Опред. вероятн-ть того, что судно не будет найдено за сутки, если около 40% всех затонувших судов находят за 8 часов

T - время поиска судна

$P(T<t)=F(t)=1-e^{-\gamma t} \Rightarrow T \sim P(\gamma)$

$F(8)=0{,}4$ $\quad 0{,}6=e^{-8\gamma}$

$1-e^{-8\gamma}=0{,}4$ $\quad -8\gamma=\ln 0{,}6$

$\gamma=\frac{\ln 0{,}6}{-8}=0{,}06$

$F(t)=\begin{cases}0; & t\le 0\\ 1-e^{-0{,}06t} & t>0\end{cases}$

$P(T>24)=1-F(24)=1-(1-e^{-0{,}06\cdot 24})=$

$=-e^{-1{,}44}=0{,}237 \Rightarrow 23{,}7\%$

3. Нормальный закон распределения.

Опр.: Непр. случ. вел-на наз-ся распределенной по нормальному закону с параметрами $a\in R$, $\sigma>0$, если плотность распределения имеет вид:

$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$

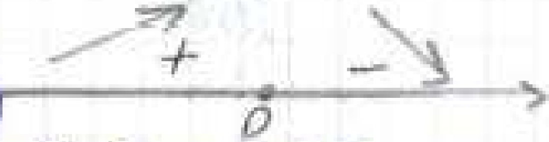
Замечание: при $a=0$, $\sigma=1$ нормальный закон наз-ся центрированным.

Обознач. $X\sim N(a;\sigma)$

Построим график плотн-ти:

$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

1. $D(f) = R$
2. $f(x)$ – четная
3. $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}(-x)$



$x = 0$ – т. max.
$y_{max} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$

4. $f''(x) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot$

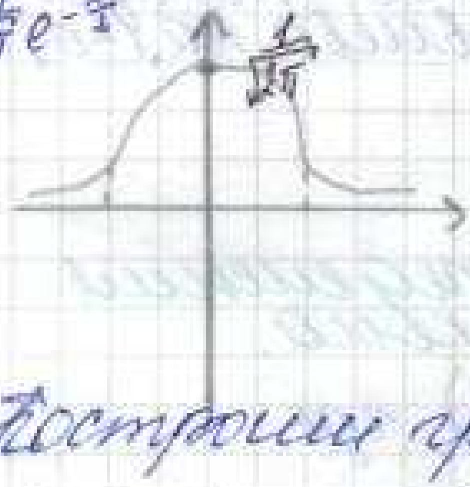
$\cdot\left(1 \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} + xe^{-\frac{x^2}{2}}(-x)\right) = \frac{-e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}(1-x^2) =$

$= -\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}(1-x)(1+x)$

5. Асимптота
$f(x) > 0$

6. $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0 \Rightarrow y = 0$ – горизонтальная асимптота.

$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

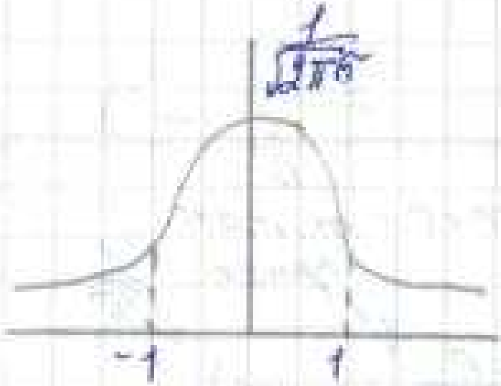


Эта кривая называется кривой Гаусса.

Построим график $y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma}}$

$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2}}$ Если $\sigma > 1$, то сжатие к оси Ox

Если $\sigma < 1$, то растяжение от оси Ox.

