Глава 4

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ГРАФОВ

Теория графов — раздел дискретной математики, имеющий многочисленные приложения в различных областях экономики, социологии, техники.

Теория графов «открывалась» независимо много раз. Наиболее раннее известное упоминание этой теории встречается в работах Л. Эйлера, хотя проблему, которой он занимался можно рассматривать как обычную головоломку. Затем Г. Кирхгоф, занимаясь изучением электрических цепей, и А. Кэли, рассматривая проблему перечисления изомеров в органической химии, вновь подошли к решению задач теории графов. С тех пор многие исследователи, формируя модели в своих предметных областях, приходили к описанию их с помощью теории графов. Сам термин «граф» впервые был введен в 1936 году Д. Кенигом.

Методы теории графов успешно применяются в современной прикладной науке в задачах управления производством, при проектировании различных физических систем, являются основой математического обеспечения систем обработки информации. Теоретико-графовый подход используется в линейном программировании и исследовании операций, сетевом планировании и управлении. Теория графов тесно связана со многими разделами современной математики, содержит много интересных проблем, не решенных до настоящего времени.

4.1. Ориентированные и неориентированные графы. Основные понятия. Примеры приложений теории графов

Говорят, что задан *ориентированный граф* $G = \langle V, \Gamma \rangle$, если указаны два множества: непустое множество V и множество Γ упорядоченных пар $\langle v, y \rangle$, где $v, y \in V$. Элементы множества V называют *вершинами* графа G, упорядоченные пары $< v, y >$ — *дугами* графа.

Граф можно изобразить на плоскости, ставя в соответствие каждой вершине v точку, а каждой дуге $< v, y >$ — линию со стрелкой, соединяющую эти точки.

Пример 4.1. На рис. 4.1 приведены два изображения ориентированного графа $G =< V, \Gamma >$, где $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, $\Gamma = \{< v_1, v_2 >, < v_1, v_3 >, < v_3, v_2 >, < v_3, v_5 >, < v_5, v_1 >, < v_5, v_2 >, < v_5, v_3 >\}$.

Поскольку множество упорядоченных пар Γ есть ни что иное как бинарное отношение на множестве V, то часто говорят, что граф изображает некоторое бинарное отношение, и бинарные отношения на конечных множествах иллюстрируются такими рисунками. Граф может служить моделью для всякой системы, содержащей бинарное отношение.

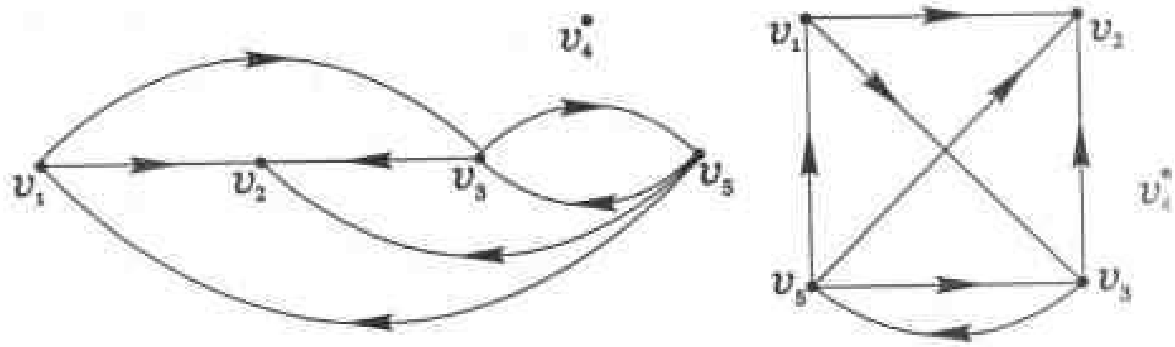


Рис. 4.1.

Наряду с понятием ориентированного графа используют также понятие неориентированного графа.

Говорят, что задан *неориентированный граф* $G =< V, Q >$, если указаны два множества: непустое множество V и множество Q некоторых пар $\{v, y\}$ элементов из V. Элементы множества V называют вершинами графа $G =< V, Q >$, неупорядоченные пары $\{v, y\}$ — ребрами. При изображении неориентированного графа на плоскости элементам множества V соответствуют точки, а ребрам — линии без стрелок, соединяющие соответствующие вершины.

Пример 4.2. На рис. 4.2 изображен неориентированный граф с множеством вершин $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ и множеством ребер $Q = \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_2, v_3\}\}$.

