событие наз. элементарным, если оно не явл. составным (очень часто элемент. событие наз. исходами)

Пример: и-брос игр. кости, A_i - число выпавших очков равно i

$A_1; A_2, \dots; A_6$ - элемент. события

Два события наз. равновероятными, если появление этих событий одинаково

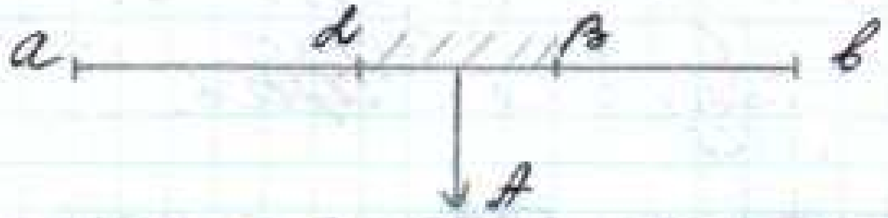
Обычно фактом равновозможности событий предполагается

Пример: и-брос игр. кости можно предположить что элемент. события $A_1, A_2, \dots, A_6$ равновозможные т.к. будем считать что игр. кость симметрична.

Геометрический способ вычисления вер-ти одномерный случай.

01.03.06

1 Пусть некот. испытание можно представить как случайный выбор (·) на числ. прям. (a,b) и пусть событ. A соответствует попаданию (·) в некот. отрезок $[\alpha,\beta] \subset (a,b)$



тогда вероятность события A вычисл. по ф-ле:

$$P(A) = \frac{\beta - \alpha}{a - b}$$

Задача

Перед окопами вдоль прямой линии на расст. 10 м установл. противотанковая мина. 1 этой линии движется танк, ширина кот 3 м. Какова вер-ть того, что он пройдет линию мин неповрежд-и.

с - середина точка

A - танк проезжает неповрежденным (1,5; 8,5)

$$P(A) = \frac{8,5-1,5}{10-0} = \frac{7}{10} = 0,7$$

Двумерный случай

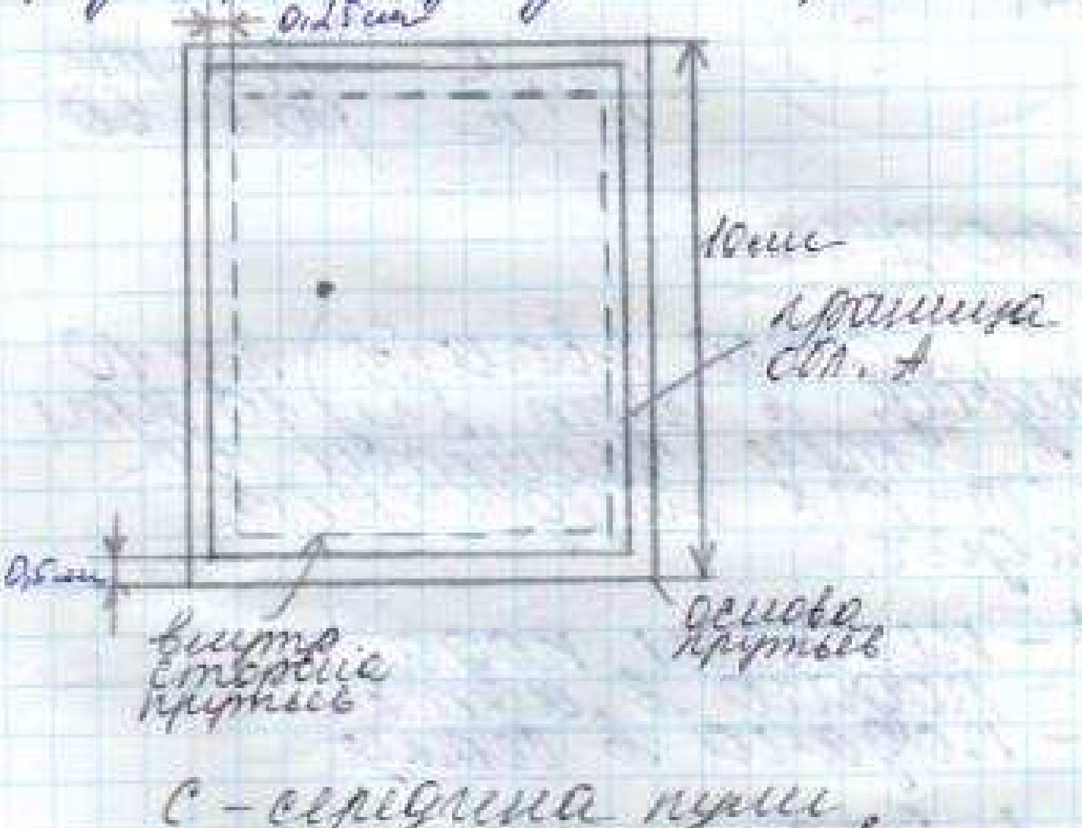
2. Пусть некот. испытание можно представить как случ. выбор (.) в некот. пл-ти обл. Ω