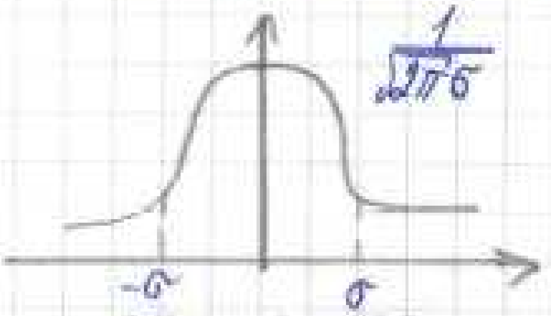


$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{(-\frac{x}{\sigma})^2}{2}}$, т.е.

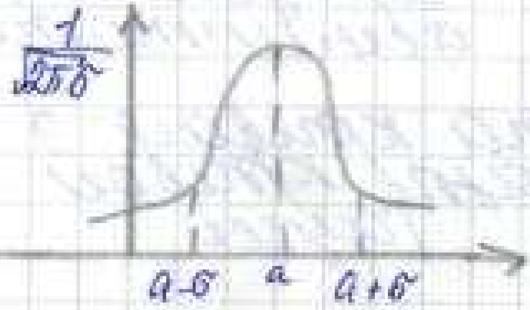
$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$

Если $\sigma > 1$, то идет растяжение от оси ОУ.

Если $\sigma < 1$, то сжатие к оси ОУ.



$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$



если $a>0$ то сдвиг вправо на „a" ед. если $a<0$ то сдвиг влево на „$(-a)$" ед.

4. Функция распределения нормального закона.

$F(x) = 0{,}5 + \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)$, где

$\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^y e^{-\frac{t^2}{2}}$ dt - интегральная ф-ция Лапласа (затабулир)

Для этой функции создана таблица значений $0 < y < 5$

Эта функция обладает следующими свойствами:

1. $\Phi(-y) = -\Phi(y)$, т.е. $\Phi(-1,25) = -\Phi(1,25)$
2. $\Phi(0) = 0$
3. $\Phi(y > 5) \approx 0,5$

Формула для вычисления вероятностей.

1. $P(\alpha < x < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right)$
2. $P(x < \beta) = F(\beta) = 0,5 + \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right)$
3. $P(x > \alpha) = 1 - F(\alpha) = 0,5 - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right)$
4. Вероятность того, что нормальн. случайная величина отклонится от среднего значения a по абсолютной величине, не более чем на δ.

$$P(|x - a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$$

Св-во нормальной распр. случ. величин.

$(X \sim M)$ $X \sim N(a, \sigma)$

1) $M(x) = a$
2) $D(x) = \sigma^2$
3) $\sigma(x) = \sigma$

03.05.06

1. $M(x) = a$, если $X \sim N(a, \sigma)$

$$M(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} (x-a+a)\, e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} (x-a)\, e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx}_{=0} +$$

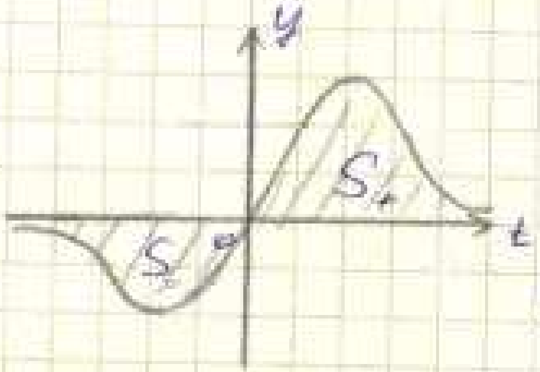
$$+ \frac{a}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx}_{=1}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (x-a)\, e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} t\, e^{-\frac{t^2}{2}} dt =$$

$x - a = t$

$dx = d(t+a) = dt$

$y = t\, e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ – нечетная функция



$S_+ = S_-$

$$= \int_{-\infty}^{0} t\, e^{-\frac{t^2}{2}} dt + \int_{0}^{+\infty} t\, e^{-\frac{t^2}{2}} dt = -S_- + S_+ = 0$$

Задача №91

20% яблок в некот. партии имеют вес больше чем 300 г и 10% имеют вес меньше чем 100 г. Найти средний вес яблок и среднее отклонение веса яблок, вес яблок распределен по нормальному закону считая

