A – поражение цели
A_i – i торпеда попала в цель

$A = A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_n$ (д.б. найдена)

По теореме вероятн-ть A
$P(A) = 1 - q_1 q_2 \ldots q_n = 1 - 0{,}7^n$ не менее 0,95

$0{,}7^n \le 0{,}05$

$\log_{0,7} 0{,}05$

$n \ge \log_{0,7} 0{,}05 = \dfrac{\ln 0{,}05}{\ln 0{,}7} = 8{,}4$

Ответ: $n = 9$

3. Ф-ла полной вероятности

Теорема: Пусть $H_1, H_2, \ldots$ образуют полную группу событий, тогда вероятность

$$P(A) = P(H_1)\cdot P_{H_1}(A) + P(H_2)\cdot P_{H_2}(A) + \ldots$$

Комментарий:

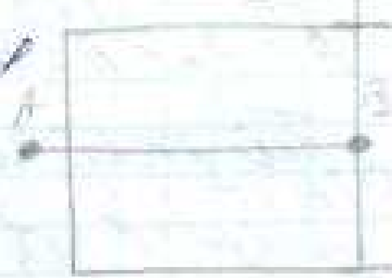
1. Ф-ла наз-ся ф-ой полной вероятн-ти
2. H_1, H_2 назыв-ся гипотезами

$A = A\cdot H_1 + A\cdot H_2 + \ldots$

$P(A) = P(A\cdot H_1) + P(A\cdot H_2) + \ldots = P(H_1)\cdot P_{H_1}(A) + P(H_2)\cdot P_{H_2}(A) + \ldots$

Задача

Красная шапочка выходит из дома к бабушке, в дом в случайно выбирая дорогу на перекрестке. Найти вероятн. того, что красная шапочка дойдет до бабушки



Решение

Вероятн. исходн. события зависит от нек. гипотез (событий)

H_1 - выбрана верхняя дорога,

H_2 - выбрана средняя дорога,

H_3 - выбрана нижняя дорога

A - К.Ш. дошла до бабушки

$P(H_1)=\frac{1}{3}$	$P_{H_1}(A)=\frac{1}{3}$
$P(H_2)=\frac{1}{3}$	$P_{H_2}(A)=1$
$P(H_3)=\frac{1}{3}$	$P_{H_3}(A)=\frac{1}{2}$

$$P(A)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot 1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}+1+\frac{1}{2}\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{2+6+3}{6}=\frac{11}{18}$$

4. Формула Байеса

Теорема: Пусть $H_1, H_2, \ldots$ образуют полную группу, тогда для любого события A: $P(A)\neq 0$, справедл. след. ф-ла:

$$P_A(H_i) = \frac{P(H_i)\cdot P_{H_i}(A)}{P(H_1)\cdot P_{H_1}(A) + P(H_2)\cdot P_{H_2}(A) + \ldots}$$

Док-во: из следствия 1, 2 (начало лекции)

$$P_A(H_i) = \frac{P(A\cdot H_i)}{P(A)} \overset{\text{по теор.}}{=} \frac{P(H_i)\cdot P_{H_i}(A)}{P(A)} =$$

$$= \frac{P(H_i)\cdot P_{H_i}(A)}{P(H_1)\cdot P_{H_1}(A) + P(H_2)\cdot P_{H_2}(A)}$$

Задача (см. кр. шап.)

Пусть красная шапочка дошла до бабушки, какова вероятность, что она шла по средней дороге.

A - произошло

$$P_A(H_2) = \frac{\frac{1}{3}\cdot 1}{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot 1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{3} + 1 + \frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{1}{\frac{2+6+3}{6}} = \frac{6}{11}$$

12.03.06

§1 Схема независимых испытаний

Пусть И - испытание

A - событие („успех")

p - вероятность „успеха"

$p = P(A)$

$q = 1 - p$ -

И - брос. игр-ой кости

A - выпадение „6"

$p = \frac{1}{6}$

$q = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

И - повторяется n раз
А может произойти m раз
$m = 0, 1, 2, \ldots, n$
Вероятность того что в n-кратном повторении испытаний успех А произойдет ровно m раз вычисляется по ф-ле Бернулли

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}$$

p - вероятность успеха в одном испытании
q - вероятн. неуспеха в одном испытании
n - число испытаний
m - число успехов
$P_n(m)$ - вероятн. ровно m успехов в n независимых испытаниях.