Пусть событ. A сост. в попадании (·) в нек. подобласть $A \subset \Omega$, тогда вер-ть события A опред. по ф-ле:

$$P(A) = \frac{S_A}{S_\Omega};$$

Задача

Производим выстрел пулей $d = 0,5$см по решетке с прутьями толщиной в 1см и квадратами 10×10 см. Какова вер-ть того, что пуля не заденет решетку?



C – середина пули.

$S_\Omega = 10 \cdot 10 = 100$ см^2

$S_A = (10 - 1 - 0,5)^2 = 8,5^2 = 7,23$

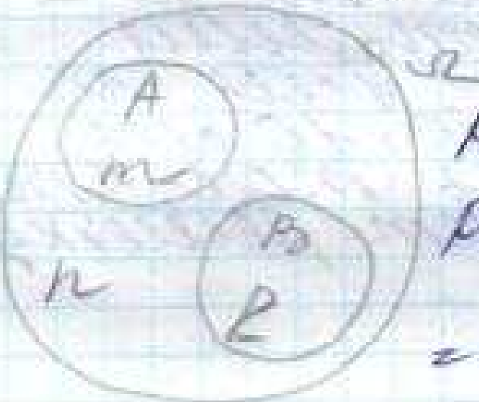
$P(A) = \frac{8,5^2}{10} = 0,85^2 = 0,723$

Метод разложение
-1-

1. Вероятность суммы несовмест. событий

Теорема:
Пусть A и B несовмест. события, тогда
$P(A+B)=P(A)+P(B)$

Док-во: (классич. ситуация)



$P(A)=\frac{m}{n}$; $P(B)=\frac{k}{n}$

$P(A+B)=\frac{m+k}{n}=$

$=\frac{m}{n}+\frac{k}{n}$ – вер-ть рав-ва

Задача

1 подача (волейб.) из 10 приход. в аут, 2 из 10 при[ход.] в сетку. Найти вероят-ть неудачной подачи.

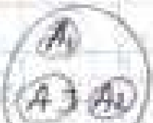
A – неудачн. подача
B – подача в ауте
C – подача в сетку

$A = B + C$ несовм. событ.

$P(A)=P(B)+P(C)=\frac{1}{10}+\frac{2}{10}=$

$=\frac{0,1+0,2}{10}=0,3$

Следствие 1:



Если $A_1, A_2, \dots, A_n$ — попарно несовместные, то $P(A_1+A_2+\dots+A_n) = P(A_1)+P(A_2)+\dots$

Следствие 2:

Если $A_1; A_2, \dots, A_n$ — образуют полн группу, то Σ вер-тей ево:
$P(A_1)+P(A_2)+\dots P(A_n)=1$.

Док-во:

$A_1+A_2+\dots+A_n=\Omega$

$1=P(\Omega)=P(A_1+A_2+\dots A_n)=P(A_1)+P(A_2)\dots$

Следствие 3:

$P(A)=1-P(\bar{A})$

Док-во:

$A, \bar{A}$ — полн группа событ.
по след 2 $\Rightarrow P(A)+P(\bar{A})=1 \Rightarrow$
$\Rightarrow P(A)=1-P(\bar{A})$

Замечание:
следствие 3 удобно пользов. в том случ, если вер-ти противоп. событ. вычислить проще чем вер-ть самого события.

Задача

Подбр. 2 игр. кости, какова вер-ть того, что Σ вып. очков >5

11	21	31	41	61
12	22	32		62
13	23			63
14				
16	26	36	46	66

Вычисл. в-ть противопол. событ. $\bar{A}$ – с вып. очков не больше 5

$P(\bar{A}) = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$

$P(A) = 1 - \frac{5}{18} = \frac{13}{18}$

Правило:

Если в описании событ. имеется слово (а, по) „хотя бы один", то целесообразно перейти к вычислению вер-ти противополож. события (не A), а затем по 1- найти рез-т.

