Аналогично, $b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mx\,dx$

Итог: Ряд Фурье для ф-ции $y = f(x)$:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos nx + b_n\sin nx],$$

где $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$$

4. При каких условиях ряд Фурье для ф-ции сходится

Теорема: Пусть периодич. ф-ция $y = f(x)$ с периодом $T = 2\pi$ непрерывна вместе с $f'(x)$ на $(-\pi; \pi)$ кроме может быть конечного числа точек разрыва первого рода

Напоминание:

x_0 - т. разрыва I-го рода

Тогда ряд Фурье для ф-ции сходится к самой ф-ции в точках непрерывности, а в т. разрыва значении суммы ряда равно

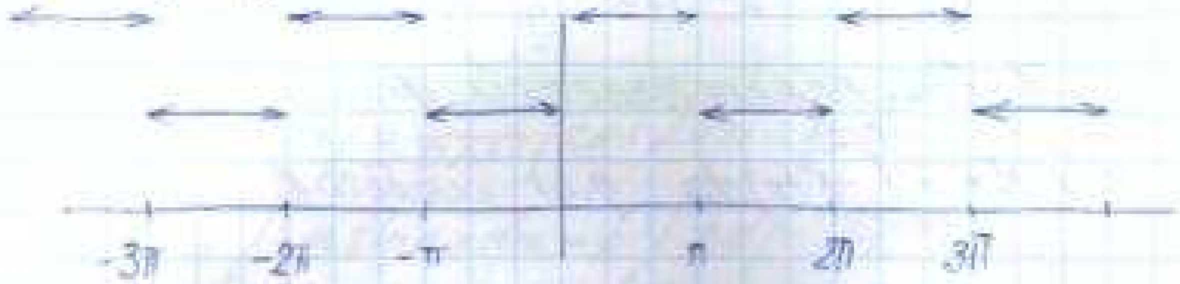
$$\frac{f(x_0-) + f(x_0+)}{2}$$

Пример: Разложить ф-цию

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -\pi < x < 0 \\ 2, & 0 < x < \pi \end{cases}$$ в ряд Фурье

Решение:

Превратим нашу ф-цию в непериодич. с периодом $T=2\pi$



$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) =$$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}1dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}2dx=\frac{\pi}{\pi}+\frac{2\pi}{\pi}=3\pi$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\cos nx\,dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}2\cos nx\,dx=$$

$$=\frac{1}{\pi n}\sin nx\Big|_{-\pi}^{0}+\frac{2}{\pi n}\sin nx\Big|_{0}^{\pi}=0$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\sin nx\,dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}2\sin nx\,dx=$$

$$=-\frac{1}{\pi n}(\cos nx)\Big|_{-\pi}^{0}-\frac{2}{\pi n}\cos nx\Big|_{0}^{\pi}=-\frac{1}{\pi n}(1-\cos\pi n)-\frac{2}{\pi n}\cdot$$

$$\cdot(\cos\pi n-1) =$$

$$\cos\pi n=(-1)^n$$

$$= -\frac{1}{\pi n}(+1-(-1)^n+2(-1)^n-2)=-\frac{1}{\pi n}((-1)^n-1)$$

$$= \frac{3}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{\pi n}\sin nx=\frac{3}{2}+\frac{2}{\pi}\sin x+\frac{2}{3\pi}\sin 3x+\dots$$

Комментарий: по теор., если $x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow$

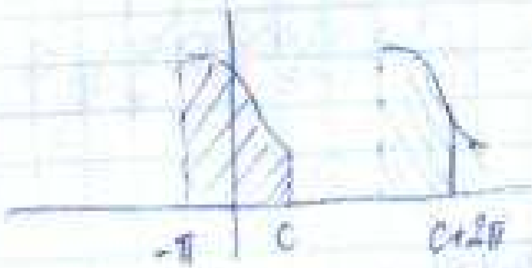
$$2=\frac{3}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{\pi n}\sin\frac{\pi n}{2}$$

по теор., если $x=0$

$1{,}5=\frac{3}{2}$

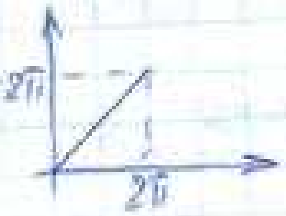
Св-ва периодической ф-ции

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx=\int_{c}^{c+2\pi} f(x)\,dx$$ для любого c



Пример: Разложите в ряд Фурье ф-ю $f(x)=x$ на $[0;2\pi]$

Периодич. продолжение
$F(x)=f(x)$ на $[0;2\pi]$



$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)\right]$$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)\,dx\ ;\ a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)\cos nx\,dx$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)\sin nx\,dx$$

По св-ву (см. конец прошлой лекции)

$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\,dx = \frac{1}{\pi}\frac{x^2}{2}\Big|_0^{2\pi} = 2\pi$

$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\,d\frac{\sin nx}{n} = \frac{1}{\pi}\left(x\frac{\sin nx}{n}\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi}\frac{\sin nx}{n}\,dx\right) =$

$= \frac{1}{\pi n^2}\cos nx\Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{\pi n^2}\left(\overset{1}{\cos 2\pi n} - \overset{1}{\cos 0}\right) = 0$

$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\,d\left(-\frac{\cos nx}{n}\right) = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{x\cos nx}{n}\Big|_0^{2\pi} +\right.$

$\left.+\int_0^{2\pi}\frac{\cos nx}{n}\,dx\right) = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{2\pi\cos 2\pi n}{n} - 0 + \frac{\sin nx}{n^2}\Big|_0^{2\pi}\right) = -\frac{2}{n}$

