Глава 1

МНОЖЕСТВА И ОТНОШЕНИЯ

В нашем изложении исходным неопределяемым понятием является понятие множества, описываемое перечислением его свойств. Понятие множества по существу используется в каждой математической дисциплине и позволяет определить последующие понятия математически обоснованно и конструктивно. К ним, в частности, относятся такие основные понятия теории множеств как отношения и специальные виды отношений — отношения эквивалентности и порядка, свойства которых рассматриваются в этой главе. Приводится пример интерпретации отношения порядка, позволяющий сформировать модель прикладной задачи ранжирования и выбора наилучших объектов.

Мы также считаем полезным остановиться в этом разделе на понятии алгебраической операции на множестве. Первоначально ограниченное натуральными числами оно постепенно расширялось и стало применяться к элементам совершенно «нечислового» характера.

1.1. Начальные понятия теории множеств

1.1.1. Понятие множества

Под *множеством* S будем понимать любое собрание определенных и различимых между собой объектов, мыслимое как единое целое. Эти объекты называются *элементами* множества S.

В этом интуитивном определении, принадлежащем немецкому математику Г. Кантору, существенным является то обстоятельство, что собрание предметов само рассматривается как один предмет, мыслится как единое целое. Что касается самих предметов, которые могут входить в множество, то относительно них существует значительная свобода. Это может быть множество студентов, присутствующих на лекции, множество целых чисел, множество точек плоскости, множество всех людей, живущих на Земле. Заметим, что канторовская формулировка позволяет рассматривать множества, элементы которых по той или иной причине нельзя точно указать (например, множество простых чисел, множество русских воинов, погибших в битве на Куликовом поле, и т. д.).

Символом $\in$ обозначается *отношение принадлежности*. Запись $x \in S$ означает, что элемент x принадлежит множеству S. Если элемент x не принадлежит множеству S, то пишут $x \notin S$.

Г. Кантором сформулировано несколько интуитивных принципов, которые естественно считать выполняющимися для произвольных множеств.

Интуитивный принцип объемности. *Множества A и B считаются равными, если они состоят из одних и тех же элементов.*

Записывают $A = B$, если A и B равны, и $A \neq B$ — в противном случае.

Пример 1.1. Проиллюстрируем принцип объемности. Множество A всех положительных четных чисел равно множеству B положительных целых чисел, представимых в виде суммы двух положительных нечетных чисел. Действительно, если $x \in A$, то для некоторого целого положительного числа m $x = 2m$; тогда $x = (2m-1)+1$, т. е. $x \in B$. Если $x \in B$, то для некоторых целых положительных p и q $x = (2p-1)+(2q-1) = 2(p+q-1)$, т. е. $x \in A$.

Множество, элементами которого являются объекты $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и только они, обозначают $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$.

Пример 1.2. В силу принципа объемности $\{2, 4, 6\} = \{4, 2, 6\} = \{2, 4, 4, 6\}$; $\{\{1, 2\}\} \neq \{1, 2\}$, так как единственным элементом множества $\{\{1, 2\}\}$ является множество $\{1, 2\}$, а множество $\{1, 2\}$ состоит из двух элементов: чисел 1 и 2.

При рассмотрении способов задания множеств возникает проблема их эффективного описания. Ее решение обычно основано на интуитивном понятии «формы от x». Под *формой от x* будем понимать конечную последовательность, состоящую из слов и символа x, такую, что если каждое вхождение x в эту последовательность заменить одним и тем же именем некоторого предмета соответствующего рода, то в результате получится истинное или ложное предложение. Например, формами от x являются следующие предложения: «3 делит x», «$x^2 = 4$», «$x^2 + 2x + 1 > x$», «x — родственник Иванова». Напротив, предложения «для всех x $x^2 = (x-2)(x+2)$» и «существует такое x, что $x > 0$» не являются формами от x.

Обозначим форму от x через $P(x)$.

