Модель №1

18. ПРИМЕНЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ И МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА В ЭКОНОМИКЕ

18.1. Применение аналитической геометрии

Линейная модель амортизации. Существуют различные модели начисления амортизации на купленное предприятием оборудование. Наиболее простая из них — линейная модель. Пользуясь этой моделью, предприятие относит стоимость купленного оборудования на затраты производства равными долями. Если известны начальная стоимость оборудования P, остаточная стоимость S и срок службы T, то ежегодная амортизация

$$a = \frac{P - S}{T}.$$

Стоимость оборудования после t лет эксплуатации

$$V = P - \frac{P - S}{t} = P - at.$$

Последнее уравнение определяет прямую линию.

18.3. Предприятие купило автомобиль стоимостью 24 тыс. руб. Ежегодная норма амортизации составляет 10% от цены покупки. Написать уравнение, определяющее стоимость автомобиля в зависимости от времени t, построить график. Найти стоимость автомобиля: а) через 5 лет; б) через 6 лет и 3 месяца.

18.4. Фирма купила четыре одинаковых компьютера. Первоначальная стоимость каждого компьютера составляет 3000 руб., остаточная — 200 руб. Срок жизни компьютера по норме — 4 года. Через 2 года компьютеры были проданы по цене 1800 руб. каждый. Построить график функции, определяющей стоимость четырех компьютеров в зависимости от времени t. Какую прибыль получило предприятие после продажи?

18.5. Цена телевизора 1000 руб., остаточная стоимость равна нулю, а срок службы составляет 5 лет. Построить график функции, определяющей стоимость телевизора в зависимости от времени t. За сколько нужно продать телевизор после трех с половиной лет эксплуатации, чтобы получить прибыль 100 руб.?

18.6. Станок был куплен за 12 тыс. руб. По нормам его остаточная стоимость равна нулю, а срок службы составляет 8 лет. Написать уравнение, определяющее стоимость станка в зависимости от времени t, построить график. Найти стоимость станка через 7 лет и 3 месяца эксплуатации.

18.7. Маша купила автомобиль за 60 тыс. руб., чтобы ездить на работу. Норма амортизации составляет 12% от первоначальной стоимости. Написать уравнение, определяющее стоимость автомобиля в зависимости от времени t. Поскольку транспортное средство используется для поездок на работу, Маше разрешили вычитать его годовую амортизацию из суммы, подлежащей обложению подоходным налогом. Какую сумму Маша будет экономить ежемесячно, если подоходный налог составляет 20%?

18.8. Газовая плита была куплена за 800 руб. Амортизация начисляется линейно и составляет 15% в год от первоначальной стоимости.

Найти:

а) стоимость газовой плиты через t лет;

б) стоимость газовой плиты через 6 лет после начала эксплуатации;

в) срок службы плиты.

18.9. Газовая плита была куплена за 800 руб. Амортизация начисляется ежегодно по норме 15% в год от последней стоимости газовой плиты (нелинейная модель).

Найти:

а) стоимость газовой плиты через t лет;

б) стоимость плиты через 6 лет после начала эксплуатации;

в) срок службы газовой плиты, если ее остаточная стоимость равна 50 руб.

18.10. Станок был куплен за 10 тыс. руб., его остаточная стоимость — 300 руб. Определить срок службы станка, если:

а) амортизация начисляется ежегодно из расчета 10% от последней стоимости станка;

б) норма амортизации составляет 10% от первоначальной стоимости.

Модель №2

Линейная модель издержек. Точка безубыточности. При производстве x единиц любой продукции *совокупные издержки (затраты)* $C(x)$ состоят из двух слагаемых — постоянных (фиксированных) и переменных издержек:

$$C(x) = F + V.$$

Постоянные издержки F — это издержки, не зависящие от числа единиц произведенной продукции. Они включают в себя амортизацию, аренду помещения, проценты по займам и т.п.

Переменные издержки V — это издержки, напрямую зависящие от количества произведенной продукции. Они включают в себя стоимость сырья, рабочей силы и т.п.

В простейшем случае переменные издержки прямо пропорциональны x — количеству произведенной продукции. Коэффициент пропорциональности a — это переменные затраты по производству одной единицы продукции.

Если обозначить через b фиксированные затраты, то получится уравнение, которое называется *линейной моделью издержек:*

$$C(x) = b + ax.$$

Совокупный доход, или *выручка*, $R(x)$, получаемый предприятием от продажи x единиц продукции, определяется формулой

$$R(x) = px,$$

где p — цена единицы товара.

Очевидно, что область определения этой функции $\{x: x \geqslant 0\}$ и $R(0) = 0$.