$x = \pi + \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{2}{n}\right)\sin nx = \pi - 2\sin x - \sin 2x - \frac{2}{3}\sin 3x - \dots$

1. Разложение чётных ф-ций в ряд Фурье

Теорема: $f(x)$ - чётная период. ф-ция с $T=2\pi$. Тогда $b_n = 0$, $a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx$, $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cdot\cos nx\,dx$

Док-во: $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} f(x)\sin nx\,dx +\right.$

$\left.+\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx\right)$

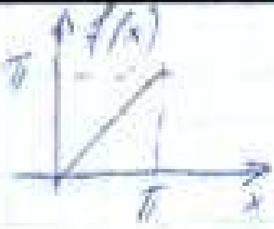
$\int_{-\pi}^{0} f(x)\sin nx\,dx \underset{x=-t}{=} \int_{\pi}^{0} f(-t)\sin(-nt)\,d(-t) = \int_{\pi}^{0} f(t)\sin(nt)\,dt =$

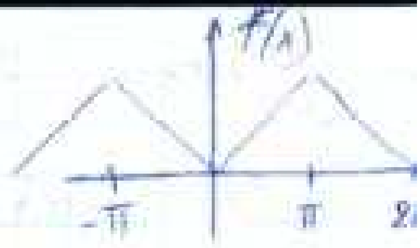
$= -\int_0^{\pi} f(t)\sin nt\,dt \Rightarrow b_n = 0$

Аналогично разбиваем интегралы в сумму 2-х интегралов, получим формулы для a_0 и a_n

Пример: разложить в ряд по косинусам

Решение:





$b_n = 0$

$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\,dx = \frac{2}{\pi}\frac{x^2}{2}\Big|_0^\pi = \pi$

$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\,d\frac{\sin nx}{n} = \frac{2}{\pi}\Big(x\frac{\sin nx}{n}\Big|_0^\pi$

$-\int_0^\pi \frac{\sin nx}{n}dx\Big) = \frac{2}{\pi}\frac{\cos nx}{n^2}\Big|_0^\pi = \frac{2}{\pi n^2}\left((-1)^n-1\right)$

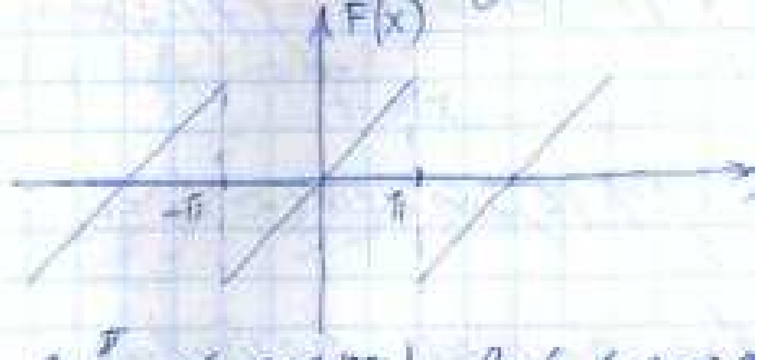
$x = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi n^2}\left((-1)^n-1\right)\cos nx = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\cos x - \frac{4}{9\pi}\cos$

2. Разложение нечетных ф-ций

Теорема. Если $f(x)$ - нечетная, то
$a_0 = a_n = 0$, $b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin nx\,dx$

Док-во: (аналогично пред. док-ву)

Пример: разложить $y=x$ в ряд по синусам



$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\,d\left(-\frac{\cos nx}{n}\right) = \frac{2}{\pi}\Big(x\Big(-\frac{\cos nx}{n}$

$+\int_0^\pi \frac{\cos nx}{n}dx\Big) = \frac{2}{\pi}\Big(\pi\Big(-\frac{\cos \pi n}{n}\Big) + \frac{\sin nx}{n^2}\Big|_0^\pi\Big) = -\frac{2}{n}$

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2}{n}(-1)^n \sin nx = 2\sin x - \sin 2x + \frac{2}{3}\sin 3x - \ldots$$

3. Разложение в ряд Фурье периодических ф-ций с произвольным периодом $T = 2l$

Теорема: Пусть $F(x)$ - периодич. с $T = 2l$, $F(x)$, $F'(x)$ непрерывна на $[-l; l]$ кроме, может быть, конечного числа точек разрыва I-го рода. Тогда, если x-т. непрерывности, то

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos\frac{\pi n x}{l} + b_n \sin\frac{\pi n x}{l}\right], \text{ где}$$

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} F(x)\,dx \;;\; a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} F(x)\cos\frac{\pi n x}{l}\,dx$$

$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} F(x)\sin\frac{\pi n x}{l}\,dx$ если x - т. разрыва, то

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos\frac{\pi n x}{l} + b_n \sin\frac{\pi n x}{l}\right] = \frac{F(x-) + F(x+)}{2}$$

Причем, если $F(x)$ - четная функция, то $b_n = 0$, $a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l F(x)\,dx$

$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l F(x)\cos\frac{\pi n x}{l}\,dx$ если $F(x)$ - нечетная, то

$$a_0 = 0,\; a_n = 0,\; b_n = \frac{2}{l}\int_0^l F(x)\sin\frac{\pi n x}{l}\,dx$$

Док-во: $F(x)$ - период с $T = 2l$

$F_1(\xi) = F\left(\frac{l\xi}{\pi}\right)$ - период с $T = 2\pi$

$$F_1(\xi + 2\pi) = F\left(\frac{l(\xi + 2\pi)}{\pi}\right) = F\left(\frac{l\xi}{\pi} + 2l\right) = F\left(\frac{l\xi}{\pi}\right) = F_1(\xi)$$

Но по пред. лекции