Неориентированные графы можно считать частными случаями ориентированных графов, соответствующих симметричным

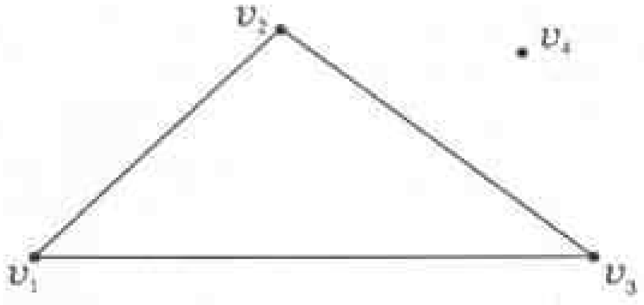


Рис. 4.2.

бинарным отношениям, т. е. таким ориентированным графам, которые наряду с каждой дугой $< v, y >$ содержат и дугу $< y, v >$. Ниже, каждый раз будем оговаривать, с каким типом графов — ориентированным или неориентированным имеем дело в соответствующих рассмотрениях.

Приведем примеры моделей и прикладных областей, в которых используются понятия и методы теории графов.

1. Модели организационных структур.

Вершинами являются различные объекты организационной структуры, дугами или ребрами — информационные, управленческие, технологические связи между объектами.

2. Модели, отражающие структуру и поведение социальных групп.

Вершины графа — члены общества или коллективы, дуги — отношения между ними. Такими графами (социограммами) описывается структура взаимоотношений между лицами или группой лиц и определяются показатели, оценивающие степень влияния, согласованности взаимодействия, напряженности между ними.

3. Модели обменных схем.

Вершины графа — участники обменной схемы, дуги — потоки финансовых или материальных ресурсов между ними. Обменные схемы возникают при анализе и оптимизации таких явлений как взаимозачеты, бартер.

4. Транспортные задачи.

Это класс задач, особенно часто встречающийся при планировании поставок, распределении товаров между потребителями и требующий оптимизации размещения пунктов производства и потребления, потоков грузов и др. Вершинами графа служат пункты размещения, дугами или ребрами — транспортные или информационные маршруты.

5. Задачи сетевого планирования и управления. Ориентированный граф является естественным средством описания и анализа сложных проектов, требующих выполнения большого числа взаимосвязанных операций (работ). Такие задачи календарно-сетевого планирования и управления заключаются в определении оптимальной последовательности выполнения операций и распределения ресурсов между ними. Критерием оптимальности являются время выполнения проекта, объем затрат, степень риска и прочее.

Рассмотрим ряд основных определений, связанных с понятием графа. Если $< v, y >$ — дуга, то говорят, что она *исходит* из вершины v (ее *начало*) и заходит в вершину y (ее *конец*). Множество вершин, исходящих из вершины v обозначают Γv, т. е. $\Gamma v = \{y| < v, y > \in \Gamma\}$. Соответственно $\Gamma^{-1} y = \{v| < v, y > \in \in \Gamma\}$. Дуга называется инцидентной вершине v, если она заходит в v или исходит из нее. Дуга вида $< v, v >$ называется *петлей*. Вершина, не имеющая инцидентных дуг называется *изолированной*. Две вершины называются *смежными*, если существует дуга, инцидентная им обоим. *Степенью* вершины называется число инцидентных ей дуг.

В графе, изображенном на рис. 4.1 дуга $< v_1, v_2 >$ исходит из v_1 и заходит в v_2, $\Gamma v_1 = \{v_2, v_3\}$, $\Gamma v_2 = \emptyset$, дуга $< v_1, v_2 >$ инцидентна вершинам v_1 и v_2, вершина v_4 — изолированная и степень ее равна нулю, степень вершины v_3 равна четырем, петель в этом графе нет.

Подграфом называется часть графа, образованная подмножеством вершин вместе со всеми дугами, соединяющими вершины из этого множества (только те, оба конца которых входят в подграф).

Подграф называется *собственным*, если он отличен от самого графа.

Два графа $G =< V, \Gamma >$ и $G' =< V', \Gamma' >$ называются *изоморфными*, если существует биекция $f : V \to V'$ между множеством вершин, сохраняющая смежность, т. е. $< v, y > \in \Gamma \Longleftrightarrow \Longleftrightarrow < f(v), f(y) > \in \Gamma$. Заметим, что отношение изоморфизма на множестве ориентированных графов есть отношение эквивалентности.