Задача:

Из полного наб. 28 костей выбир. 3 кости. Какова вер-ть того, что среди них хотя бы 1 дубль

A – среди 3-х выбран. костей хотя бы 1 дубль

$\bar{A}$ – нет дублей.

Дано: 28к. = 7д. + 21 од.

3к. = 0д. – 3од.

$\bar{P} = \frac{m}{n}$ $\quad n = C_{28}^{3} = 9 \cdot 13 \cdot 28$

$m = C_{7}^{0} - C_{21}^{3} = 7 \cdot 10 \cdot 19$

$\bar{P} = \frac{7 \cdot 10 \cdot 19}{13 \cdot 9 \cdot 28} = 0.405$; $P(A) = 1 - 0.405 = 0.595$

2. Условная вер-ть:

Пусть A и B — 2 событ. каждое из кот. обладает своей вер-тью $P(A)$ и $P(B)$. Предполож., что мы облад. информац., что событ. A произошло. При этой доп. информ-ии вер-ть событ. B может изменяться. Эта вер-ть и наз-ся условной вер-тью соб. B при условии соб. A.

Задача

В урне 3 бел. и 3 черн. шара. Поочередно выбир. 2 шара.

A - 1-ый шар белый;
B - 2-ой шар белый
(классич. метод. вычисл.

$P(A)$ и $P(B)$

{1 2 3 4 5 6} - номера шаров
1 5
3 2 ≠ 2 3 ⇒ размещ.

$n = A_6^2 = 30$

Исходы благоприятству-ющие A

A:
1 2 по прин. умнож.
1 5 $m = 3 \cdot 5 = 15$
2 1 $P(A) = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$
...

Исходы благопр. соб. B

В: 5 1 $\quad m = 3\cdot 5 = 15$

2 3

4 2 $\quad P(B) = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$

1

1

Предположим мы знаем, что событ. А произошло. Тогда условная вер-ть соб. В $P_A(B) = \frac{2}{5}$ (классика на пальцах)

Опред: событ. А и В наз. независимыми, если вер-ть соб. В совпад.

$$P(B) = P_A(B)$$

в противном случае соб. наз-ся зависимыми

А и В - завис. событ., т.к.

$$P(B) = \frac{1}{2} \neq \frac{2}{5} = P_A(B)$$

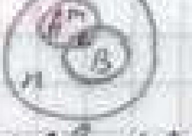
3. Теорема о в-ти произведения 2-х событий.

$$P(A\cdot B) = P(A)\cdot P(B)$$

Док-во: классич. случ.

$P(A\cdot B) = k/n$; $P_A(B) = k/m$;

$P(A) = m/n$; $k/n = m/n \cdot k/m$ — верное рав-во



Теорема: Вероятн-ть произв-ия равна вероятн-ти 1-ого множит. × на вероятн. 2-ого множителя.

Лекция №6

След-е 1. A и B незав. $\Rightarrow$ $P(AB) = P(A)P(B)$

След-е 2. Если $P(A) \neq 0 \Rightarrow$ $P_A(B) = \frac{P(AB)}{P(A)}$

Задача №1 (на след-е 1)

Команды встреч по теннису встречаются 3 пар. A_1B_1; A_2B_2; A_3B_3

вер. выбор: A_1 у $B_1 = 0,8$

A_2 у $B_2 = 0,4$

A_3 у $B_3 = 0,4$

вероят-ть выбор ком. A у ком. B

A - выиграли команды „A" у команды „B"

A_i - выиграли команды „A" в i-ой паре.

$A = A_1A_2A_3 + A_1A_2\bar{A}_3 + A_1\bar{A}_2A_3 + \bar{A}_1A_2A_3$

несовместные слагаемые

$A = 0,8\cdot0,4\cdot0,4 + 0,8\cdot0,4\cdot0,6 + 0,8\cdot0,6\cdot0,4 + 0,2\cdot0,4\cdot0,4 = 0,543$

вероят. выбора команды $A > B$

Задача №2 (на след-е 2)

О дележе шкуры убитого медведя. На охоте медведь был убит 1-ой пулей. В охоте участвовали 2 стрелка, кот. произвели по 1 выстрелу.

Вероятность попадания для кажд. 0,8 и 0,6. Как поделить выручку от продажи шкуры убитого медведя.

