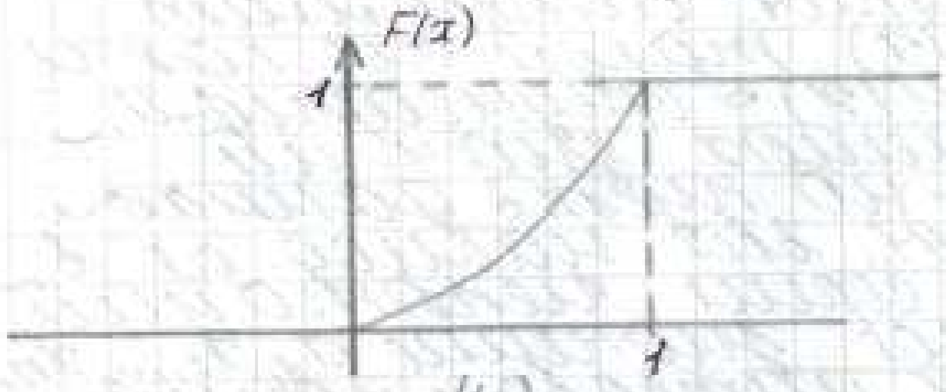
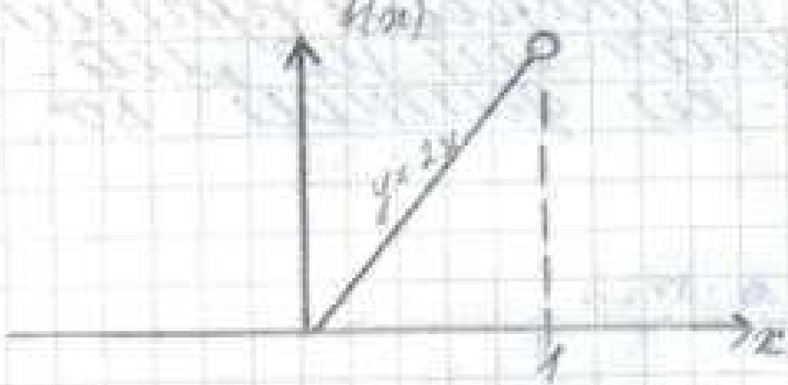
в) $x \in (1, +\infty)$

$F(x) = \int_{-\infty}^{0} \underbrace{0dt}_{0} + \int_0^1 2tdt +$

$+ \int_1^x \underbrace{0dt}_{0} = t^2\Big|_0^1 = 1$

Итак, $F(x) = \begin{cases} 0, & x<0 \\ x^2, & 0<x<1 \\ 1, & x>1 \end{cases}$





3. $P(x>0,5) = 1 - P(x<0,5) = 1 - F(0,5) = 1 - 0,25 = 0,75$

4. $P(\frac{1}{4} < x < \frac{1}{2}) = F(\frac{1}{2}) - F(\frac{1}{4}) = \frac{1}{4} - \frac{1}{16} = \frac{3}{16}$

4) Математическое ожидание непрерывной случ-ой вел-ны.

Опр.: Мат. ожидание непрерывной случ. величины с плотностью распред. $f(x)$ наз-ся число $M(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx$.

Замечание:

Если непрерывн. случ. велич. $x \in [a, b]$, то

$$M(x) = \int_a^b x f(x)\,dx, \text{ т.к.}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx = \underbrace{\int_{-\infty}^{a} x \cdot 0 \cdot dx}_{0} + \int_a^b x f(x)\,dx + \underbrace{\int_{b}^{+\infty} x \cdot 0\,dx}_{0}$$

Статистич. смысл мат. ожид. $M(x)$ такой же как и ранее: $M(x) \approx$ среднеарифм. наблюдаемых знач-ий.

Действ-но пусть данная непр. случ. вел. наблюд-ась в большой серии испытаний, получены значения $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Разобьем интервал принимаемых знач-ий на маленькие уч-ки длиной Δx.

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \approx \frac{x_1^* n_1 + x_2^* n_2 + \dots}{n} =$$

$$= x_1^* \frac{n_1}{n} + x_2^* \frac{n_2}{n} + \dots \approx x_1^* P(x \in I_1) +$$

$$+ x_2^* P(x \in I_2) + \dots \approx x_1^* f(x_1^*)\Delta x + x_2^* f(x_2^*)\Delta x +$$

$$\approx \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx = M(x)$$ интегр. сумма, которая равна

5) Дисперсия непрерывной случайной вел-ны.