$W \sim N(a, \sigma)$ – вес яблока

$$\begin{cases} P(W > 300) = 0{,}2 \\ P(W < 100) = 0{,}1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0{,}5 - \Phi\left(\frac{300-a}{\sigma}\right) = 0{,}2 \\ 0{,}5 + \Phi\left(\frac{100-a}{\sigma}\right) = 0{,}1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Phi\left(\frac{300-a}{\sigma}\right) = 0{,}3 \\ -\Phi\left(\frac{100-a}{\sigma}\right) = 0{,}4 \end{cases} \qquad \Phi\left(\frac{a-100}{\sigma}\right) = 0{,}4$$

$$\begin{cases} \frac{300-a}{\sigma} = 0{,}84 \\ \frac{100-a}{\sigma} = 1{,}28 \end{cases} \qquad \begin{cases} 300 - a = 0{,}84\sigma \\ a - 100 = 1{,}28\sigma \end{cases} +$$

$$200 = 2{,}12\sigma$$

$$\sigma = \frac{200}{2{,}12} = 94{,}34$$

$$a = 300 - 0{,}84\sigma = 300 - 0{,}84 \cdot 94{,}34 = 220{,}75$$

Ответ: $a = 221$, $\sigma = 94$

2. Св-ва нормальных случайных величин.

а) Правило 3-х сигм. $X \sim N(a, \sigma)$

$$P(a - 3\sigma < X < a + 3\sigma) \approx 1$$

Комментарий:

Практич. все значения норм. случ. вел-ны сосредоточены в интервале $(a - 3\sigma, a + 3\sigma)$

Вывод:

$P(a-3\sigma < x < a+3\sigma) = P(-3\sigma < X-a < 3\sigma)$
$= P(|X-a| < 3\sigma) = 2\Phi(3\sigma/\sigma) = 2\Phi(3) =$
$= 2\cdot 0{,}49865 = 0{,}99730 \approx 99{,}7\%$

б) Если $\alpha, \beta \in Z$, то
$\alpha X + \beta \sim N(\alpha a + \beta, \alpha\sigma)$

в) Если $Y \sim N(\beta, \gamma)$, то
$X \pm Y \sim N(a \pm \beta, \sqrt{\sigma^2 + \gamma^2})$

Задача №2

Пусть вес яблок нормальная случ. вел-на, возможные знач. кот. сосредоточено в интервале от 100 до 200 гр. Найти %-т яблок с весом больше 180 гр.

$X \sim N(a, \sigma)$
$x \in (100, 200) \Rightarrow$
по правилу 3 сигм

$$\begin{cases} a - 3\sigma = 100 \\ a + 3\sigma = 200 \end{cases} + \quad \begin{matrix} 2a = 300 \\ a = 150 \end{matrix}$$

$6\sigma = 100$
$\sigma = \frac{100}{6} = \frac{50}{3} = 16{,}7$

$X \sim N(150, 16{,}7)$

$P(X > 180) = 0{,}5 - \Phi\left(\frac{180-150}{16{,}7}\right) =$

$= 0{,}5 - \Phi\left(\frac{30}{16{,}7}\right) = 0{,}5 - \Phi(1{,}80) =$
$= 0{,}5 - 0{,}4641 = 0{,}0359$ Ответ: 3,6%.

Закон больших чисел

Под з-ом больших чисел понимается ряд утверждений касающихся поведения большого кол-ва случ-ых величин

I. Предельная теорема Ляпунова

Пусть $X_1, X_2, \ldots X_n$ большое кол-во одинаково распределенных случ-ых величин $(n>10)$

$M(X_i)=a \quad D(X_i)=\sigma^2$

тогда $X = X_1+X_2+\ldots+X_n$ (почти по норм-ому закону) $\sim N(n\cdot a, \sqrt{n}\cdot\sigma)$

Задача

На тестировании 1-ин студент на решение 1-ой задачи тратит 8 мин. со средним откл. в 2 мин. Найти вероятн. того, что решит. 20 зад. он потратит не более 3 часов.

