I. Понятие доверительного интервала, доверит-ой вер-ти

Точечная оценка дает лишь приближенное значение оцениваемого параметра, при этом мы не знаем степень точности этой оценки, поэтому вводят понятие доверит-ого интервала.

Опр.: Интервал (θ_1^*, θ_2^*), где

$$\theta_1^* = \theta_1^*(x_1, x_2, \dots, x_n)$$
$$\theta_2^* = \theta_2^*(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

наз-ся доверительным интервалом (интервальной оценкой) для оцениваемого парам-ра θ с доверит. вероятн-тью γ (с уровнем надежности)

γ ($\gamma = 0{,}9;\ 0{,}95;\ 0{,}99;\ 0{,}999$), если $P(\theta_1^* < \theta < \theta_2^*) = \gamma$

Комментарий:

Пусть в рез-те наблюдений будет найден доверит-ый интервал для матем. ожид-ия $(2{,}1;\ 4{,}2)$ с $\gamma = 0{,}95$. К этому интервалу надо отн-ся следующим образом: доверять этому инт-ву нужно на 95%.

Допустим проведены сто серий наблюдений (испытаний), каждая серия состоит из большого кол-ва наблюдений и в 5 случаях из 100 $M(x)$ превышает либо нахождения доверит-ого интервала

II Пример вычисления доверит-ого интервала для $M(x)$, где $x \sim N(a, \sigma)$ причем σ - известный параметр.

Найдем значение $\delta > 0$:

$$P\left(\left|\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n} - a\right| < \delta\right) = \gamma$$

Утв

случайная вел-на

$$\bar{X} = \frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n} \sim N\left(a, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Док-во:

1) Наблюд-ые случ-ые велич.

$X \sim N(a, \sigma) \Rightarrow X_i \sim N(a, \sigma) \Rightarrow$ по св-ву норм. случ. велич.

$\Rightarrow x_1+x_2+\ldots+x_n \sim N(na, \sqrt{n}\,\sigma)$; - по св-ву норм. случ. величин

$$\Rightarrow \bar{X} = \frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n} \sim N\left(a, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Найдем δ.

напомним ф-лу: если $X \sim N(a, \sigma)$, то

$P(|\bar{x}-a|<\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$

Получим $P(|\bar{x}-a|<\delta)=$

$= 2\Phi\left(\frac{\delta}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)=\gamma$ $\qquad \gamma=1$

$$\Phi\left(\frac{\sqrt{n}\cdot\delta}{\sigma}\right)=\frac{\gamma}{2}$$

По табл. знач. $\Phi(x)$ находим

$$\frac{\sqrt{n}\cdot\delta}{\sigma}=t_{\gamma/2};\quad \delta=\frac{t_{\gamma/2}\cdot\sigma}{\sqrt{n}}$$

Итак: $P\left(|\bar{x}-a|<\frac{t_{\gamma/2}\sigma}{\sqrt{n}}\right)=\gamma$

$$P\left(-\frac{t_{\gamma/2}\sigma}{\sqrt{n}}<\bar{x}-a<\frac{t_{\gamma/2}\sigma}{\sqrt{n}}\right)=\gamma$$

$$P\Big(\underbrace{\bar{x}-\frac{t_{\gamma/2}\sigma}{\sqrt{n}}}_{\theta_1^*}<a<\underbrace{\bar{x}+\frac{t_{\gamma/2}\sigma}{\sqrt{n}}}_{\theta_2^*}\Big)=\gamma$$

Доверительным интервалом для $M(X)$ наблюд. нормальн. случ. величины с уровнем надежности γ явл. следующий интервал.

$$\left(\bar{x}-\frac{t_{\gamma/2}\sigma}{\sqrt{n}};\ \bar{x}+\frac{t_{\gamma/2}\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

III. Доверит-ые интервалы для $M(x)$, $D(x)$, наблюдаемое норм-ой случ-ой вел-ой (без вывода).

а) Для $M(x)$

$$\bar{x}_в-\frac{t_{\gamma,n}\cdot S}{\sqrt{n}}<M(x)<\bar{x}_в+\frac{t_{\gamma,n}\cdot S}{\sqrt{n}}$$

$\bar{x}_в$ – выборочное среднее
S – исправленное выборочное среднее квадратич-е откло-нение
n – объем выборки.
$t_{\gamma, n}$ – табличное значение зависящее от γ – уровня на-дежн-и
n – объема выборки
прил-ие №3.

Наш пример $\bar{x}_в = 24{,}7$

$D_в = 5{,}91$; $S^2 = \frac{30}{29} \cdot 5{,}91 = 6{,}11 = 2{,}47$

$S = \sqrt{S^2} = 2{,}47$; $n = 30$; $\sqrt{n} = 5{,}48$

$t_{\gamma, n} = t_{0{,}95; 30} = 2{,}045$

$\frac{t_{\gamma, n} \cdot S}{\sqrt{n}} = \frac{2{,}045 \cdot 2{,}47}{5{,}48} = 0{,}92$

$24{,}7 - 0{,}92 < M(x) < 24{,}7 + 0{,}92$

$23{,}78 < M(x) < 25{,}62$

б) для дисперсии

$(S - q_{\gamma, n} \cdot S)^2 < D(x) < (S + q_{\gamma, n} \cdot S) =$

$S = 2{,}47$

$q_{\gamma, n} =$ (прил. IV) $= 0{,}28$

$q_{\gamma, n} \cdot S = 0{,}28 \cdot 2{,}47 = 0{,}69 =$

$(2{,}47 - 0{,}69)^2 < D(x) < (2{,}47 + 0{,}69)^2$

$3{,}17 < D(x) < 9{,}99$

Д/з 1) Нужно доверит. ин-терв. для $M(x)$.
2) $D(x)$ оформить на отдельн. странице поместить в конец.