Интуитивный принцип абстракции. *Любая форма $P(x)$ определяет некоторое множество A, а именно множество тех и только тех предметов a, для которых $P(a)$ — истинное предложение.*

Для множества A, определяемого формой $P(x)$, принято обозначение $A = \{x|P(x)\}$.

Пример 1.3.

1. $\{x|x$ — положительное число, меньшее $9\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

2. $\{x|x$ — четное число$\}$ — множество четных чисел.

Описанные выше понятия теории множеств с успехом могут быть использованы в началах анализа, алгебры, математической логики и т. д. Однако надо иметь в виду, что при более строгих рассмотрениях такое интуитивное восприятие может оказаться неудовлетворительным.

Несовершенство интуитивных представлений о множествах, их недостаточность иллюстрируются, например, известным парадоксом Б. Рассела. Приведем этот парадокс. Можно указать такие множества, которые принадлежат самим себе как элементы, например множество всех множеств, и такие множества, которые не являются элементами самих себя, например множество $\{1, 2\}$, *элементами которого являются числа* 1 *и* 2. *Рассмотрим теперь множество A всех таких множеств X, что X не есть элемент X. Тогда, если A не есть элемент A, то, по определению, A также есть и элемент A. С другой стороны, если A есть элемент A, то A — одно из тех множеств X, которые не есть элементы самих себя, т. е. A не есть элемент A. В любом случае A есть элемент A и A не есть элемент A.*

Этот парадокс свидетельствует о том, что широко используемая теория множеств в ее интуитивном, «наивном» изложении является противоречивой. Формализация теории множеств, связанная, в частности, с устранением парадоксов, способствовала развитию не только методов теории множеств, но и такой науки, как математическая логика.

Через $\subseteq$ обозначим *отношение включения* между множествами, т. е. $A \subseteq B$, если каждый элемент множества A есть элемент множества B. Тогда говорят, что A есть *подмножество* множества B. Если $A \subseteq B$ и $A \neq B$, то говорят, что A есть собственное подмножество B, и пишут $A \subset B$.

Пример 1.4. Множество четных чисел есть подмножество множества целых чисел; множество рациональных чисел есть подмножество множества действительных чисел; $\{1, 2\} \subseteq \{1, 2, 3, 4\}$.

Заметим, что: а) $X \subseteq X$; б) если $X \subseteq Y$, $Y \subseteq Z$, то $X \subseteq Z$; в) если $X \subseteq Y$ и $Y \subseteq X$, то $X = Y$.

Не надо смешивать отношения принадлежности и включения. Хотя $1 \in \{1\}$, $\{1\} \subseteq \{\{1\}\}$, не верно, что $1 \in \{\{1\}\}$, так как единственным элементом множества $\{\{1\}\}$ является $\{1\}$.

Множество, не содержащее элементов, называется *пустым* и обозначается $\varnothing$. Пустое множество есть подмножество любого множества.

Множество всех подмножеств A называется *множеством-степенью* и обозначается $P(A)$.

Пример 1.5. Если $A = \{1, 2, 3\}$, то $P(A) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, A\}$.

В дальнейшем мы неоднократно будем пользоваться утверждением, что если множество A состоит из n элементов, то множество $P(A)$ состоит из 2^n элементов (см. задачу 3).

1.1.2. Операции над множествами. Алгебра множеств

Продолжая рассмотрение методов, с помощью которых из данных множеств можно получить новые множества, приведем понятие операций над множествами. Эти операции в некотором смысле аналогичны алгебраическим операциям над числами.

Объединением множеств A и B называется множество $A \cup B$, все элементы которого являются элементами множества A или B:

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ или } x \in B\}.$$

Пересечением множеств A и B называется множество $A \cap B$, элементы которого являются элементами обоих множеств A и B:

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ и } x \in B\}.$$

Очевидно, что выполняются включения $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$ и $A \cap B \subseteq B \subseteq A \cup B$.