Игр-ую кость бросили $n = 5$ раз
„6" может выпасть
$m = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ раз
Вероятн. того, что „6" выпадет ровно 3 раза при 5-и кратном бросании игральной кости равна

$$P_5(3) = C_5^3 \, p\left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^2 = C_5^2 \frac{25}{216 \cdot 36} = \frac{125}{108 \cdot 36} = 0{,}032$$

Док-во:
$n = 4, \; m = 2$
В - в $n = 4$ испытаниях „успех" произойдет
A_i - в i-ом испытании „успех" произошел
$i = 1, 2, 3, 4$

$B = B_1 B_2 \bar{B}_3 \cdot \bar{B}_4 + B_1 \bar{B}_2 B_3 \bar{B}_4 + \ldots$

Вычислим число кол-во таких слагаемых
Каждое слагаемое определяется 2-мя номерами испытаний в кот. происходит успех.

{1, 2, 3, 4} - номера испытаний
примеры выбора 2-ух номеров.

1 2
1 4
2 3
~~2 4~~

$\Rightarrow$ это сочетание из 4-х по 2

$C_4^2 = C_n^m$

Общее число слагаемых равно числу сочетаний из 4 по 2-м. Слагаемые представ-ют собой попарно несовместные события, поэтому вероятн. B = сумме вероятн-тей.

$P(B) = P(B_1 B_2 \bar{B}_3 \bar{B}_4) + \ldots$

В силу независимости испытаний множители в произведениях не зависимы друг от друга.

$P(B_1 B_2 \bar{B}_3 \bar{B}_4) = P(B_1) P(B_2) P(\bar{B}_3) P(\bar{B}_4) = p^2 q^2 = p^m q^{n-m}$

$\Rightarrow P_n(m) = P(B) = C_n^m p^m q^{n-m}$ – ф-ла Бернулли.

§2 Интересные задачи

(задача об экстрасенсе)

задача.

Тем отгадать в какой ру-
ке спрятан предмет.
Вычислить вероятность, что
он угадает в 3-х случа-
ях из 4-х, в 9 случаях
из 10-ти.

И- одно отгадывание
А- предмет угадан.

$p = \frac{1}{2}$

$\begin{cases} n = 4 \\ m = 3 \end{cases}$

$\begin{cases} n = 10 \\ m = 9 \end{cases}$

$$P_4(3) = C_4^3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^1 = 4 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{4} = 0,25$$

$$P_{10}(9) = C_{10}^9\left(\frac{1}{2}\right)^9\left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{10}{2^{10}} = \frac{5}{2^9} \approx 0,01$$

Задача об удобных купе.
Купе считается удобным,
если в нем едут только
женщины или только
мужчины. Найти %-нт
удобн. купе в вагонах,
если считать вероятно-
сти приобрет. мужчиной или
жен. одного билета оди-
наковы.

И- покупка одного биле-
та в купе
А- купил мужчина

$p = \frac{1}{2}$

$n = 4$

$m = 4$ или 0

$$P_4(4) = C_4^4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{16}$$

В- купе
удобное

$$P_4(0) = C_4^0\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$$

$$P(B) = P_4(4) + P_4(0) = \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{1}{8} = 0,125$$

Ответ: около 12,5% всех
купе удобные

Задача 3

В ведре наход. ягода, требующая сушки. Утром эта ягода помещается на солнце, данная процедура повторяется 4 раза. Опред-ить степень высушивания ягод.

u – положение одной ягоды на солнце

A – конкретная точка на пов-ти ягод попала под лучи солнца

$p = \frac{1}{2}$ – вероятность успеха в одном испытании

$n = 4$ – число испытаний;

$m \geq 1$ – число „успехов"

$$P_n(m \geq 1) = 1 - P_4(m = 0) = 1 - P_4(0) = 1 - C_4^0 \left(\tfrac{1}{2}\right)^0 \left(\tfrac{1}{2}\right)^4 = 1 - \tfrac{1}{16} = \tfrac{15}{16} = 0{,}937 \approx 94\%$$

Вывод: 94% всей пов-ти ягоды будет высушено за 4 сушки.

§3 Наивероятнейшее число „успехов" в n независимых испытаний

m – число „успехов"

$m = 0, 1, 2, \ldots, n$

$P_n(m)$: $P_n(0), P_n(1), P_n(2) \ldots P_n(n)$

какая-то из вероятностей в нашем ряду будет наибольшей

Опр. Число успехов m_0 соотв-ее наибольш. вероятн-ти наз. **наивероятнейшим числом** или **модой**.

Теорема:

$$m_0 = \begin{cases} [(n+1)p] \text{ - целая часть числа } (n+1)p, \text{ если это число дробное} \\ (n+1)p,\ (n+1)p-1, \text{ если } (n+1)p \text{ целое} \end{cases}$$

Задача

Батарея дала 14 выстрелов по объекту. Вероятн. попадания при одном выстреле = 0,2. Найти наивероятн-ее число попаданий и вероятн. этого числа попаданий.

