§4 Св-ва дисперсии

1. $D(C)=0$
2. $D(C\cdot X) = C^2 D(X)$
3. $D(C+X) = D(X)$
4. X_1, X_2 – независимы, то $D(X_1 \pm X_2) = D(X_1) + D(X_2)$

Задача

$M(x) = -1$, $M(y) = 2$, x, y – независимы
$D(x) = 2$, $D(y) = 1$

Найти: $D(2X-3Y)$
$M(x^2)$, $M(y^2)$

Решение:

$D(2x-3y) = D(2x) + D(3y) =$
$= 4\cdot D(x) + 9D(y) = 4\cdot 2 + 9\cdot 1 = 17$

$D(x) = M(x^2) - M^2(x)$
$M(x^2) = D(x) + M^2(x) = 2 + (-1)^2 = 3$
$M(y^2) = D(y) + M^2(y) = 1 + 2^2 = 5$

§5 Начальные и центральные моменты

Опр.: нач. мом. порядка k случ. вел. X назв. число, кот. обозн. ν_k, кот. $= \nu_k = M(X^k)$
Очевидно $\nu_1 = M(X)$ и $\nu_2 = M(X^2)$

Опр.: Центральным моментом порядка k дискретн. сл. вел-ны X наз. число, кот. обозн. μ_k и кот. $= \mu_k = M((X - M(X))^k)$.

$\mu_1 = 0$, $\mu_2 = D(X)$

Полезные (св-ва) ф-лы без вывода:

$\mu_3 = \nu_3 - 3\nu_2 \cdot \nu_1 + 2\nu_1^3$

$\mu_4 = \nu_4 - 4\nu_3 \nu_2 + 6\nu_2 \nu_1^2 - 3\nu_1^4$

Перейдём к изучению распред-ий специального вида.

§6 Биномиальное распред-ие

Опр.: Дискретн. случ. вел-на наз. биномиальной распред., если её ряд распред. имеет след. вид:

x_i	0	1	2	...	n
p_i	$P_n(0)$	$P_n(1)$	$P_n(2)$	....	$P_n(n)$

, где

$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$

(ф-ла Бернулли)

$0 < p < 1$.

Замечание:
Этот класс дискретн. случ. вел-ин важен, т.к. число успехов m в схеме испытаний

Зви. биномиальн. случ. вел-ы

Обознач. биномиального закона: $X \sim B(n,p)$

Теорема:

Если случ. вел-на $X \sim B(n,p)$, то $M(X) = n \cdot p$

$D(X) = npq = M(X) \cdot q$

X - число успехов в серии испытаний.

12.04.06

§1 Док-во:

x - число "успехов" в n испытаниях.

x_i - число "успехов" в i-ом испытании

$i = 1, 2, \ldots, n$

$x = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ $\quad x_i$:

x	0	1
P_i	q	p

$M(x_i) = p$

$D(x_i) = p - p^2 = p(1-p) = pq$

$M(x) = M(x_1) + M(x_2) + \ldots = np$

$D(x) = D(x_1) + D(x_2) + \ldots = npq$

Задача

В контр. раб. 7 задач. Решение каждой задачи удается с вероятн-ю 0,7. Найти мат. ожид., дисперсию, числа решенных задач.

$M(X) = 7 \cdot 0{,}7 = 4{,}9$

$D(X) = 7 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3 = 4{,}9 \cdot 0{,}3 = 1{,}47$

§2 Закон Пуассона

Опр: Дискретная случ. величина имеет распред-ие по з-ну Пуассона с параметром $\lambda>0$, если ее ряд распред. имеет вид:

x_i	0	1	2	3	...
p_i	$\frac{\lambda^0}{0!}e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^1}{1!}e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^3}{3!}e^{-\lambda}$	...

Значение закона Пуассона
$X \sim Pu(\lambda)$

Теорема:
$X \sim Pu(\lambda)$, то $M(X)=\lambda$, $D(X)=\lambda$

Док-во:
$$M(X)=0\cdot\frac{\lambda^0}{0!}e^{-\lambda}+1\cdot\frac{\lambda^1}{1!}e^{-\lambda}+2\cdot\frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda}+\ldots$$
$$=e^{-\lambda}\left(\lambda+\frac{\lambda^2}{1!}+\frac{\lambda^3}{2!}+\ldots\right)=e^{-\lambda}\lambda\underbrace{\left(1+\frac{\lambda^1}{1!}+\frac{\lambda^2}{2!}+\ldots\right)}_{e^{\lambda}}=$$
$$=e^{-\lambda}\lambda e^{\lambda}=\lambda$$

Замечание:
З-ну Пуассона „почти" подчиняется число успехов в схеме не завис-ых испытаний при „большом n" и при малом p.

Задача
На хлебокомбинате в чане готовят булочки с изюмом из расчета 10 изюминок на булочку. Найти мат. ожид., дисп. числа изюминок в булочке.

И - проверка на попадание дробинки в бутылку

А - дробинка попала

n - известно, но велико

p - вероятн. мала

$\lambda = np$ - среднее число успехов

$\lambda = 10$.

m - число "успехов" - дискретная случайная величина

m_i	0	1	2	3	...	n
p_i	$\frac{\lambda^0}{0!}e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^1}{1!}e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda}$	...		

$P_n(m) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$

Д/вычисл. соотв-их вероятн. будем использ. асимптотич-ую ф-лу Пуассона

$\Rightarrow m \sim Pu(\lambda)$

$M(m) = \lambda = 10, \; D(m) = \lambda = 10, \; \sigma(m) = 3{,}3$

§3 Геометрическое распред-ие.

Опр.: Дискретная случ. вел-на ξ распред-ся по геом. закону с параметром p, $0 < p < 1$, если ее ряд распред. имеет след. вид.

x_i	1	2	3	4	5	...
p_i	p	qp	q^2p	q^3p	q^4p	.

Обознач.: $x \sim G(p)$

Теорема:

$$x \sim G(p) \Rightarrow M(x) = \frac{1}{p}, \quad D(x) = \frac{q}{p^2}$$

Док-во:

$$M(x) = p + 2qp + 3q^2p + 4q^3p + \dots =$$
$$= p(1 + 2q + 3q^2 + 4q^3 + \dots) =$$
$$= p(q' + (q^2)' + (q^3)' + \dots) =$$
$$= p(q + q^2 + q^3 + \dots)' = p\left(\frac{q}{1-q}\right)' =$$
$$= p\,\frac{q'(1-q) - q(1-q)'}{(1-q)^2} = p\,\frac{1-q+q}{(1-q)^2} =$$
$$= \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}$$

Задача

Вероятн. попад. в мишень при 1-ом выстреле $= \frac{1}{3}$. Найти мат. ож. и дисп. числа произведенных выстрелов до 1-ого попад. в мишень.

X – число выстрелов до 1-ого попадания.

x_i	1	2	3	....
p_i	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{3}$	....

$x \sim G\left(\frac{1}{3}\right)$

$$M(x) = \frac{1}{1/3} = 3$$
$$D(x) = \frac{q}{p^2} = \frac{2/3}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} = 6$$