Относительным дополнением множества A до множества X (или разностью множеств X и A) называется множество

$X \setminus A$ всех тех элементов множества X, которые не принадлежат множеству A:

$$X \setminus A = \{x | x \in X \text{ и } x \overline{\in} A\}.$$

Симметрической разностью множеств A и B называется множество

$$A + B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Если все рассматриваемые в ходе данного рассуждения множества являются подмножествами некоторого множества U, то это множество U называется универсальным для данного рассуждения.

Абсолютным дополнением множества A называется множество $\overline{A}$ всех тех элементов x, которые не принадлежат множеству A:

$$\overline{A} = U \setminus A.$$

Заметим, что $X \setminus A = X \cap \overline{A}$.

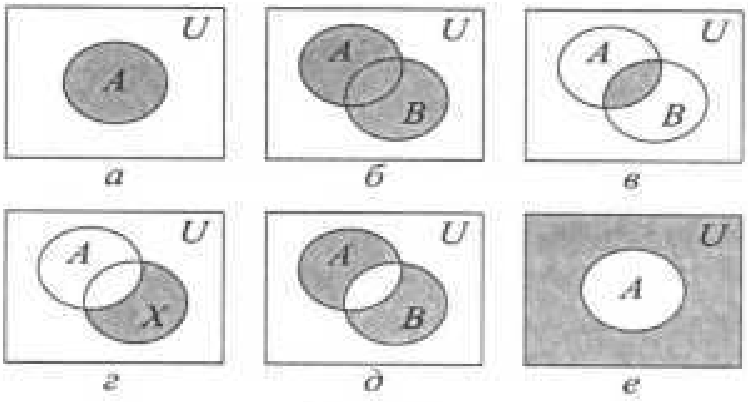

Рис. 1.1.

Для наглядного представления отношении между подмножествами какого-либо универсального множества используют диаграммы Эйлера—Венна. Само универсальное множество U изображают в виде прямоугольника, а его подмножества — в виде кругов, расположенных внутри прямоугольника. На рис. 1.1, *а* подмножество A универсального множества U изображено в виде заштрихованного круга. На рис. 1.1, *б—е* изображены соответственно объединение, пересечение, относительное дополнение, симметрическая разность, абсолютное дополнение.

Утверждение 1.1. *Для любых подмножеств A, B и C универсального множества U выполняются следующие тождества (основные тождества алгебры множеств):*

1. $A \cup B = B \cup A$ (*коммутативность* $\cup$);
2. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (*ассоциативность* $\cup$);
3. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap$ $\cap (A \cup C)$ (*дистрибутивность* $\cup$ *относительно* $\cap$);
4. $A \cup \varnothing = A$;
5. $A \cup \overline{A} = U$;
6. $A \cup A = A$;
7. $A \cup U = U$;
8. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ (*закон де Моргана*);
9. $A \cup (A \cap B) = A$ (*закон поглощения*);

1′. $A \cap B = B \cap A$ (*коммутативность* $\cap$);
2′. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (*ассоциативность* $\cap$);
3′. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup$ $\cup (A \cap C)$ (*дистрибутивность* $\cap$ *относительно* $\cup$);
4′. $A \cap U = A$;
5′. $A \cap \overline{A} = \varnothing$;
6′. $A \cap A = A$;
7′. $A \cap \varnothing = \varnothing$;
8′. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ (*закон де Моргана*);
9′. $A \cap (A \cup B) = A$ (*закон поглощения*).

Докажем тождество 3. Сначала покажем, что $A \cup (B \cap C) \subseteq$ $\subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Действительно, если $x \in A \cup (B \cap C)$, то $x \in A$ или $x \in B \cap C$. Если $x \in A$, то $x \in A \cup B$ и $x \in A \cup C$. Следовательно, $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Если $x \in B \cap C$, то $x \in B$ и $x \in C$. Отсюда $x \in B \cup A$ и $x \in C \cup A$, а значит, $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Теперь покажем, что $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq$ $\subseteq A \cup (B \cap C)$. Если $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$, то $x \in A \cup B$ и $x \in A \cup C$. Следовательно, $x \in A$ или $x \in B$ и $x \in C$, т. е. $x \in B \cap C$. Отсюда $x \in A \cup (B \cap C)$.