$n = 14$

$p = 0{,}2$

$(n+1)p = 15 \cdot \frac{1}{5} = 3$

по теореме имеем, что сущ-ет 2 моды:

$m_0 = 3$ и $m_0 = 2$

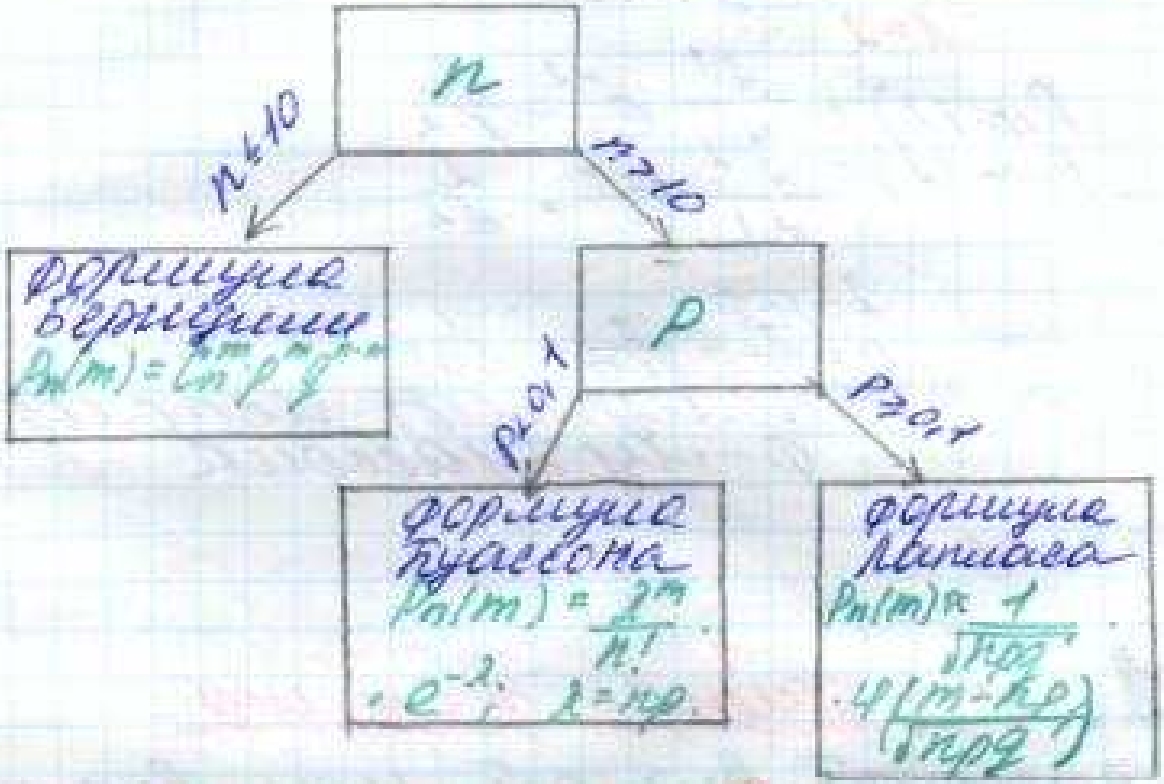
$P_{14}(3) = C_{14}^{3} \cdot 0{,}2^3 \cdot 0{,}8^{11} = 0{,}25$

$P_{14}(2) = C_{14}^{2} \cdot 0{,}2^2 \cdot 0{,}8^{12} = 0{,}25$

§4 Асимптотические формулы в схеме независимых испытаний

Если n велико, то ф-ой Бернулли пользов. не удобно.

Таблица использования формул в схеме независ. испыт.



Комментарий:

1. Вел-ну λ наз. средним числом наступления успехов в n-испыт-иях:

$\lambda = np \approx n \frac{m}{n} = m$

статистич. вероятн.

2. $\varphi(x) = 1/\sqrt{2\pi} \cdot e$ — затабулир-ван-ая ф-ия Лапласа

Задача

Опытный врач ставит 100 диагн. в месяц, ошибаясь в среднем 2 раза

сравнить, что произо-
шли 1 ошибка в ме-
сяц, чем 2 ошибки в
месяц

n — 1 диагноз
A — ошибка
$n = 100$
p — не дано
$\lambda = 2$

$P_{100}(1) = \frac{2^1}{1!} e^{-2} = \frac{2}{e^2}$

$P_{100}(2) = \frac{2^2}{2!} e^{-2} = \frac{2}{e^2}$

$\lambda = np$

$p = \frac{\lambda}{n} = \frac{2}{100} = \frac{1}{50} < 0{,}1 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ поэтому мы использ. ф-лу Пуассона

29.03.06

1. Случайные величины

Случ-ой вел-ой наз. вел-на, кот. принимает своё значение при любом исходе эксперимента.