Если произведено и продано x единиц продукции, то *прибыль* $P(x)$ определяется формулой

$$P(x) = R(x) - C(x).$$

18.1. Фиксированные издержки составляют 10 тыс. руб. в месяц, переменные издержки — 30 руб., выручка — 50 руб. за единицу продукции. Составить функцию прибыли и построить ее график.

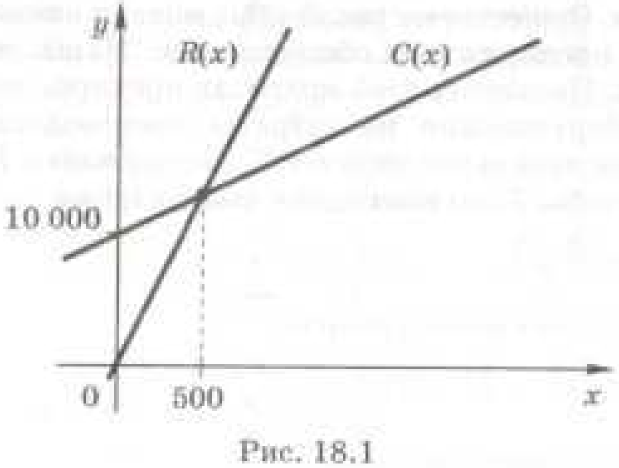

Рис. 18.1

Решение.

$$C(x) = F + V,$$
$$F = 10\,000, \qquad V = 30x$$
$$\downarrow$$
$$C(x) = 10\,000 + 30x,$$
$$R(x) = 50x$$

(рис. 18.1).

Таким образом, прибыль

$$P(x) = 50x - 30x - 10\,000 = $$
$$= 20x - 10\,0000.$$

При малых значениях x прибыль отрицательна, т.е. производство убыточно. При увеличении x прибыль возрастает, в точке $x = 500$ она обращается в нуль и после этого становится положительной (рис. 18.2).

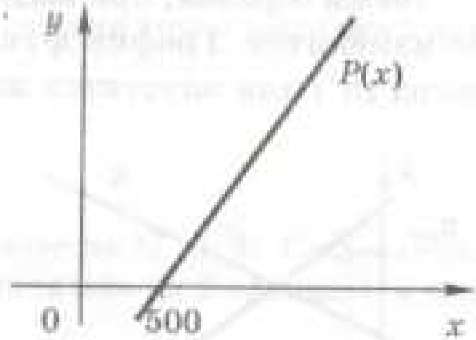

Рис. 18.2

Точка, в которой прибыль обращается в нуль, называется *точкой безубыточности*.

Законы спроса и предложения. Количество товара, которое покупа

18.11. Функция издержек производства шин имеет вид $C(x) = 30x + 2100$. Цена одной шины 60 руб. Найти точку безубыточности. Построить графики.

18.12. Постоянные издержки при производстве ручных часов составляют 12 тыс. руб. в месяц, а переменные — 300 руб. за одни часы. Цена часов 500 руб. Написать функции дохода и издержек. Построить графики. Найти точку безубыточности.

18.13. Мебельная фабрика продает каждый стул по цене 3 тыс. руб. Функция издержек линейная. Издержки составляют 48 тыс. руб. за 10 стульев и 43,2 тыс. руб. за 6 стульев. Составить функцию дохода и функцию издержек. Найти точку безубыточности.

18.14. Постоянные издержки производства некоторой продукции составляют 125 тыс. руб. в месяц, а переменные — 700 руб. за единицу продукции. Продукция продается по цене 1200 руб. за единицу. Составить функцию прибыли. Определить:

а) точку безубыточности;

б) сколько единиц продукции нужно произвести, чтобы прибыль составила 105 тыс. руб. в месяц.

18.15. Настольные лампы продаются по цене 1200 руб. каждая. Постоянные издержки составляют 24 тыс. руб. в месяц, а переменные — 800 руб. за лампу.

а) Найти точку безубыточности, построить график.

б) Сколько ламп фабрика должна произвести и продать, чтобы получить 15% дохода на деньги, вложенные в фиксированные затраты?

18.16. Обувная фабрика продает туфли по цене 350 руб. за пару. Издержки составляют 63 тыс. руб. за 100 пар туфель и 60,75 тыс. руб. за 85 пар.

а) Найти точку безубыточности.

б) Сколько пар туфель фабрика должна произвести и продать, чтобы получить 10% дохода на деньги, вложенные в фиксированные затраты?

18.17. Издержки производства x единиц продукции определяются функцией $C(x) = 0{,}1x^2 + 2x + 80$. Цена одной единицы равна 8. Найти точку безубыточности.

