$X^2 =$

x_i	x_1^2	x_2^2	...
p_i	p_1	p_2	...

Пример:

X:

x_i	-1	0	1
p_i	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

X^2:

x_i	$(-1)^2$	0^2	1^2
p_i	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

x_i	1	0	1
p_i	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

X^2:

x_i	0	1	
p_i	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	

Замечание:

Слагаемые в сумме, множит. в произвед-ии ($X_1 \cdot X_2$) при таких случайных должны представ. собой независ. (друг от друга) случ. вел-ны.

§5 Математическое ожидание дискретной случайной вел-ны

Опр. -"- назыв. число, кот. обознач. $M(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \ldots$,

Выясним статистический смысл этого числа.

Пусть случ-ая вел-на X наблюд-ся в серии из N независ-ых испыт-ий. Пусть в этой серии значение X_1 встретилось n_1 раз, значение x_2 — n_2 раза, и т.д.

Вычислим среднее арифм-ое наблюдаемых знач-ий $\bar{X}$.

$$\bar{X} = \frac{x_1 \cdot n_1 + x_2 \cdot n_2 + \ldots}{n} =$$

$$= x_1 \cdot \frac{n_1}{n} + x_2 \cdot \frac{n_2}{n} + \ldots \approx x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \ldots =$$

$\frac{n_1}{n}$ — относит-ая частота события $(X = x_1)$, и т.д.

$= M(X)$

Вывод: Математич-ое ожид-ие дискретной случ-ой вел-ны приближ-о = средн. арифм-му наблюд. знач. в большой серии испыт.

05.04 Задача пример

Вероятн. того, что 40 летний чел. доживет до 50 лет = 0,927. Если такой чел. будет застрах. на 1000 лет на 1000$ со страховым взносом в 100$, то какова в среднем выгода страховой компании, если она застрахует 1000 чел.

X – прибыль компании при страховании 1-ого чел.

x_i	-900	100
p_i	0,073	0,927

$M(X) = -900 \cdot 0,073 + 100 \cdot 0,927 =$
$= 27$

Используя статистич-ий смысл математич-ого ожид-ия (конец прошлой лекции) мы можем провести следующее: выбираем 1000 чел. и фиксир. прибыль компании при страховании каждого из них.
Пусть это $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{1000}$

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{1000}}{1000} \approx M(X)$$

$П \approx 27 \cdot 1000 = 27000$

51

Свойства математического ожидания.

а) $M(C) = C$

б) $M(C \cdot X) = CM(X)$

в) $M(X_1 \pm X_2) = M(X_1) \pm M(X_2)$

г) X_1, X_2 – независимы, $\Rightarrow$

$M(X_1 \cdot X_2) = M(X_1) \cdot M(X_2)$

Вывод б)

X:

x_i	x_1	x_2	...
p_i	p_1	p_2	...

$C \cdot X$:

x_i	Cx_1	Cx_2	...
p_i	p_1	p_2	...

(см прошл. лекцию)

$M(C \cdot X) = Cx_1 \cdot p_1 + Cx_2 \cdot p_2 + \ldots = C(x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots) = C \cdot M(X)$

Замечание: В св-ах „в" и „г" число слаг-ых в сумме и число множит-ей в произвед. м/б > чем 2

Задача

Производится 3 выстрела в мишень с вероятностями попадания $p_1 = 0,3$; $p_2 = 0,4$; $p_3 = 0,6$; Найти математич-ое ожидание числа попад. в мишень при 3 выстрелах

X – число попад. в мишень при 3 выстрелах
x_i – " – " – " – " – при i-ом выстреле
$i = 1, 2, 3.$

$X = x_1 + x_2 + x_3$

$M(X) = M(x_1) + M(x_2) + M(x_3) =$

x_1:

x_i	0	1
p_i	0,7	0,3

$M(x_1) = 0,3$
$M(x_2) = 0,4$
$M(x_3) = 0,6$

$= 0,3 + 0,4 + 0,6 = 1,3$

§2 Понятие дисперсии дискретн. случайн. вел-ны

Рассм. 2 разные дискретн. случ-ые вел-ны.

X:

x_i	-1	1
p_i	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Y:

y_i	-100	100
p_i	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

$M(X) = -1 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = 0$ $\quad M(Y) = -100 \cdot \frac{1}{2} + 100 \cdot \frac{1}{2} = 0$

Математич-ие ожид. одинаковы, но разброс вокр. знач. этого математич. ожид. разные.

Вводим числ-ную хар-ку
хар-ую разброс, рассеяние.

