$$x = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2}{n}(-1)^n \sin nx = 2\sin x - \sin 2x + \frac{2}{3}\sin 3x - \ldots$$

3. Разложение в ряд Фурье периодических ф-ций с произвольным периодом $T = 2l$

Теорема: Пусть $F(x)$ - периодич. с $T = 2l$, $F(x)$, $F'(x)$ непрерывна на $[-l; l]$ кроме, может быть, конечного числа точек разрыва I-го рода. Тогда, если x-т. непрерывности, то

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos\frac{\pi n x}{l} + b_n \sin\frac{\pi n x}{l}\right],$$ где

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} F(x)\,dx \;;\; a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} F(x)\cos\frac{\pi n x}{l}\,dx$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} F(x)\sin\frac{\pi n x}{l}\,dx$$ если x- т. разрыва, то

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos\frac{\pi n x}{l} + b_n \sin\frac{\pi n x}{l}\right] = \frac{F(x-) + F(x+)}{2}$$

Причем, если $F(x)$ - четная функция, то $b_n = 0$, $a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l F(x)\,dx$

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l F(x)\cos\frac{\pi n x}{l}\,dx$$ если $F(x)$ - нечетная, то

$$a_0 = 0,\ a_n = 0,\ b_n = \frac{2}{l}\int_0^l F(l)\sin\frac{\pi n x}{l}\,dx$$

Док-во: $F(x)$ - период с $T = 2l$

$$F_1(\xi) = F\left(\frac{l\xi}{\pi}\right) \text{ - период с } T = 2\pi$$

$$F_1(\xi + 2\pi) = F\left(\frac{l(\xi + 2\pi)}{\pi}\right) = F\left(\frac{l\xi}{\pi} + 2l\right) = F\left(\frac{l\xi}{\pi}\right) = F_1(\xi)$$

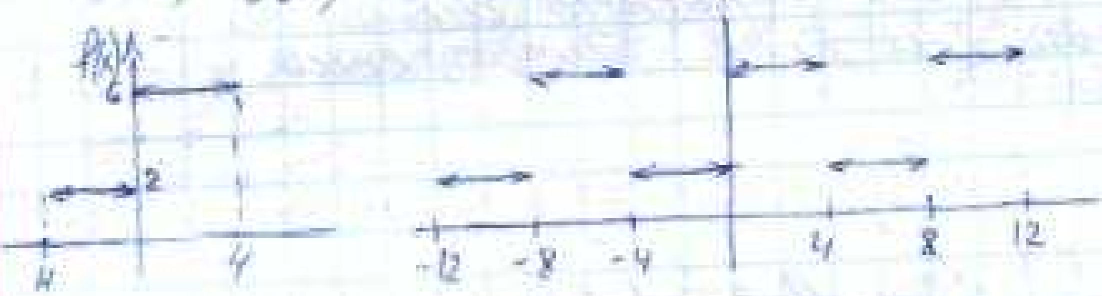
По по пред. лекции

$$F_1(\xi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos n\xi + b_n \sin n\xi]$$

Но $x = \frac{l\xi}{\pi} \Rightarrow \xi = \frac{\pi x}{l}$

Задача: Разложить в ряд Фурье ф-ции

$$f(x) = \begin{cases} 2; & -4<x<0 \\ 6; & 0<x<4 \end{cases}$$



$l = 4$ $\quad F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos\frac{\pi n x}{4} + b_n \sin\frac{\pi n x}{4}]$

$$a_0 = \frac{1}{4}\int_{-4}^{4} F(x)\,dx = \frac{1}{4}\left(\int_{-4}^{0} 2\,dx + \int_{0}^{4} 6\,dx\right) = \frac{1}{4}(8+24) = 8$$

$$a_n = \frac{1}{4}\int_{-4}^{4} F(x)\cos\frac{\pi n x}{4}\,dx = \frac{1}{4}\left(\int_{-4}^{0} 2\cos\frac{\pi n x}{4}\,dx + \int_{0}^{4} 6\cos\right.$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{2\sin\frac{\pi n x}{4}}{\frac{\pi n}{4}}\Bigg|_{-4}^{0} + \frac{6\sin\frac{\pi n x}{4}}{\frac{\pi n}{4}}\Bigg|_{0}^{4}\right) = 0$$