18.18. Фабрика продает одну единицу продукции по цене 1,2 руб. Постоянные издержки составляют 300 руб. в день, а переменные — 0,9 руб. за штуку.

а) Найти точку безубыточности.

б) Фабрика может купить новый станок. При этом постоянные издержки возрастут до 360 руб. в день, а переменные снизятся до 0,8 руб. за штуку. Выгодно ли это?

Модель №3

Законы спроса и предложения. Количество товара, которое покупатели приобретут на рынке, зависит от цены на этот товар. Соотношение между ценой и количеством купленного товара называется *функцией* или *законом спроса.*

Количество товара, которое производители выставят на продажу, также зависит от цены на этот товар. Соотношение между ценой и количеством товара, выставленного на продажу, называется *функцией* или *законом предложения.*

В простейшем случае эти функции линейны (рис. 18.3). Закон спроса обозначен через D, закон предложения — через S; x — количество товара, p — цена на этот товар.

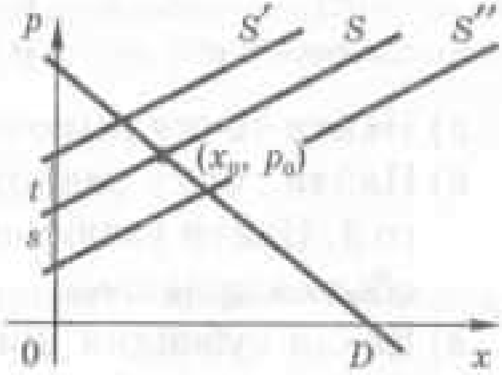

Рис. 18.3

Уравнение спроса можно составить, если заданы две точки, лежащие на его графике. Для этого нужно использовать уравнение прямой, проходящей через две заданные точки:

$$p - p_1 = \frac{p_2 - p_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

Точка пересечения кривых спроса и предложения (x_0, p_0) называется *точкой рыночного равновесия*. Соответственно, p_0 называется *равновесной ценой*, а x_0 — *равновесным количеством (объемом продаж)*.

Если известен закон спроса $p(x)$, то совокупный доход $R = xp$ можно выразить через x.

Очень часто правительство вводит налог t на товар или предоставляет субсидию s, чтобы население могло приобрести этот товар по разумной цене.

При использовании линейных моделей предполагается, что спрос определяется только ценой товара на рынке p_c, а предложение — только ценой p_s, получаемой поставщиками. Эти цены связаны между собой следующими уравнениями:

$$p_c = p_s + t,$$
$$p_c = p_s - s,$$

где t и s — соответственно налог и субсидия на единицу товара.

Таким образом, при введении налога или субсидии уравнение спроса D не изменится. График функции предложения поднимется на t единиц вверх (S') или опустится на s единиц вниз (S'') (см. рис. 18.3).

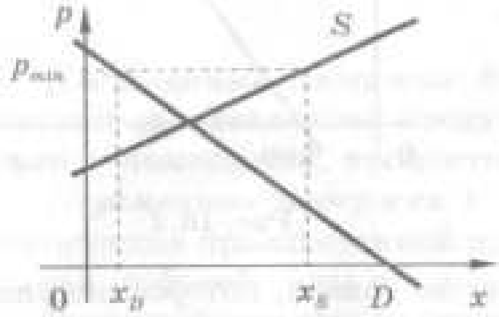

Рис. 18.4

Вместо субсидии иногда вводится минимальная цена. В этом случае правительство скупает излишек продукции, равный $x_S - x_D$ (рис. 18.4).

Некоторые налоги, например НДС (налог на добавленную стоимость), пропорциональны цене. В этом случае остается той же точка пересечения графика предложения с осью Ox и меняется угол наклона графика к оси Ox.

18.2. Законы спроса и предложения на некоторый товар определяются уравнениями

$$p = -2x + 12,$$
$$p = x + 3.$$

а) Найти точку рыночного равновесия.

б) Найти точку равновесия после введения налога, равного 3. Найти увеличение цены и уменьшение равновесного объема продаж.

в) Какая субсидия приведет к увеличению объема продаж на 2 единицы?

г) Вводится пропорциональный налог, равный 20%. Найти новую точку равновесия и доход правительства.

д) Правительство установило минимальную цену, равную 7. Сколько денег будет израсходовано на скупку излишка?

