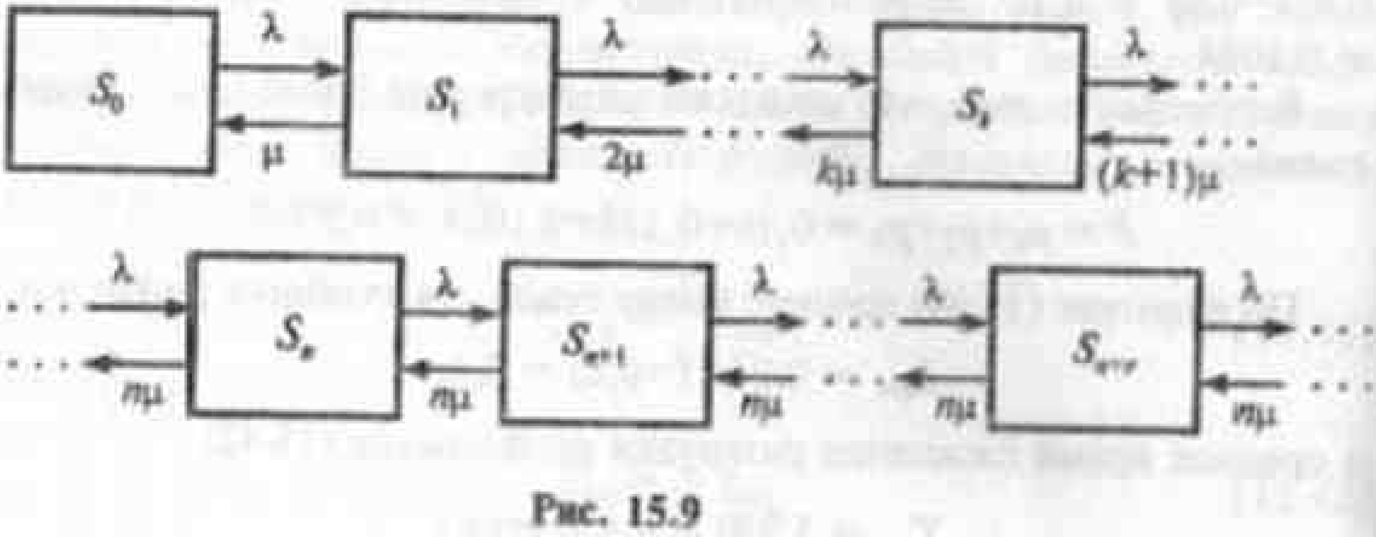

Рис. 15.9