Но $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{n+1}\right|=0$, т.к. $\sum\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right|$ сход. по признаку Даламбера для любого x.

$\ominus\, 0 \Rightarrow$ ряд Маклорена сход. к ф-ции

4. Разложение элементарных ф-ций в степенные ряды

а) $f(x)=e^x$

1) Ряд Маклорена: $f'(x)=e^x$, $f^{(n)}(x)=e^x$

$f^{(n)}(0)=1$

$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n$ – ряд Маклорена для $y=e^x$

2) Пусть $|x|<\delta$ $-\delta<x<\delta \Rightarrow |f^{(n)}(x)|=|e^x|\le e^{\delta}$ не зависит от n

$\Rightarrow e^x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$

б) Таблица разложений в ряды Маклорена основных элементарных ф-ций.

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\dots$$

$0!=1$

$$-\infty<x<\infty$$

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}=x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}-\dots$$

$$-\infty<x<\infty$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \dots$$

$$-\infty < x < \infty$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$$

$$-1 < x \le 1$$

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots$$

$$-1 \le x \le 1$$

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \dots$$

$\alpha \ge 0 \qquad -1 \le x \le 1$

$-1 < \alpha < 0 \qquad -1 < x \le 1$

$\alpha \le -1 \qquad -1 < x < 1$

5. Применение степенных рядов к вычислению значений элементарных ф-ций (калькулятор)

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + r_3(x)$$

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}; \quad r_3(x) = \frac{f^{(4)}(x\theta)}{4!} x^4$$ — погрешность вычислений

$x = 1$

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{12+3+1}{6} = \frac{16}{6} = 2{,}666 = 2{,}(6) \approx 2{,}7$$

Погрешность вычисления

$$f^{(n)}(x) = e^x; \quad 0 < x\theta < 1 \quad \theta < 1$$

$$|f^{n}(1)| < e \le 3 \Rightarrow |r_3(x)| \le \frac{3 \cdot 1}{4!} = \frac{1}{8} = 0{,}125$$

6. Приближенное вычисление значений производной n-го порядка

$y = \frac{\sin x}{x}$ Найти $y^{(6)}(0)$

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{7!} + \ldots}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \frac{x^6}{7!} + \ldots$$

$$c_6 = -\frac{1}{7!} = \frac{y^{(6)}(0)}{6!} \Rightarrow y^{(6)}(0) = -\frac{6!}{7!} = -\frac{1}{7}$$

7. Вычисление пределов

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}}{x\sin(x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \ldots\right) - 1 - x - \frac{x^2}{2}}{x\left(x^2 - \frac{x^6}{6} + \ldots\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^3\left(\frac{1}{6} + \frac{x}{24} + \ldots\right)}{x^3\left(1 - \frac{x^4}{6} + \ldots\right)} = \frac{1}{6}$$

8. Приближенное вычисление интегр.

$$\int_0^{1/2} \sin(x^2)\,dx = \int_0^{1/2}\left(x^2 - \frac{x^6}{6} + \frac{x^{10}}{120} - \ldots\right)dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^{1/2} - \frac{x^7}{42}\Big|_0^{1/2} +$$

$$+ \frac{x^{11}}{120\cdot 11}\Big|_0^{1/2} - \ldots = \frac{1}{24} - \frac{1}{42\cdot 128} + \ldots \approx \frac{1}{24} \quad |\text{погрешность}$$

$$< \frac{1}{42\cdot 128} < 0{,}01$$

По теор. Лейбница в знакочеред. ряде можно отбрасывать бесконечный остаток ряда причем погрешность такого отбрасыв. не превосходит 1-го члена отброшенной части.

1. Применение степенных рядов к решению диф. уравнений

а) Использование ряда Маклорена

$y' = xy + 1 \qquad y(0) = 2$

Ищем решение в виде

$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \dots$

$y(0) = 2$

$y'(0) = 0\cdot 2 + 1 = 1$; $y'' = y + xy'$

$y''(0) = 2 + 0 = 2$; $y''' = y' + y' + xy''$

$y'''(0) = 2\cdot 1 + 0\cdot 2 = 2$; $y(x) = 2 + x + x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \dots$

б) метод неопредел. коэф.