Опр.: $D(x)$ н.п.с. наз-ся число

$$D(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-M(x))^2 f(x)\,dx$$

$D(x)$ хар-ет то же самое, что и для дискретн. случ. величин. (квадр. отклонений)

Ф-ла для $D(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx - M^2(x)$

Вывод формул.

$$D(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx - M^2(x) = (x-M(x))^2 f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty}(x^2-2xM(x)+M^2(x)) f(x)\,dx =$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx - \int_{-\infty}^{+\infty} 2xM(x) f(x)\,dx + \int_{-\infty}^{+\infty} M^2(x) f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx -$$

$$-2M^2(x)+M^2(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx - M^2(x)$$

Задача:

$$f(x)\begin{cases} 0, & x<0 \\ 2x, & 0<x<1 \\ 0, & x>1 \end{cases}$$

Найти: $M(x)$, $D(x)$

$$M(x)=\int_0^1 x\cdot 2x\,dx = \frac{2x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}$$

$$D(x)=\int_0^1 x^2\cdot 2x\,dx - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 2\frac{x^4}{4}\Big|_0^1 - \frac{4}{9} =$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{4}{9}=\frac{1}{18}$$

$$\sigma(x)=\sqrt{\frac{1}{18}}=\sqrt{D(x)}=\frac{1}{\sqrt{18}}=\frac{1}{3\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{6}$$

Свойства для мат) дисперсии для непр. случ. велич. точно такие же как для дискретн. случ. вел-ны.

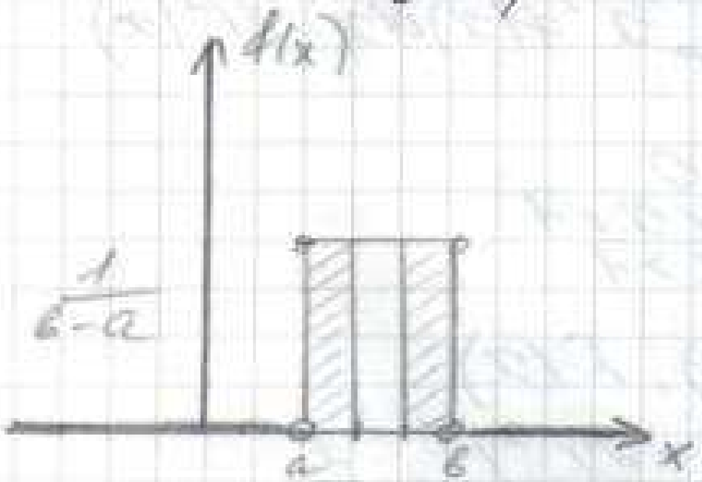
26.04.05.

1. Равномерное распределение.

Опр.: Н.с.в. наз-ся распределенная по равномерному закону на интервале (а, в), если ее плотность распределения имеет следующий вид.

$x \sim R(a, b)$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{1}{b-a}, & a < x < b \\ 0, & x > b \end{cases}$$



Выводы:

1. Все возможные значения случ вел-ны лежат на интервале (а, в).
2. Вероятности попадания в интервалы равной длины, лежащие в (а, в) равна

3. $F(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x}{b-a} + C, & a \le x \le b \\ 1, & x > b \end{cases}$

$F(a) = 0; \quad \frac{a}{b-a} + c = 0 \Rightarrow c = -\frac{a}{b-a}$

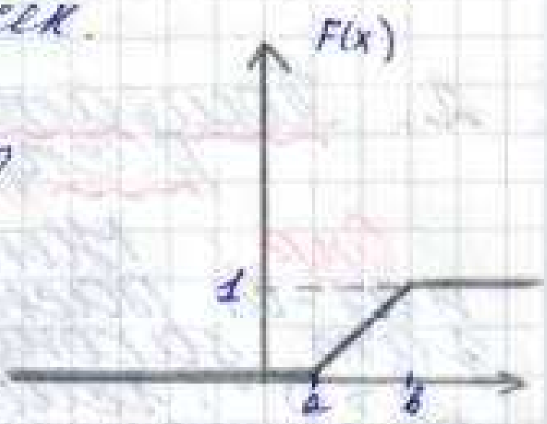
$F(x) = \begin{cases} 0 & x \le a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \le x \le b \\ 1 & x \ge b \end{cases}$

4. $M(x) = \frac{a+b}{2}$

5. $D(x) = \frac{(b-a)^2}{12}; \quad \sigma(x) = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}$

Задача

Шкала секундомера имеет деления в 0,2 сек. Какова вероятность сделать по этому секундомеру отсчет времени с ошибкой больше 0,05 сек, если отсчет делается до целого деления с округлением в ближайшую сторону.



$X = T - T_{бл}$.

T – точное время;

$T_{бл}$ – ближайшее меньшее деление секундомера.