$$b_n = \frac{1}{4}\int_{-4}^{4} F(x)\sin\frac{\pi n x}{4}\,dx = \frac{1}{4}\left(\int_{-4}^{0} 2\sin\frac{\pi n x}{4}\,dx + \int_{0}^{4} 6\right.$$

$$\left.\cdot \frac{\pi n x}{4}\,dx\right) = \frac{1}{4}\left(-\frac{2\cos\frac{\pi n x}{4}}{\frac{\pi n}{4}}\Bigg|_{-4}^{0} - \frac{6\cos\frac{\pi n x}{4}}{\frac{\pi n}{4}}\Bigg|_{0}^{4}\right) =$$

$= \frac{1}{4}\left(-\frac{8}{\pi n}(1-(-1)^n) - \frac{24}{\pi n}((-1)^n - 1)\right) = -\frac{2}{\pi n}(1-(-1)^n +$

$+ 3(-1)^n - 3) = -\frac{2}{\pi n}(2(-1)^n - 2) = -\frac{4}{\pi n}((-1)^n - 1)$

$F(x) = 4 + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{4}{\pi n}((-1)^n - 1)\sin\frac{\pi n x}{4} = 4 + \frac{8}{\pi}\sin\frac{\pi x}{4} +$

$+ \frac{8}{3\pi}\sin\frac{3\pi x}{4} + \ldots$

Приложение рядов Фурье

1) Понятие ур-ия в частных производных

Определение: ур. вида $aU''_{xx} + 2bU''_{xy} + cU''_{yy} + dU'_x +$
$+ eU'_y + fU = g(x,y)$, где a, b, c, d, e, f с в наз. линейным ДУ 2-ого порядка в частных производных с пост. коэф.

2) Классификация ур-ий

$\Delta = ac - b^2$

Определение: Если $\Delta < 0$, то ур-ие наз. ур. гиперболического типа

Определение: Если $\Delta > 0$, то ур. наз. ур-ием эллиптического типа

3. Примеры ур-ий матем. физики

а) Волновое ур-ие

$$U''_{tt} = a^2 U''_{xx}$$

Это ур-ие описывает поперечные колебания струны и продольные колебания стержня

$U''_{tt} - a^2 U''_{xx} = 0$

$a = 1,\ b = 0,\ c = -a^2$

$\Delta = ac - b^2 = 1(-a^2) - 0 = -a^2 < 0 \;\|\Rightarrow$ это ур. гиперболич. типа

б) $U'_t = a^2 U''_{xx}$ – ур. теплопроводности. Опис процесс распределения тепла в стер

$a^2 U''_{xx} - U'_t = 0$; $a = 0$; $b = 0$; $c = a^2$

$\Delta = 0 \cdot a^2 - 0^2 = 0 \Rightarrow$ ур. параболич. типа

в) Ур-ие Лапласа

$U''_{xx} + U''_{yy} = f(x,y)$ – описывает процесс деформации мембраны (пластины)

$a = 1$, $b = 0$, $c = 1$

$\Delta = 1 \cdot 1 - 0^2 = 1 > 0 \Rightarrow$ это ур-ие эллиптич. типа

2. Метод Фурье для решения смешанной задачи для ур-ия теплопроводно

$U'_t = a^2 U''_{xx}$, $0 \le x \le l$, $t \ge 0$

$U(0, x) = \varphi(x)$ – начальное ур-ие

$U(t, 0) = U(t, l) = 0$ – краевые ур-ия

Используем метод Фурье. Ищем реш в виде $U(x,t) = X(x) \cdot T(t)$

$$X(x) \cdot T'(t) = a^2 X''(x) \cdot T(t) \,/\, X(x) T(t)$$

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = a^2 \frac{X''(x)}{X(x)}$$

Левая часть зависит от t, правая зависит от x, значит и левая и части равны абсолютной констант

а) $X'' = -\frac{\lambda^2}{a^2} X$; $X'' + \left(\frac{\lambda}{a}\right)^2 X = 0$ – линейное ДУ 2-го пор с пост. коэф