Последовательность дуг графа такая, что начало каждой последующей дуги совпадает с концом предыдущей называется *путем*. *Длиной* пути называется число входящих в него дуг, причем каждая дуга считается столько раз, сколько она встречалась в пути. Путь обозначается упорядоченной последовательностью входящих в него вершин или дуг.

Пример 4.3. Путь, изображенный на рис. 4.3 можно обозначить как $< v_1, v_2 >$, $< v_2, v_3 >$, $< v_3, v_4 >$ или v_1, v_2, v_3, v_4.

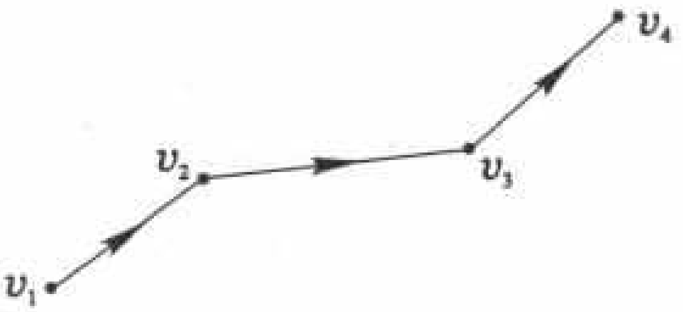


Рис. 4.3.

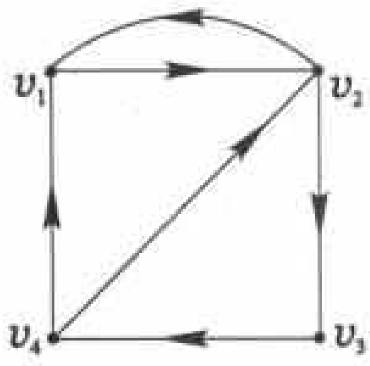


Рис. 4.4.

Путь, у которого начало первой дуги совпадает с концом предпоследней, называется *контуром*. Путь (контур) называется *простым*, если все его дуги различны. Путь (контур) называется *элементарным*, если все его вершины различны (за исключением первой и последней).

Пример 4.4. В графе, изображенном на рис. 4.4 последовательность дуг $< v_1, v_2 >$, $< v_2, v_3 >$, $< v_3, v_4 >$, $< v_4, v_2 >$, $< v_2, v_1 >$ — простой, но не элементарный контур.

В дальнейшем часто будем использовать следующее утверждение.

Утверждение 4.1. *Из каждого пути, соединяющего вершины v и y можно выделить простой путь, соединяющий эти вершины.*

Доказательство проведем индукцией по числу n дуг пути. При $n = 1$ утверждение очевидно. Пусть для всех путей, содержащих менее чем n дуг утверждение верно. Докажем его для путей с n дугами. Пусть последовательность вершин $v_1, v_2, \dots, v_{n+1}$, где $v_1 = v$, $v_{n+1} = y$ — один из таких путей. Если все вершины этого пути различны, то он простой. В противном случае, некоторые две его вершины v_i и v_j совпадают. Если $i = 1$, то $v_1, v_{j+1}, \dots, v_{n+1}$ — путь, соединяющий вершины v и y и содержащий $n - 1$ дугу; если $i \geqslant 2$, то таким путем является путь $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}, v_j, \ldots, v_{n+1}$. По индуктивному предположению, из каждого из этих путей можно выделить простой путь, соединяющий вершину v и y.

Для неориентированных графов используют те же термины «смежность», «изолированность», «инцидентность», «петля», «подграф», что и для неориентированных графов, и некоторые новые термины.

Цепью в неориентированном графе $G =< V, Q >$ называется последовательность ребер, которая может быть превращена в путь введением соответствующей ориентации на ребра. *Длиной цепи* называется число входящих в нее ребер, причем каждое ребро считается столько раз, сколько оно встречалось в цепи. Цепь, у которой первая вершина совпадает с последней называется *циклом*. Цепь (цикл) называется *простой*, если в ней никакое ребро не встречается дважды. Цепь (цикл) называется *элементарной*, если все ее вершины (за исключением первой и последней) различны.

По аналогии с утверждением 4.1 можно доказать, что из каждой цепи, соединяющей вершины v и y можно выделить простую цепь, соединяющую эти вершины.

Неориентированный граф $G =< V, Q >$ называется *связным*, если любая пара его вершин соединена цепью. *Компонентой связности* графа $G =< V, Q >$ называется максимальный связный подграф (т. е. не являющийся собственным подграфом никакого другого связного подграфа $G =< V, Q >$).

Пример 4.5. На рис. 4.5, *а*) изображен граф с тремя компонентами связности, указанными на рис. 4.5, *б*), *в*), *г*).

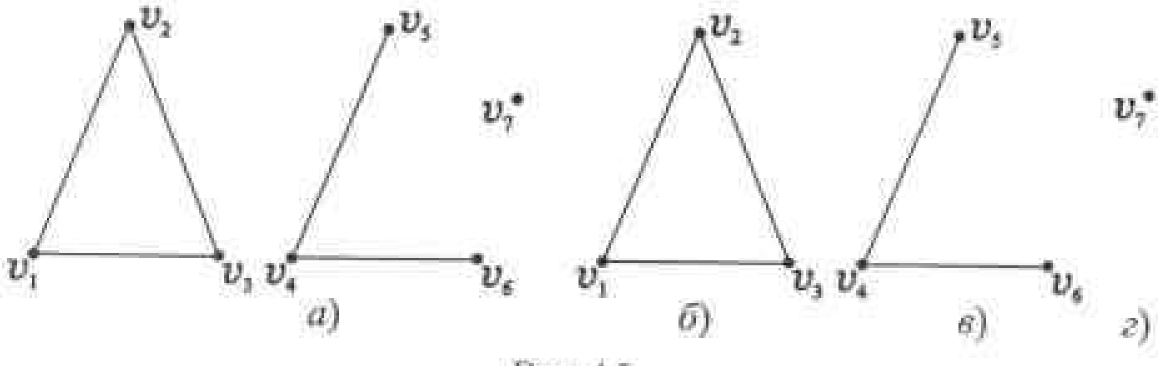


Рис. 4.5.

Пусть $G = (V, Q)$ неориентированный граф с n вершинами m ребрами и p компонентами связности. Тогда число $\gamma(G) = m-n+p$ называется *цикломатическим числом графа* G. Если

G связный граф, то $p = 1$ и $\gamma(G) = m - n + 1$.

В неориентированном графе можно определить понятие *расстояния* $d(v, y)$ между вершинами v и y, считая его равным числу ребер в кратчайшей простой цепи, соединяющей вершины v и y, и положив $d(v, y) = \infty$, если такой цепи нет. Расстояние $d(v, y)$ удовлетворяет аксиомам метрики:

1. $d(v, y) \geqslant 0$ и $d(v, y) = 0$ тогда и только тогда, когда вершины v и y совпадают.
2. $d(v, y) = d(y, v)$.
3. $d(v, y) + d(y, z) \geqslant d(v, z)$.

Заметим, что если попытаться аналогично определить понятие расстояния в ориентированном графе, то не выполнится аксиома 2.

В ориентированном графе $G =< V, \Gamma >$ с множеством вершин $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ вершина v_j называется *достижимой* из вершины v_i, если существует путь из v_i в v_j. Граф называется *односторонне связным*, если для любых двух его вершин по крайней мере одна достижима из другой. Если одновременно каждая вершина v_i достижима из v_j и v_j достижима из v_i, то граф называется *сильно связным*.

Компонентой односторонней связности (*сильной связности*) называется максимальный односторонне связный (сильно связный) подграф данного графа.

Для иллюстрации понятия сильной связности рассмотрим следующую задачу. Пусть граф $G =< V, \Gamma >$ представляет структуру руководства или «влияний» в некоторой организации. Требуется выделить множество сотрудников, которые имеют равную власть или оказывают равное влияние друг на друга (например, составляют комитет). Если множество V вершин графа — это множество сотрудников данной организации, и две вершины v и y соединены дугой $< v, y >$ тогда и только тогда, когда v имеет влияние на y, то множество сотрудников, имеющих равное влияние — это элементы одной компоненты сильной связности.

Задачи и упражнения

4.2. Матричное задание графа

4.2.1. Матрицы смежности и матрицы инциденций

Для задания графов обычно используют матрицы смежности и матрицы инциденций. Матричное задание графа удобно, например, при решении задач с использованием вычислительных машин.

Пусть $G =< V, \Gamma >$ — ориентированный граф с множеством вершин $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Квадратная матрица $A = \|a_{ij}\|$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, у которой

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если существует дуга, исходящая из } v_i \\ & \quad \text{и заходящая в } v_j; \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

называется *матрицей смежности* ориентированного графа G.