T_i – время решения i-ой задачи $i=1,2,\ldots,20$

$T = T_1+T_2+\ldots+T_{20}$

$M(T_i)=8 \quad \sigma(T_i)=2$

$T \overset{\text{почти}}{\sim} N(20\cdot 8, \sqrt{20}\cdot 2)$

$T \sim N(160;\ 8{,}9)$

$P(T<180) = 0{,}5+\Phi\left(\frac{180-160}{8{,}9}\right) = 0{,}5+\Phi(2{,}24) = 0{,}5+0{,}4881 = 0{,}9881$

$98{,}8\%$

II. Следствие из предельной теоремы Ляпунова

Пусть m - это число успехов в схеме независимых испытаний с параметрами n - число испытаний, p - вероятность успеха в 1-ом испытании
$(n \to \infty,\ n > 10)$
тогда $m \sim N(np, \sqrt{npq})$

Вывод:
x_i - число успехов в i-ом испытании
тогда $m = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$

x_i:

x_i	0	1
p_i	q	p

$M(x_i) = p$
$D(x_i) = p - p^2 = pq$

по теореме Ляпунова
$m \overset{почти}{\sim} N(np, \sqrt{n}\sqrt{pq})$
$m \sim N(np, \sqrt{npq})$

Задача
Вероятность решения каждой задачи из 20 предложенных = 0,7. Найти %-нт абитуриентов решающих более 18 задач. Имеем схему независ. испыт. с параметрами
$n = 20$ - число реш. задач
$p = 0{,}7$ (число успехов)
по след-ию (теоремы)
$m \overset{почти}{\sim} N(20 \cdot 0{,}7;\ \sqrt{20 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3})$
$m \sim N(14;\ 2{,}05)$

$P(m>18)=0{,}5-\Phi\left(\frac{18-14}{2{,}1}\right)=$
$=0{,}5-\Phi(1{,}90)=0{,}5-0{,}4713=0{,}0287$
$\Rightarrow$ 2,9%

III. Неравенство Чебышева

Пусть $M(X)=a$, $D(X)=\sigma^2$ (з-ны X неизвестны), тогда

$$P(|X-a|<\varepsilon)\geq 1-\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

Следствие: $P(|X-a|\geq\varepsilon)\leq\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$

Вывод следствия:

$$1-P(|X-a|\geq\varepsilon)\geq 1-\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

$$P(|X-a|\geq\varepsilon)\leq\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

Комментарий. Этим неравенством целесообразно польз-ся если $\sigma<\varepsilon$

Задача

Средняя t-ра воздуха в отопит. период $=20°C$, а среднее отклонение $=2°C$. С помощью нер-ва Чебышева оценить снизу вероятн. того, что t-ра отклонится от средней по абсолют. вел-не менее чем на 4°

$$P(|T-a|<4)\geq 1-\frac{2^2}{4^2}=1-\frac{4}{16}=\frac{3}{4}=0{,}75$$

в 70% случаях t в объеме

будет лежать в пред. от 16° до 24° (не меньше чем в 75% случаев)

Задача

При помощи нерав. Ч. найти диапазон изменения t-ры $(20-t;\ 20+t)$, в которой t-ра в будущем будет более чем в 90%-ах случаев.

$$0{,}9 = 1 + \frac{2^2}{\varepsilon^2} \qquad \frac{4}{\varepsilon^2} = 0{,}1 \qquad \varepsilon^2 = 40$$

$$\varepsilon = 2\sqrt{10} = 6{,}3 \Rightarrow t = 6{,}3$$

Действительно, по неравенству Чебышева

$$P(|T-20| < 6{,}3) \geq 1 - \frac{2^2}{6{,}3^2} = 0{,}9$$

более чем 90% случаев t-ра в действительности отклон. от среднего значения не более чем на 6,3°, т. е. будет лежать в пред-ах

$$(20-6{,}3;\ 20+6{,}3) = (13{,}7;\ 26{,}3)$$