Докажем тождество 8. Пусть $x \in \overline{A \cup B}$. Тогда $x \in U$ и $x \mathrel{\overline{\in}} A \cup B$. Следовательно, $x \mathrel{\overline{\in}} A$ и $x \mathrel{\overline{\in}} B$. Отсюда $x \in \overline{A}$ и $x \in \overline{B}$, а значит, $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$. Итак, $\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$. Пусть теперь $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$. Тогда $x \in \overline{A}$ и $x \in \overline{B}$. Следовательно, $x \in U$ и $x \mathrel{\overline{\in}} A$ и $x \mathrel{\overline{\in}} B$. Значит, $x \mathrel{\overline{\in}} A \cup B$, т. е. $x \in \overline{A \cup B}$. Итак, $\overline{A} \cap \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$.

Остальные тождества доказываются аналогично.

Утверждение 1.2. *Предложения о произвольных множествах A и B попарно эквивалентны:*

$$1)\ A \subseteq B; \quad 2)\ A \cap B = A; \quad 3)\ A \cup B = B.$$

Докажем, что из первого предложения следует второе. Действительно, так как $A \cap B \subseteq A$, то достаточно показать, что в этом случае $A \subseteq A \cap B$. Но если $x \in A$, то $x \in B$, так как $A \subseteq B$, и, следовательно, $x \in A \cap B$.

Докажем, что из второго утверждения следует третье. Так как $A \cap B = A$, то $A \cup B = (A \cap B) \cup B$. По закону поглощения (см. тождество 9) $B \cup (A \cap B) = B$. Отсюда, используя закон коммутативности, получаем $A \cup B = B$.

Докажем, что из третьего предложения следует первое. Так как $A \subseteq A \cup B$, а по условию третьего предложения $A \cup B = B$, то $A \subseteq B$.

1.1.3. Упорядочение. Прямое произведение множеств

Введем понятие упорядоченной пары и упорядоченной n-ки элементов. Как и понятие множества эти понятия являются исходными, неопределяемыми.

Упрорядоченная пара $< x, y >$ интуитивно определяется как совокупность, состоящая из двух элементов x и y, расположенных в определенном порядке. Две пары $< x, y >$ и $< u, v >$ считаются равными тогда и только тогда, когда $x = u$ и $y = v$.

Упорядоченная n-ка элементов $x_1, x_2, \dots, x_n$ обозначается $< x_1, x_2, \dots, x_n >$ и, по определению, есть

$$<< x_1, x_2, \dots, x_{n-1} >, x_n > .$$

Элементы $x_1, x_2, \dots, x_n$ называются *компонентами* или *координатами* n-ки. Упорядоченная n-ка называется также *кортежем* из элементов $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Координаты точки на плоскости — упорядоченная пара чисел, координаты точки в пространстве — упорядоченная тройка чисел. Очередь из покупателей в магазине, кортеж автомобилей при встрече официального лица являются примерами таких упорядоченных наборов элементов.

Прямым произведением множеств X и Y называется совокупность всех упорядоченных пар $< x, y >$ таких, что $x \in X$ и $y \in Y$. Обозначается прямое произведение множеств X и Y через $X \times Y$.

Прямым произведением множеств $X_1, X_2, \ldots, X_n$ называется совокупность всех упорядоченных n-ок $< x_1, x_2, \ldots, x_n >$ таких, что $x_i \in X_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Обозначается прямое произведение множеств $X_1, X_2, \ldots, X_n$ через $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$. Если $X_1 = X_2 = \cdots = X_n = X$, то пишут $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n = X^n$.

Пример 1.6.