Решение. а) Находим точку равновесия M:

$$x + 3 = -2x + 12,$$
$$x = 3, \quad p = 6.$$

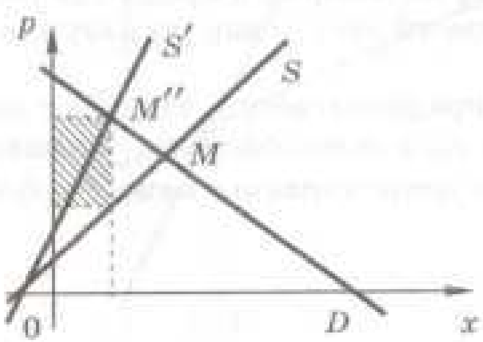

Рис. 18.5

Точка M (3, 6) является точкой равновесия (рис. 18.5).

б) Если введен налог $t = 3$, то система уравнений для определения новой точки равновесия примет вид

$$D\colon\ p_c = -2x + 12,$$
$$S\colon\ p_s = x + 3,$$
$$p_c = p_s + 3.$$

Используя соотношение между ценой на рынке p_c и ценой p_s, получаемой поставщиками, имеем следующую систему для определения точки рыночного равновесия:

$$\begin{cases} p_c = -2x + 12, \\ p_c = x + 6. \end{cases}$$

Решая эту систему, получаем новую точку равновесия $M'(2, 8)$. Следовательно, после введения налога равновесная цена увеличилась на 2 единицы, а равновесный объем уменьшился на 1 единицу.

в) Если предоставлена субсидия, то система уравнений для определения точки равновесия имеет вид

$$D\colon p_c = -2x + 12,$$
$$S\colon p_s = x + 3,$$
$$p_c = p_s - s.$$

Новый объем продаж равен 5 единицам (3 + 2). Подставляя $x = 5$ в систему, находим:

$$p_c = 2, \quad p_s = 5, \quad s = p_s - p_c = 3.$$

г) Если налог составляет 20%, то вся рыночная цена составляет 120%, из них 100% получают поставщики товара, 20% — государство. Итак, поставщики получают

$$p_s = \frac{100}{120} p_c = \frac{5}{6} p_c.$$

Уравнение спроса остается неизменным, а в уравнение предложения подставляем $p_s = \frac{5}{6} p_c$:

$$\begin{cases} p_c = -2x + 12, \\ \frac{5}{6} p_c = x + 3. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим новую точку равновесия M'':

$$-2x + 12 = \frac{6}{5}x + \frac{18}{5}$$

$$x = 2\frac{5}{8}$$

$$p_c = 6\frac{3}{4}$$

$$M''\left(2\frac{5}{8}, 6\frac{3}{4}\right).$$

Очевидно, что доход правительства R равен площади заштрихованного прямоугольника (см. рис. 18.5):

$$R = \frac{1}{6} \cdot 2\frac{5}{8} \cdot 6\frac{3}{4} = 2\frac{61}{64}.$$

д) Если установлена минимальная цена, то из уравнений спроса и предложения можно найти объемы спроса и предложения. Разницу между ними скупает правительство. Так как $p = 7$, то

$$x_S = p - 3 = 7 - 3 = 4,$$
$$x_D = \frac{12 - p}{2} = \frac{12 - 7}{2} = 2{,}5.$$

Затраты правительства составят

$$(x_S - x_D)p = (4 - 2{,}5) \cdot 7 = 10{,}5.$$

Точка рыночного равновесия называется *устойчивой*, если при малых отклонениях от равновесного значения цена стремится к этому равновесному значению.

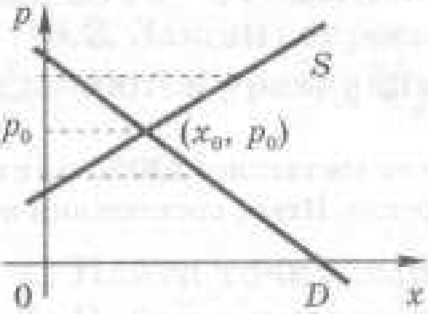

Рис. 18.6

Пусть $p > p_0$, тогда $x_S > x_D$ (рис. 18.6). Поскольку предложение превышает спрос, то цена падает и $p \to p_0$.

Если $p < p_0$, то $x_S < x_D$ (см. рис. 18.6). Поскольку спрос превышает предложение, то цена растет и $p \to p_0$. Следовательно, точка рыночного равновесия, изображенная на рис. 18.6, устойчива.

18.19. Найти точку рыночного равновесия для следующих функций спроса и предложения:

$$\text{а) } p = -\frac{2}{3}x + 6, \qquad \text{б) } p = -x + 4,$$

$$p = \frac{2}{3}x + 2; \qquad p = 0{,}5x + 1.$$

Построить графики.