$k^2 + \left(\frac{\lambda}{a}\right)^2 = 0$ – характеристич. ур-ие

$k^2 = -\left(\frac{\lambda}{a}\right)^2 \Rightarrow k_{1,2} = \pm \frac{\lambda}{a} i$

$X = c_1 \cos\frac{\lambda}{a}x + c_2 \sin\frac{\lambda}{a}x$

$u(t;0)=0 \Rightarrow x(0)=0 \Rightarrow 0=c_1 \Rightarrow x=c_2 \sin\frac{\lambda}{a}x$

$u(t;l)=0 \Rightarrow x(l)=0 \Rightarrow 0=c_2 \sin\frac{\lambda}{a}l \Rightarrow \sin\frac{\lambda}{a}l=0 \Rightarrow$

$\frac{\lambda}{a}l = \pi n,\ n=\cancel{0},1,2,\dots$ т.к. нулевые решения нам не нужны

$\lambda = \frac{\pi n a}{l}$

Определение: Числа $\lambda_n = \frac{\pi n a}{l}$, $n=1,2,\dots$ наз. собственными числами данной задачи.

Определение: Ф-ии $X_n = \sin\frac{\pi n x}{l}$, $n=1,2,\dots$ наз. собственными функциями данной задачи.

б) $T' = -\lambda^2 T$, $T' = -\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 T$ — ДУ 1-ого порядка с разделенными переменными

$\int\frac{dT}{T} = \int -\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 dt$; $\ln|T| = -\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t + c$

$T = e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t + c}$; $T(t) = c \cdot e^{\left(-\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t}$

в) Итак, $u(x,t) = c \cdot e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t} \sin\frac{\pi n x}{l}$. Все эти функции удовлетв. краевым услов., но мы должны получить решение удовлетв. также начальному услов. Для этого будем искать решение в виде линейной комбинации полученных решений, т.е. $V(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t} \sin\frac{\pi n x}{l}$

$V(x,0) = \varphi(x) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\frac{\pi n x}{l} = \varphi(x)$

Разложим $\varphi(x)$ в ряд по синусам $\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin\frac{\pi n x}{l}$

где $\varphi_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{\pi n x}{l}dx \Rightarrow c_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{\pi n x}{l}dx$

г) Решение найдено:

$$V(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{\pi n x}{l}dx \cdot e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t} \sin\frac{\pi n x}{l}$$

Замечание: если вместо $-\lambda^2$ взять λ^2, то решение $u(x,t)$ найти нельзя.

Док-во: $a^2 X'' = \lambda^2 X$

$$x'' - \left(\frac{\lambda}{a}\right)^2 = 0$$

$$k^2 - \left(\frac{\lambda}{a}\right)^2 = 0$$

$$k_1 = \pm \frac{\lambda}{a}$$

$$X(x) = C_1 e^{\frac{\lambda}{a}x} + C_2 e^{-\frac{\lambda}{a}x}$$

$$X(0) = 0 \Rightarrow 0 = C_1 + C_2$$
$$X(l) = 0 \Rightarrow 0 = C_1 e^{\frac{\lambda}{a}l} + C_2 e^{-\frac{\lambda}{a}l}$$

Получаем однородную систему лин. ур.

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ e^{\frac{\lambda}{a}l} C_1 + e^{-\frac{\lambda}{a}l} C_2 = 0 \end{cases}$$

Ненулевое решение этой системы существует тогда и т. т., когда определитель системы равен нулю, т.е.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\frac{\lambda}{a}l} & e^{-\frac{\lambda}{a}l} \end{vmatrix} = 0 \text{ (см. си...)}$$

$$e^{-\frac{\lambda}{a}l} - e^{\frac{\lambda}{a}l} = 0$$

$$e^{-\frac{\lambda}{a}l} = e^{\frac{\lambda}{a}l} \quad \Big| e^{-\frac{\lambda}{a}l}$$

$$1 = e^{\frac{2\lambda}{a}l} \Rightarrow \lambda = 0$$

$$x = C_1 + C_2, \text{ но } x(0) = 0 \Rightarrow x = 0$$