$x \in [0; 0{,}2]$

Предположим, что мы имеем дело с равномерно-распределен. случайной вел-ой на интервале (0; 0,2)

$X \sim R(0; 0{,}2)$

Сделать ошибку в 0,05 сек. означает попадание в заштрихован. интервал случ. величин.

$$P(0{,}05 < x < 0{,}15) = F(0{,}15) - F(0{,}05) =$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \dfrac{x-0}{0{,}2-0} & 0 < x < 0{,}2 \\ 1 & x > 0{,}2 \end{cases}$$

$$= \frac{0{,}15}{0{,}2} - \frac{0{,}05}{0{,}2} = \frac{15}{20} - \frac{5}{20} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$$

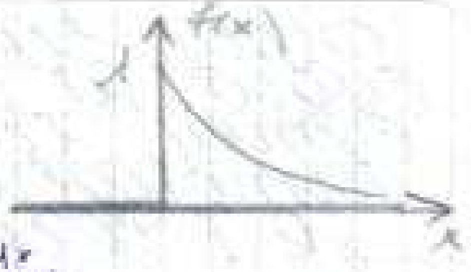
2. Показательный закон распределения.

Опр.: Непр. случ. велич. наз-ся распредел. по показат. закону с параметром $\lambda > 0$, если ее плотность распределения имеет следующий вид:

$$f(x) = \begin{cases} 0; & x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}; & x > 0 \end{cases}$$

Обозначение $X \sim P(\lambda)$

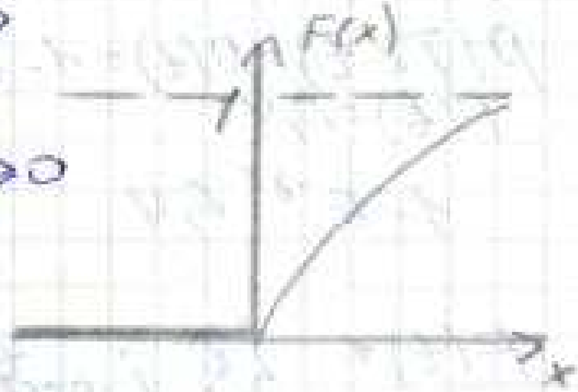
$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ -e^{-\lambda x} + c; & x > 0 \end{cases}$$



$$\lambda e^{-\lambda x} = \int e^{-\lambda x} \lambda dx = -\int e^{-\lambda x} d(-\lambda x) = -e^{-\lambda x} + C$$

$F(0) = 0$; $\quad -e^{0} + C = 0 \Rightarrow C = 1$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & x > 0 \end{cases}$$



2. $M(x) = \dfrac{1}{\lambda}$

Вывод: $M(x) = \int_0^{+\infty} x \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx = \int_0^{+\infty} x \, d(-e^{-\lambda x})$

$\int_a^b u \, dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v \, du$

$= x(-e^{-\lambda x})\Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} -e^{-\lambda x} dx =$

$\lim x(-e^{-\lambda x}) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-x}{e^{\lambda x}} \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] =$

$= \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{-1}{\lambda e^{\lambda x}} = 0.$

$= -\dfrac{1}{\lambda} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} d(-\lambda x) = -\dfrac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty} =$

$= 0 + \dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{1}{\lambda}$

3) $D(x) = \dfrac{1}{\lambda^2}$; $\quad \sigma(x) = \dfrac{1}{\lambda}$

Задача

Вероятность обнаружения затонувшего судна за время поиска t задается формулой

$P(t) = 1 - e^{-\gamma t}$ $(\gamma > 0)$.

Опред. вероятн-ть того, что судно не будет найдено за сутки, если около 40% всех затонувших судов находит за 8 часов

T - время поиска судна

$P(T<t)=F(t)=1-e^{-\lambda t} \Rightarrow T\sim E(\lambda)$

$F(8)=0{,}4$ $\quad 0{,}6=e^{-8\lambda}$

$1-e^{-8\lambda}=0{,}4$ $\quad -8\lambda=\ln 0{,}6$

$\lambda=\frac{\ln 0{,}6}{-8}=0{,}06$

$F(t)=\begin{cases}0, & t\le 0\\ 1-e^{-0{,}06t}, & t>0\end{cases}$

$P(T>24)=1-F(24)=1-(1-e^{-0{,}06\cdot 24})=$

$=e^{-1{,}44}=0{,}237 \Rightarrow 23{,}7\%$

3. Нормальный закон распределения.

Опр.: Непр. случ вел-на наз-ся распределенной по нормальному закону с параметрами $a\in R$, $\sigma>0$, если плотность распределения имеет вид:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

Замечание: при $a=0$, $\sigma=1$ нормальный закон наз-ся центрированным.

Обознач. $X\sim N(a;\sigma)$

Построим график плот-ти:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$