1. Пусть $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{0, 1\}$. Тогда

$$\begin{aligned} X \times Y = \{ &< 1, 0 >, < 1, 1 >, < 2, 0 >, < 2, 1 >, \\ &< 3, 0 >, < 3, 1 >\}; \\ Y \times X = \{ &< 0, 1 >, < 0, 2 >, < 0, 3 >, < 1, 1 >, \\ &< 1, 2 >, < 1, 3 >\}. \end{aligned}$$

Мы указали, кроме того, такие множества X и Y, что $X \times Y \neq Y \times X$.

2. Пусть X — множество точек отрезка $[0, 1]$, а Y — множество точек отрезка $[1, 2]$. Тогда $X \times Y$ — множество точек квадрата $[0, 1] \times [1, 2]$ с вершинами в точках $(0, 1)$, $(0, 2)$, $(1, 1)$, $(1, 2)$ (см. рис. 1.2).

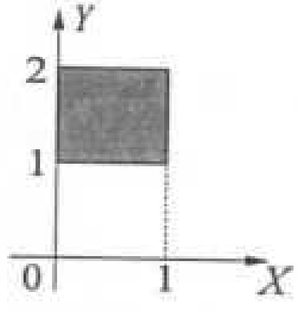

Рис. 1.2.

Задачи и упражнения

1. Доказать, что $\{\{1, 2\}, \{2, 3\}\} \neq \{1, 2, 3\}$.
2. Существуют ли такие множества A, B и C, что $A \cap B \neq \emptyset$, $A \cap C = \emptyset$, $(A \cap B) \setminus C = \emptyset$?
3. Доказать, что если множество A состоит из n элементов, то множество $P(A)$ состоит из 2^n элементов.
4. Доказать следующие тождества:

а) $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = (A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) = A$;

б) $(\overline{A} \cup B) \cap A = A \cap B$;

в) $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$;

г) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$;

д) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$;

е) $A + (B + C) = (A + B) + C$;

ж) $A \cap (B + C) = (A \cap B) + (A \cap C)$.

5. Доказать, что:

а) $(A \cup B) \subseteq C$ тогда и только тогда, когда $A \subseteq C$ и $B \subseteq C$;

б) $A \subseteq B \cap C$ тогда и только тогда, когда $A \subseteq B$ и $A \subseteq C$;

в) $A \cap B \subseteq C$ тогда и только тогда, когда $A \subseteq \overline{B} \cup C$;

г) $A \subseteq B \cup C$ тогда и только тогда, когда $A \cap \overline{B} \subseteq C$.

6. Доказать, что $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$.

7. Какие из утверждений верны для всех A, B и C:

а) если $A \in B$ и $B \in C$, то $A \in C$;

б) если $A \cap B \subseteq C$ и $A \cup B \subseteq C$, то $A \cap C = \varnothing$;

в) если $A \neq B$ и $B \neq C$, то $A \neq C$;

г) если $A \subseteq \overline{B \cup C}$ и $B \subseteq \overline{A \cup C}$, то $B = \varnothing$?

8. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} A \cap X = B; \\ A \cup X = C, \end{cases}$$

где A, B и C — данные множества; $B \subseteq A \subseteq C$.

9. Найти геометрическую интерпретацию множества $A \times B$, где A — множество точек отрезка $[0,\ 1]$; B — множество точек квадрата с вершинами в точках $(0,\ 0)$, $(0,\ 1)$, $(1,\ 0)$, $(1,\ 1)$.

10. Доказать, что $(A \times B) \cup (C \times D) \subseteq (A \cup C) \times (B \cup D)$. При каких A, B, C, D включение можно заменить равенством?

11. Доказать, что для произвольных множеств A, B, C, D:

а) $(A \cap B) \times (C \cup D) = (A \times C) \cap (B \times D)$;

б) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$;

в) $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$;

г) $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$.

12. Пусть $A,\ B \neq \varnothing$ и $(A \times B) \cup (B \times A) = C \times D$. Доказать, что в этом случае $A = B = C = D$.