IV. Проверка статистич-х гипотез. Виды гипотез.

Статистич. гипотеза наз-ся гипотеза по поводу закона распред-ия наблюд. случ. вел-ны, либо ее параметр.

Пример: 1) X - распределена по норм-ому закону
2) $M(X) > 5$

Гипотезы бывают простыми и сложными. Сложная гипотеза состоит из неск. гипотез.
2 выше прив. примера - сложн. гипотезы.

Пример: простых гипотез

1) $X \sim N(0,1)$
2) $M(X) = 6$.

Гипотезы бывают основными и альтернативными.

Обозначения

H_0 - основная гипотеза
H_1 - альтернативн. гипотеза
H_0, H_1 - противополож. друг другу события

V. Ошибки 1 и 2 родов при принятии гипотез.

Опр.: Ошибкой 1-ого рода наз-ся ошибка, при которой отвер-ся верная гипотеза.

Ошибкой 2 рода наз-ся ошибка при которой прин-ся неверная гипотеза.

Вероятность ошибки 1-ого типа наз-ся уровень значимости критерия и обозн-ся через α.

$\alpha = 0{,}1;\ \underline{0{,}05};\ 0{,}01;\ 0{,}001$

Нельзя увлек-ся уменьшением уровня значимости критерия.

Уменьшая вероятн. ошибки 1-ого рода мы начинаем принимать больше гипотез в том числе и неверных. Это значит увелич-ся вероятн-ть ошибки второго рода (неверн. гипотез).

2. Понятие критерия

Опр.: К. критерием при проверке гипот. будем называть случайн. вел-ну $K(x_1, x_2, \dots, x_n)$ зависящ. от по значению которой мы будем либо принимать гипотезу либо ее отвергать.

Опр.: Критич. обл-тью критерия будем наз-ть некотор. числовой интервал при попадании в который критерия гипотеза будет отверг-ся.

Критич-ие обл-и бывают правосторон. $(K_p; +\infty)$

2. левосторонний $(-\infty; k_{кр})$.

3. двусторонний $(-\infty; k_{кр}) \cup (k_{кр}^2; +\infty)$

Границы точки критич. обл-ей наз-ся критич-ими точками. Областью принятия гипотезы наз-ся числовой интервал при попадании критерия в который гипотеза принимается.

3. χ^2 - критерий Пирсона для проверки гипотезы о законе распределения наблюдаемой случ. величины.

Опр: Случайная вел-на $\chi^2_{набл.} = \sum_{i=1}^{m} \frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'}$

где m - число интервалов значе-ний наблюдаемой случ-ой вел-ны.

$x_i \div x_{i+1}$	$19 \div 21$	$21 \div 23$	$23 \div 25$	$25 \div 27$	$27 \div 29$
n_i	2	7	9	6	3

для которых частота $n_i > 5$

n_i - эмпирич-ая частота

n_i' - теоретич-ая частота, вычисленные в предположении того, что выдвинутая гипотеза о законе распределения будет верной

наз-ся χ^2 - квадрат критерием Пирсона.

Комментарий: каждое слагаемое в сумме представляет собой относит-ую на-решность эмпирич-х и теоретич-х частот при выполнении гипотезы значение χ^2 не должно быть большим.

Критич-ой об-ью для данного критерия будет правосторонняя об-ть типа ($кр$; $+\infty$) в математ-ой статистике ввод-ся закон случайной величины χ^2 плотн-ть распред-ия которой имеет следующий вид (рис. 1) и зависит от парам-ов n.

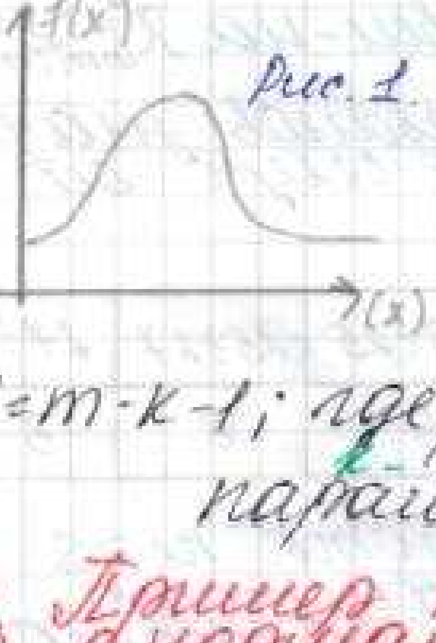

Рис. 1

В учебниках привод-ся табл. критич-х точек $кр.(\alpha; V)$, где

α - уровень знач-сти критерия

$V = m - k - 1$; где m - число интервал.

k - число неизвестн. парам. в з-не распред-ия

8.4 Пример проверки гипотезы о нормальном распределении с уровнем значимости $\alpha = 0,05$

а) На основании внешнего вида гистограмм выдвигаем гипотезу о законе распределения наблюд-ых случ-ых величин.