Опр.: Дисперсией дискр. случ. вел-ны наз. число
кот. будем обозн. $D(X)$ и
кот. $\sigma^2 = D(X) = M((X - M(X))^2)$

Комментарии:

1. Дисперсия хар-ет квадрат отклонения сл. вел-ны от математич. ожидания.
2. Дисперсию нельзя определить как
$D(X) = M(X - M(X))$, но
$M(X - M(X)) = M(X) - M(M(X)) =$
(св-во 1) $= M(X) - M(X) = 0$
3. Чтобы всё таки охарактер-ать не кв-ат отклонения, а само отклонение, вводят 3 хар-ку случ-ой вел-ны
$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$ называемую
средним квадратич-им отклонением.

§3 Способы вычисл. дисперсии

а) Сп. 1 Вытек. из опред. дисперсии

X

x_i	x_1	x_2	...
p_i	p_1	p_2	...

$X - M(X)$:

x_i	$x_1 - M(X)$	$x_2 - M(X)$	...
p_i	p_1	p_2	...

$(X - M(X))^2$:

x_i	$(x_1 - M(X))^2$	$(x_2 - M(X))^2$	...
p_i	p_1	p_2	...

(см. прошл. лекц.)

$D(X) = M((X - M(X))^2) = (x_1 - M(X))^2 \cdot p_1 + (x_2 - M(X))^2 \cdot p_2 + \ldots$

Внимание: этот способ б. использ. в том случае если вариаб. знач. x_1, x_2 "не удобные" д. возвед. в квадрат

Пример:

x_i	0,3	1,2	1,6
p_i	0,4	0,5	0,1

$M(X) = 0{,}3 \cdot 0{,}4 + 1{,}2 \cdot 0{,}5 + 1{,}6 \cdot 0{,}1 = 0{,}12 + 0{,}6 + 0{,}16 = 0{,}88$

$D(X) = (0{,}3 - 0{,}88)^2 \cdot 0{,}4 + (1{,}2 - 0{,}88)^2 \cdot 0{,}5 + (1{,}6 - 0{,}88)^2 \cdot 0{,}1 = 0{,}58^2 \cdot 0{,}4 + 0{,}32^2 \cdot 0{,}5 + 0{,}72^2 \cdot 0{,}1 = 0{,}23$

$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} =$

б) Спос. 2

$D(X) = M(X - M(X))^2) = M(X^2 - 2X \cdot M(X) + M^2(X)) = M(X^2) - M(2X \cdot M(X)) + M(M^2(X)) = M(X^2) - 2M(X) \cdot M(X) + M^2(X) = M(X^2) - M^2(X)$

$$D(x) = M(x^2) - M^2(x)$$

X:

x_i	x_1	x_2	...
p_i	p_1	p_2	...

X^2:

x_i	x_1^2	x_2^2	
p_i	p_1	p_2	

$$M(x^2) = x_1^2 \cdot p_1 + x_2^2 p_2 + \ldots$$

$$D(x) = x_1^2 \cdot p_1 + x_2^2 \cdot p_2 + \ldots - M^2(x)$$

Замечание

Этой формулой удобно польз. в том случае если возможные знач. случ-ой вел-ны удобно возвод. в квадрат.

Пример:

X:

x_i	1	2	4
p_i	0,3	0,5	0,2

$$M(x) = 1 \cdot 0{,}3 + 2 \cdot 0{,}5 + 4 \cdot 0{,}2 = 0{,}3 + 1 + 0{,}8 = 2{,}1.$$

$$D(x) = 1^2 \cdot 0{,}3 + 2^2 \cdot 0{,}5 + 4^2 \cdot 0{,}2 - (2{,}1)^2 = 0{,}3 + 2 + 3{,}2 - 4{,}41 = 5{,}5 - 4{,}41 = 1{,}09$$

$$\sigma(x) = 1{,}04$$

Замечание:

Если знач-я случ. и прин. малые значения на числовой прямой, то дисперс. д. любой случ. вел-ны есть вел-на не отриц.

§4 Св-ва дисперсии

1. $D(C)=0$
2. $D(C\cdot X) = C^2 D(X)$
3. $D(C+X) = D(X)$
4. X_1, X_2 – независимы, то $D(X_1 \pm X_2) = D(X_1)+D(X_2)$

Задача

$M(x)=-1$, $M(y)=2$
$D(x)=2$, $D(y)=1$
x, y – независимы

Найти: $D(2X-3Y)$
$M(x^2)$, $M(y^2)$

Решение:

$D(2x-3y) = D(2x)+D(3y) =$
$= 4\cdot D(x) + 9D(y) = 4\cdot 2+9\cdot 1=17$

$D(x)=M(x^2)-M^2(x)$
$M(x^2)=D(x)+M^2(x) = 2+(-1)^2=3$
$M(y^2)=D(y)+M^2(y)=1+2^2=5$

§5 Начальные и центральные моменты

Опр.: нач. мом. порядка k дискр. сл. вел. X назыв. число, кот. обозн. ν_k, кот. $= \nu_k = M(X^k)$
Из опр. видно, что $\nu_1 = M(X)$ и $\nu_2 = M(X^2)$