18.20. Спрос на некоторый товар равен 10 единицам при цене 300 руб. за штуку и 20 единицам при цене 280 руб. Поставщик согласен продать 8 единиц товара при цене 84 руб. и 5 единиц при цене 60 руб. Найти точку рыночного равновесия.

18.21. При цене 100 руб. покупают 30 единиц некоторого товара, а при цене 140 руб. — только 20 единиц. Поставщик продает 8 единиц товара при цене 150 руб. и 15 единиц при цене 255 руб. Найти точку рыночного равновесия и построить графики.

18.22. Пусть предложение и спрос на некоторый товар определяются уравнениями

$$p = x + 100,$$
$$p = -2x + 250.$$

а) Найти точку рыночного равновесия.

б) Был введен налог, равный 10 на единицу продукции. Найти новую точку рыночного равновесия и доход государства от введения этого налога.

в) Налог был удвоен. Найти доход государства. Может ли государство потерять деньги, увеличивая налог?

г) Правительство предоставило субсидию, равную 5 на единицу продукции. Найти новую точку рыночного равновесия.

18.23. Пусть предложение и спрос на некоторый товар определяются уравнениями

$$p = 0{,}5x + 5,$$
$$p = -0{,}5x + 45.$$

а) Найти точку рыночного равновесия.

б) Правительство ввело налог, равный 5. Найти новую точку рыночного равновесия.

в) Была предоставлена субсидия, равная 3 на единицу товара. Найти новую точку рыночного равновесия.

18.24. Законы спроса и предложения имеют следующий вид:

$$p = -x + 100,$$
$$p = 3x + 20.$$

а) Какой налог на единицу продукции приведет к снижению равновесного объема продаж на 2 единицы?

б) Какой налог приведет к снижению равновесного объема продаж до 15 единиц?

в) Правительство выделило сумму денег, равную 384, для предоставления субсидии. Найти величину субсидии.

18.25. Законы спроса и предложения имеют следующий вид:

$$p = -2x + 150,$$
$$p = 4x + 30.$$

а) Какая субсидия приведет к увеличению равновесного объема продаж на 2 единицы?

б) Какая субсидия приведет к увеличению равновесного объема продаж до 25 единиц?

в) Какой налог должно ввести правительство, если хочет получить доход, равный 216?

18.26. Известны функции предложения и спроса:

а) S: $p = x + 7$, D: $p = 2x + 8$;

б) S: $3p - 2x = 7$, D: $10p + x = 8$.

Найти точку рыночного равновесия. Построить графики.

18.27. Пусть спрос и предложение на некоторый товар определяются уравнениями

$$4p + x = 34,$$
$$6p - x = 38.$$

а) Найти точку рыночного равновесия и построить графики.

б) Правительство ввело налог, равный 20%. Найти новую точку равновесия, доход, полученный правительством, и показать его на графике.

в) Установлена минимальная цена, равная 7,5. Сколько потратит правительство на покупку излишка продукции?

18.28. Законы спроса и предложения имеют следующий вид:

$$2p + 3x = 36,$$
$$5p - 3x = 48.$$

а) Найти точку рыночного равновесия и построить графики.

б) Правительство ввело налог, равный 25%. Найти новую точку равновесия, доход правительства и показать его на графике.

в) Введена минимальная цена, равная 13. Сколько потратит правительство на покупку излишка продукции?

г) Выделена сумма денег, равная 105, для установления минимальной цены. Найти эту цену.

18.29. Монопольный поставщик некоторого товара поставляет такое количество товара, чтобы обеспечить постоянный доход, т.е. закон предложения имеет вид $xp = \text{const} = \frac{16}{3}$. Спрос на этот товар определяется уравнением $x + 3p = 10$. Найти точки рыночного равновесия и исследовать их устойчивость.

18.30. Законы спроса и предложения на некоторый товар имеют следующий вид:

$$x + 2p = 8,$$
$$xp = \frac{7}{2}.$$

Найти точки рыночного равновесия и исследовать их устойчивость.

18.31. Исследовать на устойчивость точки рыночного равновесия в задачах 18.19 и 18.20.

18.32. По одному виду вкладов банк выплачивает 15% годовых, а по другому, более рискованному — 20% годовых. Вкладчик хочет вложить 3 тыс. руб. и получать ровно 500 руб. в год. Какие суммы нужно вложить по каждому виду вклада?

18.33. Петров взял кредит для строительства дома под 10% годовых в одном банке и под 12% в другом банке. Общая сумма займа составляет 10 тыс. руб., а сумма выплат по процентам — 1120 руб. Сколько было взято в кредит в каждом банке?