§4 Понятие ф-ии распред.

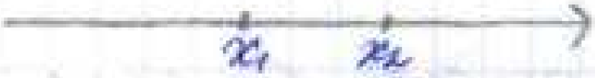
Опр. – Ф-ия распред. случ. вел-ны X называется числовая ф-ия опред-ая на всей числовой прямой и равная $F_X(x) = P(X < x)$, $x \in R$

Св-ва:

1. $0 \le F(x) \le 1$
2. $F(x)$ – неубывающая ф-ия

Док. Покажем, что если $x_1 < x_2$, то $F(x_1) \le F(x_2)$

$F(x_2) = P(X < x_2) = P((X < x_1) + (x_1 \le X < x_2)) =$ несовместные события



$= P(X < x_1) + P(x_1 \le X < x_2) = F(x_1) + P(x_1 \le X < x_2) \ge 0$

$\Rightarrow F(x_2) \ge F(x_1)$

3. Вероятн. попад. случ. вел-ны в интервал

$P(\alpha \le X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$

Вывод вытекает из док-ва 2, если $x_1 = \alpha$, $x_2 = \beta$.

4. $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$

Вывод: $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} P(X < x) =$

$= P(X < \infty) = P(\Omega) = 1$

Обозначение:

$\lim\limits_{x \to \infty} F(x) = F(+\infty)$

5. $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x)=0$

6. Если возможн. знач. случ. вел-ны заключ. на отрезке a, b

Если $x \in [a, b]$, то при $x \le a$ $F(x)=0$
при $x > b$ $F(x)=1$

Вывод: $x \le a$

$F(x)=P(X<x)=P(\varnothing)=0$

$x \ge b$

$F(x)=P(X<x)=P(\Omega)=1$

Замечание:
В основном ф-ции распред. использ-ся для вычисл. вер-ти попадания случ. вел-ны в некоторый числовой интервал. (см. св-во 3.)

Задача:

$F(3)=0,8$ Найти: (св-во 3)
$F(1)=0,3$ $P(1 \le x < 3)=$

$= F(3)-F(1)=0,8-0,3=0,5$

Задача.
Найти ф-цию распред. построить её график дискр.-ой случ.-ой вел-ны X

x_i	1	2	3
p_i	1/4	1/2	1/4

Решение:

1) $x \in (-\infty; 1]$

$F(x) = P(X < x) = 0, \quad F(1) = P(x < 1) = 0$

2) $x \in (1; 2]$

$F(x) = P(X < x) = P(x = 1) = \frac{1}{4}$

$F(x) = P(X < 2) = P(x = 1) = \frac{1}{4}$

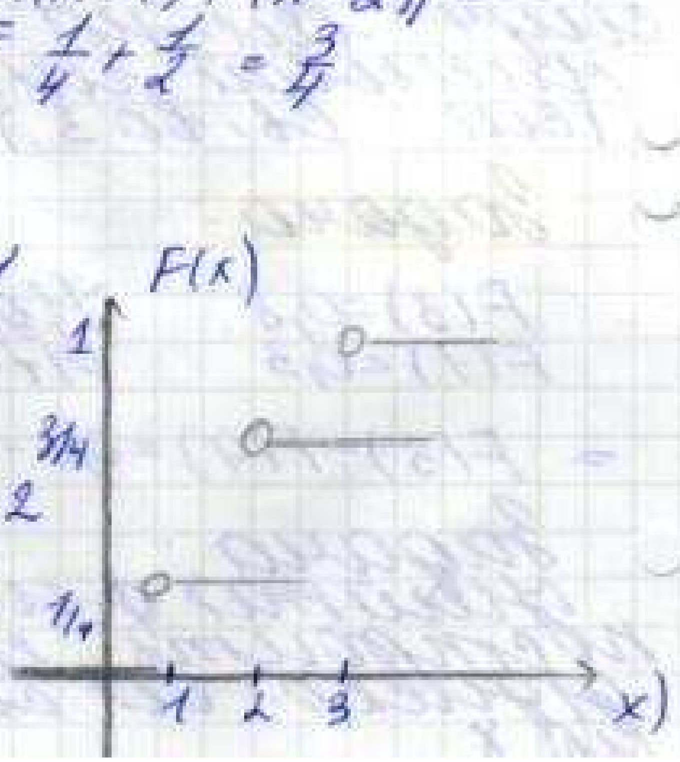
3) $x \in (2; 3]$

$F(x) = P(X < x) = P((X = 1) + (X = 2)) =$
$= P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$

4) $x > 3$

$F(x) = P(X < x) = 1$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1 \\ \frac{1}{4}, & 1 < x \le 2 \\ \frac{3}{4}, & 2 < x \le 3 \\ 1, & x > 3 \end{cases}$$



Вывод 1: Графики ф-ции дискретн. случ. вел-ны всё ступенчатая линия: крайняя левая ступенька на уровне 0, крайняя прав. ст. на уровне 1.