Представим решение в виде степен. ряда:

$y(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \dots$

$y(0) = 2 \Rightarrow c_0 = 2$

$c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + \dots = c_0 x + c_1 x^2 + c_2 x^3 + c_3 x^4 + \dots + 1$

x^0 | $c_1 = 1$
x | $2c_2 = c_0$; $2c_2 = 2$; $c_2 = 1$
x^2 | $3c_3 = c_1$; $c_3 = \frac{1}{3}$

$y(x) = 2 + x + x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \dots$

2. Тригонометрический ряд (ряд Фурье)

Определение: Функциональный ряд вида

$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n \cos nx + b_n \sin nx]$ наз. тригоном. рядом Фурье, где a_0, a_n, b_n – наз. коэф. ряда

Свойство: ряд Фурье периодичен с периодом $T = 2\pi$, т.е. если он задает ф-цию $f(x)$, то эта ф-ция периодична с периодом $T = 2\pi$

Док-во: $\cos n(x+2\pi)=\cos(nx+2\pi n)=\cos(nx)$
$\sin n(x+2\pi)=\sin(nx+2\pi n)=\sin(nx)$

Замечание: о сравнении ряда Фурье со степен. рядом степ. ряд по сравнению с рядом Фурье обладает большей скоростью сходимости, т.е. для приближения ф-ции достаточно брать малое число слагаемых, однако не все ф-ции можно разложить в степенные ряды. На помощь приходит ряд Фурье. С его помощью можно разложить в ряды больший класс ф-ций.

3. Ряд Фурье с периодич. ф-цией $f(x)$ с периодом $T=2\pi$

Пусть $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}[a_n\cos nx+b_n\sin nx]$

Выведем ф-лы для коэф. этого ряда Фурье. Предположение, что ф-ция $f(x)$ инт. на $[-\pi;\pi]$, ряд Фурье можно почленно интегрир. на $[-\pi;\pi]$

Вычислим ряд вспомогат. интегралов

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx=\frac{1}{n}\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi}=\frac{1}{n}(\sin\pi n-\sin(-\pi n))=0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,dx=-\frac{1}{n}\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi}=-\frac{1}{n}(\cos\pi n-\cos(-\pi n))=0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nx\,dx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(1+\cos 2nx)\,dx=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2n}\sin 2nx\right)\Big|_{-\pi}^{\pi}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\pi+\frac{1}{2n}\sin 2\pi n\right)-\frac{1}{2}\left(-\pi+\frac{1}{2n}\sin(-2\pi n)\right)=\pi$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 nx\,dx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(1-\cos 2nx)\,dx=\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2n}\sin\dots\right.$$

$$= \frac{1}{2}\left(\pi - \frac{1}{2n}\sin 2\pi n\right) - \frac{1}{2}\left(-\pi - \frac{1}{2n}\sin(-2\pi n)\right) = \pi$$

$n \neq m$, $$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cdot \sin mx\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (\sin(mx+nx)+$$

$$+\sin(mx-nx))dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(m+n)x\,dx + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(m-n)x\,dx = 0$$

$n \neq m$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx \cdot \cos mx\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(\cos(mx+nx)+\cos(mx-nx))dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(m+n)x\,dx + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(m-n)x\,dx = 0$$

$n \neq m$, $$\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx \sin mx\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(\cos(mx+nx)-$$

$$-\cos(mx-nx))dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(m+n)x\,dx - \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(m-n)x\,dx = 0$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n \cos nx + b_n \sin nx]$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,dx\right]$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{a_0}{2}2\pi = \pi a_0, \quad a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$

$$f(x)\cos mx = \frac{a_0}{2}\cos mx + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n \cos nx \cdot \cos mx +$$

$$+ b_n \sin nx \cos mx]$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}\cos mx\,dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx \cos mx\,dx +\right.$$

$$\left.+ b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx \cos mx\,dx\right]$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\,dx = a_m \pi$$

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\,dx$$

Аналогично, $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$

Итог: Ряд Фурье для ф-ции $y=f(x)$:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos nx + b_n\sin nx],$$

где $a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$

$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$

$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$

4. При каких условиях ряд Фурье для ф-ции сходится

Теорема: Пусть периодич. ф-ция $y=f(x)$ с периодом $T=2\pi$ непрерывна вместе с $f'(x)$ на $(-\pi;\pi)$ кроме может быть конечного числа точек разрыва первого рода

Напоминание:

x_0 - т. разрыва I-ого рода

Тогда ряд Фурье для ф-ции сходится к самой ф-ции в точках непрерывности, а в т. разрыва значении суммы ряда равно

$$\frac{f(x_0-)+f(x_0+)}{2}$$

Пример: Разложить ф-цию

$$f(x)=\begin{cases}1, & -\pi<x<0\\ 2, & 0<x<\pi\end{cases}$$ в ряд Фурье

Решение: