Часть 3

Элементы комбинаторного анализа

Лекция 8

На практике часто встречаются задачи, где необходимо подсчитать число всех возможных способов размещения некоторых предметов конечного множества или число всех возможных способов выполнения определенного действия из конечного множества таких действий. Задачи такого типа называются **комбинаторными**, а методы их решения — **методами комбинаторного анализа**. Поскольку комбинаторика имеет дело с конечными множествами, то ее часто называют **теорией конечных множеств**.

Таким образом, комбинаторика — это раздел дискретной математики, посвященный решению задач выбора и расположения элементов некоторого конечного множества в соответствии с заданными свойствами.

1. Основные правила комбинаторики

Мы уже рассматривали задачу: подсчет числа элементов в декартовом произведении множеств $\{1, 2, 3\} \times \{x, y\}$. Число таких элементов, как мы видели, равно произведению числа элементов первого множества на число элементов второго множества, т. е. в нашем случае это $3 \cdot 2 = 6$.

За этой простой задачей стоит правило, которое называется первым основным правилом комбинаторики: правило произведения.

Пусть необходимо выполнить последовательно k действий. Если первое действие можно выполнить n_1 способами, второе n_2 способами и так далее до k — действия, которое можно выполнить n_k способами, то все k действий можно выполнить $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$ способами.

Другим часто применяемым в комбинаторике правилом является правило суммы. Это правило формулируется следующим образом: если элемент x может быть выбран m способами, а элемент y — другими n способами, то выбор «либо x либо y» может быть осуществлен $m + n$ способами.

2. Перечислительная комбинаторика или теория перечислений

Будем рассматривать задачи, связанные с нахождением числа способов построения кортежей из элементов конечного множества. Простейшими такими кортежами являются размещения, перестановки, сочетания. Эти задачи образуют часть комбинаторики, называемой перечислительной комбинаторикой или теорией перечислений.

Пусть A — конечное множество, состоящее из n элементов $|A| = n$.

а) *Размещения.* Кортежи длины k ($1 \leqslant k \leqslant n$), состоящие из различных элементов n-элементного множества A (кортежи отличаются один от другого как самими элементами, так и их порядком), называются размещениями из n элементов множества A по k. Число таких размещений будем обозначать A_n^k (буква A от французского слова *arrangement* — размещение). Схема выбора состоит в выборе k элементов из n-элементного множества без возвращения.

Тогда необходимо совершить k действий, причем первое действие можно совершить n способами, второе $(n-1)$ способами и т. д., k-е действие $n-(k-1)$ способами. Согласно комбинаторному правилу умножения, получим формулу: $A_n^k = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$.

Если умножить и разделить полученное выражение на $(n-k)!$, получим:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!},$$

где $n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ и называется факториалом числа n (читается n-факториал). Причем: $0! = 1$; $1! = 1$; $2! = 1 \cdot 2 = 2$; $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$; $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$; $5! = 4! \cdot 5 = 120 \ldots$.

Пусть, например, дано множество $A\{1, 3, 5\}$. Выпишем все размещения из трех элементов по два: $\langle 1, 3\rangle$, $\langle 1, 5\rangle$, $\langle 3, 5\rangle$, $\langle 3, 1\rangle$, $\langle 5, 3\rangle$, $\langle 5, 1\rangle$.

Число этих размещений можно найти по формуле

$$A_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1!} = 6.$$

б) *Перестановки.* Пусть у нас есть n-элементное множество A, будем строить из этого множества размещения в виде кортежей длины n. Эти размещения будут отличаться друг от друга только порядком, поскольку в каждом из них встречаются по одному разу все элементы множества A. Такие размещения называются перестановками и обозначаются P_n (буква P от английского слова *permutation* — перестановка). Поскольку $P_n = A_n^n$, то число перестановок вычисляется по формуле $P_n = n!$.

Выясним, например, сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, если каждая входит в число только один раз.

Составим такие числа: $\langle 1,2,3\rangle$, $\langle 1,3,2\rangle$, $\langle 2,1,3\rangle$, $\langle 2,3,1\rangle$, $\langle 3,1,2\rangle$, $\langle 3,2,1\rangle$ — то есть шесть чисел. С помощью введенной формулы можно сразу определить число перестановок, не выписывая их:

$$P_3 = 3! = 1\cdot 2\cdot 3 = 6.$$

в) *Сочетания*. Из n-элементного множества A будем строить упорядоченные множества длины k ($1 \leqslant k \leqslant n$), не учитывая порядок элементов, т. е. размещения с одними и теми же элементами, расположенными в разном порядке, будем считать равными.

Такие размещения называются сочетаниями и обозначаются C_n^k (буква C от английского слова *combination* — комбинация).

Число сочетаний из n элементов по k меньше числа размещений из n элементов по k в P_k раз, т. е. $C_n^k = \dfrac{A_n^k}{P_k}$.

Используя это утверждение, выведем формулу для вычисления числа сочетаний:

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n!}{(n-k)!\cdot k!} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}.$$

Из этой формулы непосредственно вытекает, что $C_0^0 = C_n^0 = C_n^n = 1$; $C_n^1 = n$; $C_n^k = C_n^{n-k}$.

Выясним, какие парные сочетания можно составить из цифр 1, 3, 5 и сколько их. Выпишем эти сочетания:

$$\langle 1,3\rangle,\quad \langle 1,5\rangle,\quad \langle 3,5\rangle,$$

т. е. $C_3^2 = \dfrac{3!}{1!\cdot 2!} = 3$ или $C_3^2 = C_3^{3-2} = C_3^1 = 3$.

Непосредственной проверкой легко доказать следующие тождества:

а) $C_n^k \cdot C_k^r = C_n^r \cdot C_{n-r}^{k-r}$, где $0 \leqslant r \leqslant k \leqslant n$.

Действительно:

$$C_n^k \cdot C_k^r = \frac{n!\cdot k!}{(n-k)!\cdot k!\cdot (k-r)!\cdot r!} = \frac{n!}{(n-r)!\cdot r!}\cdot\frac{(n-r)!}{(n-k)!\cdot(k-r)!} = C_n^r\cdot C_{n-r}^{k-r}.$$

б) $C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1} = C_n^k$:

$$C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1} = \frac{(n-1)!}{(n-k-1)!k!} + \frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!} =$$

$$= \frac{(n-1)!(n-k+k)}{(n-k)!k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = C_n^k.$$

3. Комбинации элементов с повторениями

Все приведенные формулы справедливы в том случае, когда n элементов множества A различны. Если же некоторые элементы повторяются, то в этом случае рассматриваются комбинации **с повторениями**, число которых вычисляется по другим формулам.

Размещениями с повторениями из n элементов по k называются кортежи длины k, составленные из n — элементного множества A. Число этих кортежей обозначают $\overline{A_n^k}$. Черта указывает на возможность повторения элементов $\overline{A_n^k} = n^k$. Например, сколько пятизначных номеров можно составить из элементов множества $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$? Такими номерами являются кортежи длины 5, составленные из девятиэлементного множества, где схема выбора состоит в выборе 5 элементов из девятиэлементного множества с возвращением, т. е. для каждого из пяти элементов есть девять способов выбора, т. е. $\overline{A_9^5} = 9^5 = 59\,049$.

Перестановкой с повторениями состава $(n_1, \ldots, n_k)$ из букв $(a_1, \ldots, a_k)$ называют любой кортеж длины $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$, в который a_1 входит n_1 раз, a_2 входит n_2 раз, ..., a_k — n_k раз. Число таких перестановок обозначают

$$P(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!} = \frac{(n_1 + n_2 + \ldots + n_k)!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}.$$

Еще один пример. Сколько слов можно получить, переставляя буквы в слове «математика»? Слово «математика» является кортежем длины 10, имеющем состав $(2, 3, 2, 1, 1, 1)$ (буква «м» входит два раза, буква «а» входит 3 раза, буква «т» входит два раза, буквы «е», «и», «к» входят по одному разу). Значит, при перестановках букв получится $P(2, 3, 2, 1, 1, 1) = \dfrac{10!}{2! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!} = 151\,200$ слов.

Сочетания с повторениями. Пусть имеются предметы n видов и из них составляется набор, содержащий k элементов, т. е. различными исходами будут всевозможные наборы длины k, отличающиеся составом, и при этом отдельные наборы могут содержать повторяющиеся элементы. Такие наборы называются сочетаниями с повторениями, а их общее число определяется формулой : $\overline{C_n^k} = C_{n+k-1}^k$.

Например, нужно выяснить, сколько наборов из 7 пирожных можно составить, если в продаже имеются 4 сорта?

Искомое число равно $C_{4+7-1}^7 = C_{10}^7 = C_{10}^3 = \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120.$

4. Бином Ньютона

С числами C_n^k связано функциональное тождество, называемое формулой бинома Ньютона. Из элементарной математики хорошо известны формулы сокращенного умножения:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2; \quad (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Эти формулы можно записать так:

$$(a+b)^2 = C_2^0 a^2 b^0 + C_2^1 ab + C_2^2 a^0 b^2;$$
$$(a+b)^3 = C_3^0 a^3 b^0 + C_3^1 a^2 b^1 + C_3^2 ab^2 + C_3^3 a^0 b^3.$$

Имеет место и общая закономерность: справедливо равенство:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^n a^0 b^n.$$

Это равенство и называется биномом Ньютона, а коэффициенты $C_n^0, C_n^1, C_n^2, \dots, C_n^n$ называются биномиальными коэффициентами.

Если положить $a = b = 1$, то из формулы бинома Ньютона вытекает следующее важное соотношение: $(1+1)^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n$ — формула суммы биномиальных коэффициентов.

Если положить в биноме Ньютона $a = 1$, $b = -1$, то

$$C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \dots + (-1)^n C_n^n = 0.$$

Поскольку $C_n^k = C_n^{n-k}$, то биномиальные коэффициенты, равноотстоящие от концов в формуле бинома Ньютона, равны.

Пятое практическое занятие по теме «Комбинаторные формулы. Бином Ньютона»

Задача 1. Составьте все перестановки:

1) из трех букв: a, b, c;

2) из четырех цифр: 5, 4, 3, 2.

Решение.

1) abc, acb, bac, bca, cab, cba;

2) 5432, 5423, 5342, 5324, 5243, 5234, 4532, 4523, 4325, 4352, 4235, 4253, 3542, 3524, 3452, 3425, 3245, 3254, 2345, 2354, 2435, 2453, 2534, 2543.

Задача 2. Составьте все размещения:

1) из четырех букв a, b, c, d по 3 буквы в каждом (без повторений);

2) из четырех цифр: 1, 3, 5, 7 по 2 цифры в каждом.

Решение.

1) *abc abd bcd acd acb adb bdc adc bac bad cbd cad bca bda cdb cda cab dab dbc dac cba dba dcb dca*;

2) 1 3; 1 5; 1 7; 3 1; 3 5; 3 7; 5 1; 5 3; 5 7; 7 1; 7 3; 7 5.

Задача 3. Вычислите:

1) A_6^3; 2) A_7^4; 3) A_8^5; 4) $\dfrac{A_6^3}{A_5^2}$; 5) $\dfrac{A_8^3 + A_7^4}{A_6^3}$; 6) $\dfrac{A_{10}^6 - A_{10}^5}{A_9^5 - A_9^4}$.

Задача 4. Вычислите:

1) P_4; 2) P_6; 3) P_9; 4) $\dfrac{P_8}{P_6}$; 5) $\dfrac{P_5 + P_4}{P_3}$; 6) $\dfrac{P_6 - P_4}{P_3}$.

Задача 5. Вычислите:

1) $\dfrac{P_8}{A_8^7}$; 2) $\dfrac{A_7^4 - P_5}{A_5^2}$; 3) $\dfrac{2P_3 + 3A_4^2}{5P_5 - P_3}$; 4) $\dfrac{P_8 P_7}{7P_7}$.

Задача 6. Составьте все сочетания (без повторений) из пяти букв: a, b, c, d, e по 3 буквы в каждом.

Решение. *abc*, *abd*, *abe*, *acd*, *ace*, *ade*, *bcd*, *bce*, *bde*, *cde*.

Задача 7. Вычислите:

1) C_6^2; 2) C_8^3; 3) C_{11}^4; 4) C_{12}^7; 5) C_{100}^{98}; 6) C_{20}^{17}; 7) C_{40}^{38}; 8) C_{54}^{52}.

Задача 8. Проверьте равенства:

1) $C_{10}^{15} = \dfrac{A_{15}^5}{P_5}$; 2) $C_6^2 = \dfrac{A_m^{m-8}}{P_{m-8}}$.

Задача 9. Решите уравнения:

1) $A_{x+1}^2 = 30$; 2) $5C_x^3 = C_{x+2}^4$; 3) $C_x^3 = \dfrac{5x(x-3)}{4}$; 4) $C_x^3 + C_x^2 = 15(x-1)$;

5) $\dfrac{A_x^5 + A_x^3}{A_x^3} = 43$; 6) $12C_x^1 + C_{x+4}^2 = 162$; 7) $C_{x+1}^5 = \dfrac{3A_x^3}{8}$; 8) $\dfrac{A_x^4 \cdot P_{x-4}}{P_{x-2}} = 42$.

Ответ: 1) 5; 2) 3; 14; 3) 7; 4) 9; 5) 10; 6) 8; 7) 8; 8) 7.

Задача 10. Сколько номеров, состоящих из трех букв, за которыми идут две цифры, можно составить, используя 32 буквы и 10 цифр?

Решение. Обозначим множество из 32 букв через A, а множество из 10 цифр через B. Тогда $|A| = 32$; $|B| = 10$. Каждый номер требуемого вида является кортежем длины 5 из декартова произведения $A \times A \times A \times B \times B$. Тогда $|A \times A \times A \times B \times B| = 32 \cdot 32 \cdot 32 \cdot 10 \cdot 10 = 3\,276\,800$.

Задача 11. Сколько существует пятизначных номеров:

1) не содержащих цифру 8;
2) не содержащих цифры 0 и 8;
3) составленных из цифр 2, 3, 5, 7?

Ответ: 1) 59 049, 2) 32 768, 3) 1024. Указание: здесь $\overline{A_n^k} = n^k$.

Задача 12. Сколькими способами можно разложить 28 различных предметов по четырем ящикам, так, чтобы в каждом ящике оказалось по 7 предметов?
Решение. Число способов равно: $P(7, 7, 7, 7) = \dfrac{28!}{(7!)^4}$.

Задача 13. В технической библиотеке имеются книги по математике, физике, химии и т. д., всего по 16 разделам науки. Поступили очередные четыре заказа на литературу. Сколько наборов из четырех заказов можно составить по 16 разделам науки?
Решение. Искомое число равно числу сочетаний с повторениями из 16 элементов по 4, т. е. $\overline{C_{16}^4} = C_{16+4-1}^4 = C_{19}^4 = 3876$.

Задача 14. Сколькими способами можно составить дозор из трех солдат и одного офицера. Если имеется 80 солдат и 3 офицера?
Ответ: 246 480.

Задача 15. Найдите:

1) четвертый член разложения $(a + 3)^7$;
2) четвертый член разложения $(a + \sqrt{b})^{12}$;
3) восьмой член разложения $(a^2 + b^3)^{13}$;
4) средний член разложения $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^8$;
5) средний член разложения $(x\sqrt{x} - 1)^{14}$;
6) два средних члена разложения $(\sqrt{a} - \sqrt[3]{b})^{13}$.

Ответ: 1) $945a^4$; 2) $495a^4b^4$; 3) $1287(a^{16}b^{15})$; 4) $70a^2b^2$; 5) $-3432x^{10}\sqrt{x}$;
6) $-1716a^3 \cdot b^2\sqrt[3]{b}$; $1716a^3\sqrt{a}b^2$.

Задача 16. Определите x из условия, что третий член разложения бинома $(x + x^{\lg x})^5$ равен 1 000 000.
Ответ: 10; $\dfrac{1}{\sqrt{100\,000}}$.

Задача 17. Найдите тот член разложения бинома

$$\left(z\sqrt{z} + \frac{1}{\sqrt[3]{z}}\right)^m,$$

который после упрощения содержит z^5, если сумма биномиальных коэффициентов этого разложения равна 128.
Ответ: $35z^5$.

Контрольные вопросы

1. Что такое комбинаторика и для чего она нужна?

2. Что называется:

— перестановкой n-элементного множества;

— размещением из n элементов по m элементов;

— сочетанием из n элементов по m элементов?

3. В чем отличие размещений от перестановок?

4. В чем отличие сочетаний от размещений?

5. Сколькими способами можно разместить три книги на книжной полке?

6. Запишите формулу для вычисления числа сочетаний элементов, используемую в формуле бинома Ньютона.

7. Как найти число перестановок с повторениями?

8. Сколько существует пятизначных чисел, у которых каждая следующая цифра:

— меньше предыдущей,

— больше предыдущей.

9. Сколько прямых можно провести через n точек, если никакие три из них не лежат на одной прямой?

10. Сколько разных слов можно составить перестановкой букв в слове «чача»?

11. Вычислите: $(a + b + c)^2$; $(a + b + c)^3$.

12. Покажите, что сумма $C_p^1 + C_p^2 + \ldots + C_p^{p-1}$ делится на p, где p — простое число.

13. Докажите свойства биномиальных коэффициентов.