А - ровно 1 попадание (произошло)

A_i - попадан. i-го стрелка

Нужно найти условную вероятность $P_A(A_1)$

$$P_A(A_i) = P(AA_i)$$

$A = A_1\bar{A}_2 + \bar{A}_1 A_2$; $A = 0{,}8\cdot 0{,}4 + 0{,}2\cdot 0{,}6 = 0{,}44$

$A\cdot A_1 = A_1\bar{A}_2$; $P(AA_1) = 0{,}8\cdot 0{,}4 = 0{,}32$

$$\frac{P(A_1)}{A} = \frac{8}{11} = 73\%$$

Ответ: 1-ый стрелок 73% от выр

Задача 3 (О судьбе) (на тестиру)

Маша выучила 15 из 20 Какие выгоднее идти на экз. 1, 2 последним?

Найдем вероятность выбора хор. 5, если она 1

а) $P(A_1) = \frac{15}{20} = 0{,}75$

Найдем вер. " — " — " если 2-ой

б) A_1 - выбор счастливого билета

B - первый идущий выбор [illegible] билет

С – Маша выбрала счастливый билет.

$A_2 = B \cdot C + \bar{B} \cdot C$

$P(A_2) = P(B) \cdot P_B(C) + P(\bar{B}) \, P_{\bar{B}}(C) = \frac{15}{20} \cdot \frac{14}{19} + \frac{5}{20} \cdot \frac{15}{19} = \frac{15(14+5)}{20 \cdot 19} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4} = 0{,}75$

След. 3

Вероятность (·) большого кол-ва множителей $A_1 A_2 A_3 \ldots$

$P(A_1 A_2 A_3 \ldots) = P(A_1) P_{A_1}(A_2) P_{A_2}(A_3)$

Опр-ие:

События $A_1 A_2 A_3$ и т.д. наз-ся независимыми в совокупности, если любому из этих событий и произведения любого кол-ва оставшихся событий независимо.

След. 4

Если $A_1 A_2 A_3$ независимы в совокупности, то вероят. $(\times)$ $A_1 A_2 A_3 \ldots = (\times)$ вероят-й.

$P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3) = P(A_1) P(A_2) P(A_3) \ldots$

этим и пользовались след.

2. Вероятность появления хотя бы одного из данного набора событий.

Теорема:

Пусть вероят событий
$P(A_1) = p_1$; $P(A_2) = p_2$ ...
($q_1 = 1 - p_1$; $q_2 = 1 - p_2$) - вер противоположн. событ)

Тогда вероятность появления хотя бы одного из событий $A_1 A_2 A$ ...
$P(A_1 + A_2 + \ldots) = 1 - q_1 \cdot q_2 \ldots$
где $A_1, A_2, \ldots$ независ. в совокуп.

Док: $A = A_1 + A_2 + A \ldots$ - появление хотя бы одного из событий $A_1, A_2 \ldots$

$\bar{A}$ - ни одного из событий не произошло
$\bar{A} = \bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \ldots$

$P(\bar{A}) = P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) \ldots = q_1 \cdot q_2$
$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - q_1 \cdot q_2 \ldots$

Задача

Сколько нужно выпустить торпед по кораблю, что бы вероятность поражения была не менее 0,95 если вероят-ть пораж. 1-ой торпедой = 0,3

A - поражение цели
A_i - i торпеда попала в цель
$A = A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_n$ (д.б. найдена)

По теореме вероятн-ть A
$P(A) = 1 - q_1 q_2 \ldots q_n = 1 - 0{,}7^n$ не менее $0{,}95$

$0{,}7^n \le 0{,}05$ $\quad n \ge \log_{0{,}7} 0{,}05 =$
$\log_{0{,}7} 0{,}05$ $\quad = \dfrac{\ln 0{,}05}{\ln 0{,}7} = 8{,}4$

Ответ: $n = 9$

3. Ф-ла полной вероятности

Теорема: Пусть $H_1, H_2, \ldots$ образуют полную группу событий, тогда вероятность

$$P(A) = P(H_1)\cdot P_{H_1}(A) + P(H_2)\cdot P_{H_2}(A) + \ldots$$

Комментарий:
1. Ф-ла наз-ся ф-ой полной вероятн-ти
2. H_1, H_2 наз-ся гипотезами

$A = A\cdot H_1 + A\cdot H_2 + \ldots$
$P(A) = P(A\cdot H_1) + P(A\cdot H_2) + \ldots =$
$= P(H_1)\cdot P_{H_1}(A) + P(H_2)\cdot P_{H_2}(A) + \ldots$

Задача

Красная шапочка выходит из дома к бабушке,