Аналогично определяется матрица смежности неориентированного графа $G =< V, Q >$ с множеством вершин $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Его матрица смежности $A = \|a_{ij}\|$, $i, j = 1, 2, \dots, n$ задается условием

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если вершины } v_i \text{ и } v_j \text{ смежны;} \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Заметим, что матрица смежности неориентированного графа — симметрическая.

Более информативной, чем матрица смежности является матрица *инциденций.*

Пусть $G =< V, \Gamma >$ — ориентированный граф без петель с множеством вершин $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ и множеством дуг $\Gamma = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$. Матрица $B = \|b_{ij}\|$ порядка $n \times m$ у которой

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если дуга } u_j \text{ исходит из вершины } v_i, \\ -1, & \text{если дуга } u_j \text{ заходит в вершину } v_i, \\ 0, & \text{если дуга } u_j \text{ не инцидентна вершине } v_i \end{cases}$$

называется *матрицей инциденций* ориентированного графа G.

Для неориентированного графа без петель $G =< V, Q >$ с множеством вершин $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ и множеством ребер $Q = \{q_1, q_2, \dots, q_m\}$ матрица инциденций $B = \|b_{ij}\|$ порядка $n \times m$ задается условием

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если ребро } q_j \text{ инцидентно вершине } v_i, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Пример 4.6. Матрицы смежности графов, изображенных на рис. 4.6 равны соответственно

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрицы инциденций графов, изображенных на рис. 4.6 равны соответственно

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

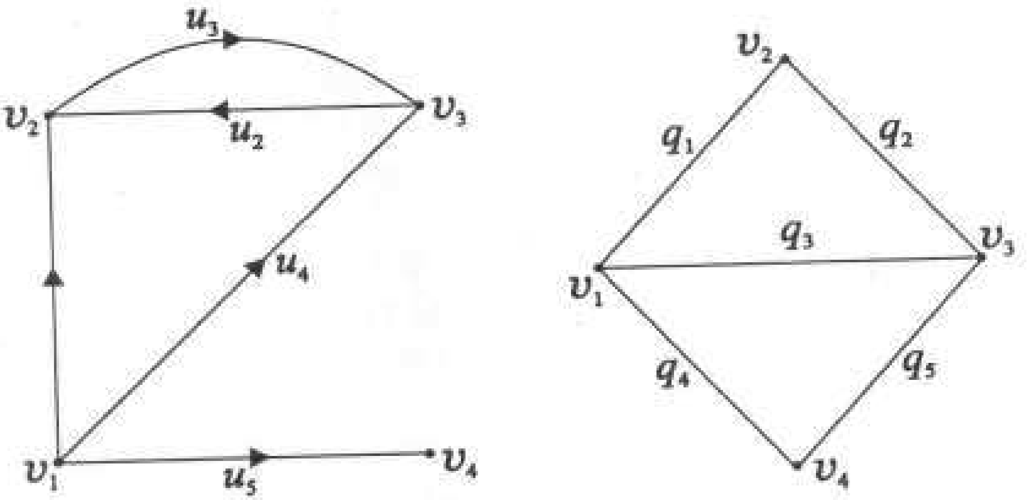


Рис. 4.6.

Приведем некоторые очевидные свойства матриц смежности и матриц инциденций:

1) Для неориентированного графа $G =< V, Q >$ сумма элементов i-ой строки (или i-го столбца) матрицы смежности A равна степени вершины v_i.

2) Для ориентированного графа $G =< V, \Gamma >$ сумма строк матрицы инцидентной B является нулевой строкой; ранг матрицы B не превосходит $n - 1$.

Используя матрицы смежности и инциденций можно ответить на многие вопросы, связанные со свойствами графов. В качестве примера приведем оценку числа путей (цепей) с фиксированной длиной.

Обозначим k-ю степень матрицы смежности A относительно обычной операции умножения матриц через $A^k = \|a_{ij}^{(k)}\|$.

Утверждение 4.2. *Число всех путей (цепей) длины k из вершины v_i в вершину v_j равно элементу $a_{ij}^{(k)}$ матрицы A^k.*

Доказательство проведем индукцией по k. При $k = 1$ справедливость утверждения следует из определения матрицы связности. П... что оно выполняется для всех путей

Задачи и упражнения

1. Нарисовать все графы с пятью вершинами (число таких графов — 34).
2. Доказать, что любая замкнутая цепь нечетной длины содержит простой цикл.
3. Доказать или опровергнуть:

а) объединение любых двух различных элементарных цепей, соединяющих две вершины, содержит простой цикл;

б) объединение любых двух различных простых цепей, соединяющих две вершины, содержит простой цикл.

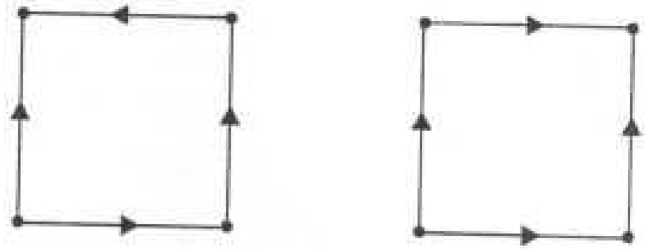
4. Сумма степеней вершин неориентированного графа равна удвоенному числу его ребер («лемма о рукопожатии»):

$$\sum_{v_i \in V} deg\, v_i = 2m$$

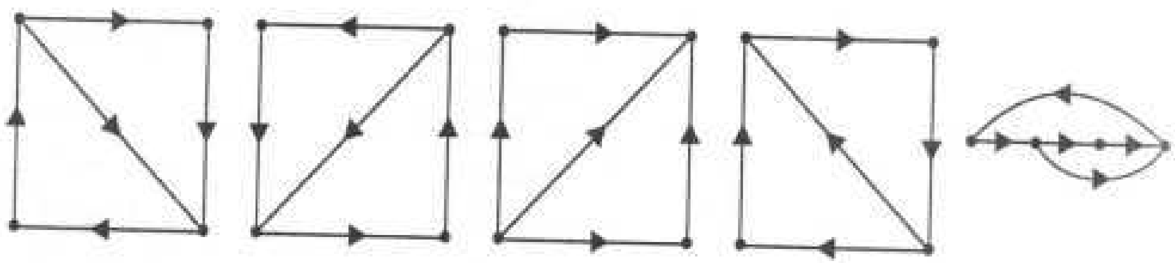
(поскольку в каждом рукопожатии участвуют две руки, то при любом числе рукопожатий общее число пожатых рук четно).

5. В любом неориентированном графе число вершин с нечетными степенями четно.

6. Доказать, что следующие графы неизоморфны.



7. Являются ли изоморфными графы:

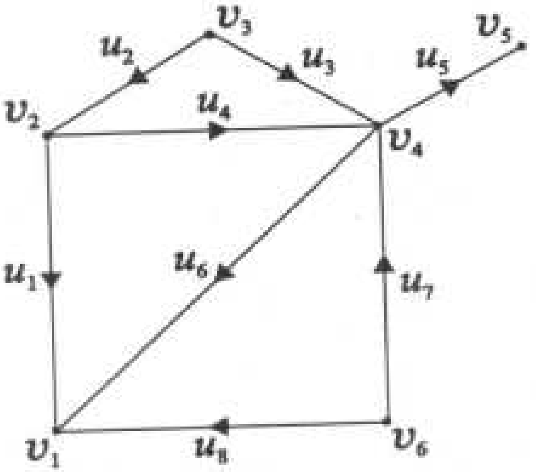


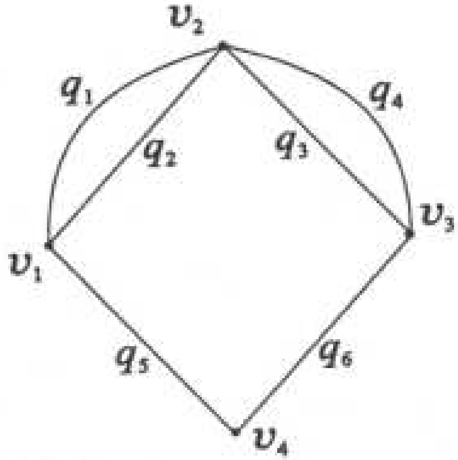
8. Показать, что число компонент связности графа G совпадает с числом элементов фактор-множества множества вершин G по отношению связности.

9. Построить графы отношений $x \equiv y(mod\ 3)$ и $x \rho y \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x + y \geqslant 4$ на множестве вершин $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Задачи и упражнения

1. Найти матрицу смежности и матрицу инциденций для графов:





2. Изобразить графы, заданные матрицей смежности A и матрицей инциденций B

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Найти матрицу связности для графа, заданного матрицей смежности