Вывод 2: Ф-ция $F(x)$ явл. непрерыв. слева числовой функции.

Непрер-ть ф-ции слева видна: выколотые (·)-ки на графике.

Вывод 3: Все доказанные св-ва ф-ции распред-ния можно видеть на построенном графике.

Непрерывные случайные величины

Опр: Случ. вел-на наз. непрер., если её ф-ция распред. явл. непрерывной ф-цией. Все доказан. ф-ции св-ва распред. ост. в силе. Появл. новое св-во.

$$P(X=a)=0$$

Док-во:

$$P(X=a)=\lim_{\Delta x \to 0} P(a<X<a+\Delta x)$$

$$=\lim_{\Delta x \to 0}(F(a+\Delta x)-F(a))=F(a)-F(a)=0$$

1) Если x - непрерывная случайная величина, то $P(x=a)=0$ 19.04.16
тогда $P(a<x<b) = P(a \le x \le b) =$
$= P(a \le x < b) = P(a < x \le b)$

Вывод: Для непрерывной случайной величины вероят-ть попадания в интервал не зависит от того, включены ли концы этого интервала.

Для дискретной случайной вел-ны это отнюдь не так.

2) Понятие плотности распределения вероятн-и

Любую непрерывную случайную вел-ну можно представить как некоторый конкретный материальный одномерный стержень с массой, распределенной по некоторому закону вдоль всей длины „стержня".

Действит-но, проведем большую серию испытаний случайной вел-ны, мы получим большое число значений - точек на числовой прямой.

Данный набор т. можно представить как материальн. т. некоторого тела - „стержня".

Набор т. - часть информации о материал. стержне.

Вероятность попадания в интервал (α, β) не используя понятие относит-ой частоты событий можно представить как

$$p \approx \frac{m}{n}$$

n - общее число точек

m - число точек попавших в интервал (α, β)

Вероятн-ть можно представить как долю всей «массы стержня», сосредоточенной на уч-ке (α, β). Отсюда мы пришли к введению понятия плотности распределения вероятн-ти.

Опр.: Функцией плотностей распределения вероятностей наз-ся числовая ф-ция $f(x) = F'(x)$, если эта производная сущ-ет.

Комментарий:

$$f(x) = F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x < X < x+\Delta x)}{\Delta x} \quad \text{св-во 3 для } F(x)$$

$\Rightarrow$ при $\Delta x \approx 0$ $\frac{P(x < X < x+\Delta x)}{\Delta x} \approx f(x)$

Плотность вероятн-ей $f(x)$ приближенно равна доле «массы стержня» сосредоточен на уч-ке $(x, x+\Delta x)$ деленной на длину этого уч-ка.

3) Свойство $f(x)$

а) $f(x) \geq 0$, т.к. $f(x) = F'(x)$, где $F(x)$ - неубывающ. ф-ия.

б) вероятн-ть попадания в интервал

$$P(\alpha < x < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx$$

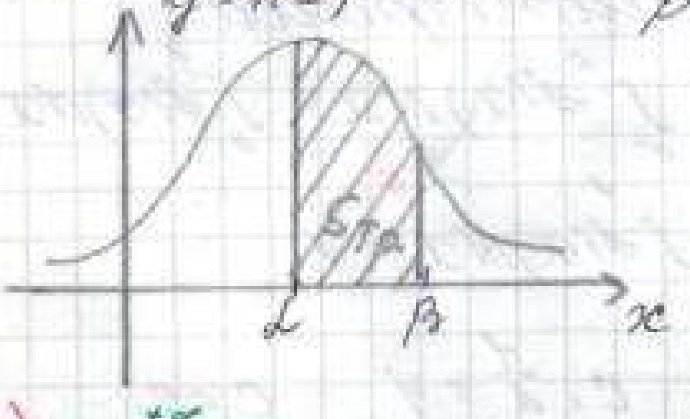
$F(x)$ = первообразная для $f(x)$ =>

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = F(\beta) - F(\alpha)$$ (ф-ла Ньютона-Лейбница)

Из св-ва 3) для $F(x)$

$P(\alpha < x < \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$ => б)

Это св-во позволит нам "читать" график ф-ии распределения.



$P(\alpha < x < \beta) = S_{тр}$.

в) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = F(+\infty) - F(-\infty) = P(-\infty < x < +\infty) = P(\Omega) = 1$$

г) если $x \in [a, b]$, то $f(x) = 0$ при $x \notin [a, b]$

Из св-ва 5) $F(x)$ =>

$F(x) = 0$ при $x \leq a$ => $f(x) = (0)' = 0$

$F(x) = 1$ при $x > b$ => $f(x) = (1)' = 0$

4) Восстановление ф-ции $F(x)$ по ф-ции $f(x)$

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

Вывод: по св-ва 5) $\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = P(-\infty < X < x) = P(X<x) = F(x)$

Задача.

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ Cx, & 0<x<1 \\ 0, & x>1 \end{cases}$$

Найти: 1) C; 2) $F(x)$; 3) $P(X>0,5)$
4) $P\left(\frac{1}{4}<X<\frac{1}{2}\right)$

Решение: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$

по св-ву аддитивности определенного интеграла

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \underbrace{\int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx}_{0} + \int_{0}^{1} f(x)\,dx + \underbrace{\int_{1}^{+\infty} f(x)\,dx}_{0} = \int_{0}^{1} f(x)\,dx = 1$$

$$C\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = 1 \qquad C\cdot\frac{1}{2}=1 \qquad C=2$$

2. $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$

а) $x\in(-\infty;0)$

$F(x)=\int_{-\infty}^{x} \underbrace{0}_{0}\,dt=0$

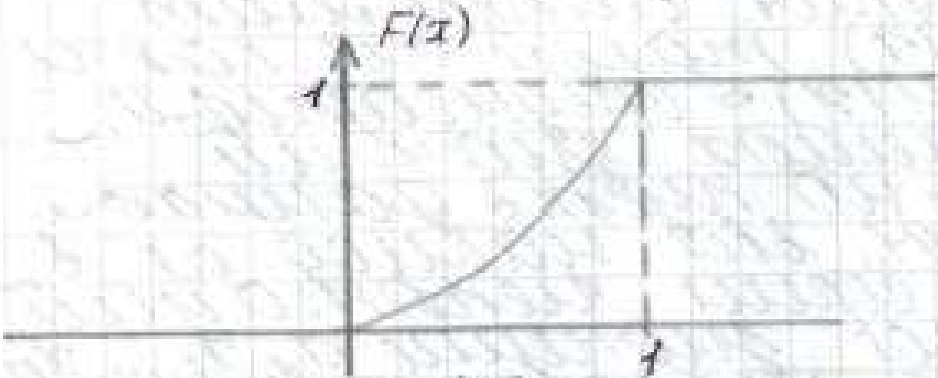
б) $x\in[0,1)$

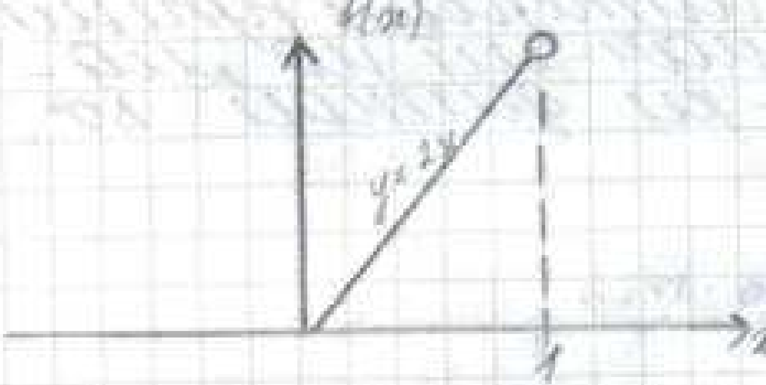
$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt=\underbrace{\int_{-\infty}^{0} 0\,dt}_{0}+\int_{0}^{x} 2t\,dt = t^2\Big|_0^x = x^2$$

в) $x \in (1, +\infty)$

$F(x) = \underbrace{\int_{-\infty}^{0} 0dt}_{0} + \int_0^1 2tdt + \underbrace{\int_1^x 0dt}_{0} = t^2\Big|_0^1 = 1$

Итак, $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x^2, & 0 < x < 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$





3. $P(x > 0,5) = 1 - P(x < 0,5) = 1 - F(0,5) = 1 - 0,25 = 0,75$

4. $P\left(\frac{1}{4} < x < \frac{1}{2}\right) = F\left(\frac{1}{2}\right) - F\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{16} = \frac{3}{16}$

4) Математическое ожидание непрерывной случ-ой вел-ны.

Опр.: Мат. ожиданием непрерывной случ. величины с плотностью распред. $f(x)$ наз-ся число $M(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx$.