$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |c_n x_0^n| = 0$

$|x| < |x_0|$ $n \to \infty \Rightarrow |c_n x_0^n| \le M$

$\sum c_n x^n$

Рассмотрим $\sum |c_n x^n| = |c_0| + |c_1 x| + |c_2 x^2| + \ldots =$

$= |c_0| + |c_1 x_0| \left|\frac{x}{x_0}\right| + |c_2 x_0^2| \left|\left(\frac{x}{x_0}\right)^2\right| + \ldots \le = M + M\left|\frac{x}{x_0}\right| +$

$+ M\left|\left(\frac{x}{x_0}\right)^2\right| + \ldots =$

$\left|\frac{x}{x_0}\right| = q < 1$

$= M + Mq + Mq^2 + Mq^3 + \ldots$

- сход., как геометр. прогрессия

По пр-ку сравнен. $\sum |c_n x^n|$ сход. по достат. пр-ку сход. для знакочеред. рядов $\sum c_n x^n$ — сход. причем абсолютно

2) Пусть $\sum c_n x^n$, расход. методом от противного предположим, что $\sum c_n x^n$ сход. при $|x| > |x_1|$. По той части теоремы следует, что $\sum c_n x_1^n$, сход. — противоречие.

Замечание: Область сход. будет иметь симметрич. относит. начала коорд. вид: либо $(-x_0; x_0)$, либо $(-x_0; x_0]$, либо $[-x_0; x_0)$, либо $[-x_0; x_0]$

6. Понятие радиуса сходимости

Определение. Число $R > 0$ наз. радиусом сход. степенного ряда $\sum c_n x^n$, если для $x: |x| < R$ ряд сходится, а для $x: |x| > R$ ряд расход.

Теорема: Пусть существ. $\tau = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| \neq 0$

Тогда $R = \frac{1}{\tau}$

Док-во: 1) $x: |x|<R$ $\quad \sum C_n x^n$

Рассмотрим $\sum |C_n x^n|$. Используем пр-к Даламбера

$$d=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_{n+1}\,x^{n+1}}{C_n\,x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_{n+1}}{C_n}\right||x| =$$

$$= \ell|x| = \frac{|x|}{R} < 1 \Rightarrow \sum|C_n x^n| \text{ сход.} \Rightarrow \sum C_n x^n$$

сход. (достат. пр-к сходимости знакопер. рядов)

2) $x: |x|>R$

$$d=\lim \frac{|C_{n+1}\,x^{n+1}|}{|C_n\,x^n|} = \frac{|x|}{R} > 1 \Rightarrow |C_{n+1}X^{n+1}| \geq |C_nX^n| \Rightarrow$$

$$|C_nX^n| \geq |C_{n_0}X^{n_0}| > 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}|C_nX^n| \neq 0 \Rightarrow$$

по необходимому признаку ряд расх.

Пример. Найти обл. сходимости

$\sum \frac{x^{2n}}{2n+1}$ $\qquad y=x^2$

$\sum\frac{y^n}{2n+1}$ $\qquad C_n=\frac{1}{2n+1};\ C_{n+1}=\frac{1}{2n+3}$

$$\ell = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_{n+1}}{C_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+3}:\frac{1}{2n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2n+3}=1$$

$R=\frac{1}{\ell}=1$

Отдельно исслед. 2 точки: $y=-1$, $y=1$

$y=-1$

$\sum\frac{(-1)^n}{2n+1}$ $\qquad \ell=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}=0\ (\downarrow 0)$ сход $\Rightarrow y=1$

$\sum\frac{1^n}{2n+1}=\sum\frac{1}{2n+1}\sim\sum\frac{1}{n}$ $\quad p=1\le 1$ - расход.

$-1 \le y < 1 \Rightarrow -1 \le x^2 \le 1$

$\begin{cases} x^2 < 1 \\ x^2 \ge -1 \end{cases}$ $\quad x^2 < 1$

$|x| < 1$

Ответ. $(-1; 1)$

Замечание:

1) Радиус сходимости можно искать по ф-ле

$$\boxed{R = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|}$$

2) Радиус сход. можно искать по ф-ле

$$\boxed{R = \frac{1}{\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{|c_n|}}}$$

3) Если $R = 0$, то обл. сход состоит из одной точки $x = 0$

4) Если $R = \infty$, то обл. сход. совпадает с числовой прямой

5) По теор. Абеля сход. внутри интервала $(-R; R)$ степенного ряда абсолютная.

1. Св-ва степенных рядов (без док-ва)

Пусть $f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \dots$

$-R < x < R$

а) $f(x)$ – бесконечно дифф. функция, причём $f'(x) = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + \dots$

$f''(x) = 2C_2 + 6C_3 x + \ldots$ где $-R < x < R$

б) $f(x)$ - интегрируем на любом отрезке, лежащем на $(-R, R)$

пусть $(a, b) \subset (-R, R)$ тогда

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b C_0 dx + \int_a^b C_1 x dx + \int_a^b C_2 x^2 dx + \ldots$$

частный случай: $(0, x) \in (-R, R) \Rightarrow$

$$\int_0^x f(x)dx = \int_0^x C_0 dx + \int_0^x C_1 x dx + \int_0^x C_2 x^2 dx + \ldots =$$

$$= C_0 x + \frac{C_1 x^2}{2} + \frac{C_2 x^3}{3} + \ldots \quad \text{где } -R < x < R$$

Пример: $1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = \frac{1}{1-x}$

$-1 < x < 1 \quad (|x| < 1)$

по св-ву а

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)' = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots ; \quad \frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 \ldots$$

$$-1 < x < 1$$

Внимание: мы в данном примере нашли сумму ряда, стоящего в правой части. По св-ву б

$$\int_0^x \frac{1}{1-x} dx = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \ldots$$

$$-\ln|1-x| \Big|_0^x = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \ldots$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \ldots$$

$$-1 < x < 1$$

Замечание - вывод: При помощи св-ва

а и б мы не только научились суммировать некотор. степенные ряды, но и раскладывать некотор. элемент. ф-ции в степенные ряды.

2. Ряд Маклорена и ряд Тейлора для ф-ции

Пусть $f(x)$ - бесконечно диф. функция

Пусть $f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \dots$

$$f(0) = c_0 \Rightarrow c_0 = f(0) = \frac{f^{(0)}(0)}{0!}$$

По свойству а:

$$f'(x) = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + \dots$$

$$f'(0) = c_1 \Rightarrow c_1 = f'(0) = \frac{f'(0)}{1!}$$

$$f''(x) = 2c_2 + 6c_3 x + \dots$$

$$f''(0) = 2c_2 \qquad c_2 = \frac{f''(0)}{2} = \frac{f''(0)}{2!}$$

По св-ву а:

$$f'''(x) = 6c_3 + \dots$$

$$f'''(0) = 6c_3 \Rightarrow c_3 = \frac{f'''(0)}{6} = \frac{f^{(3)}(0)}{3!}$$

. . . .

$$c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

Определение: степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$

наз. рядом Маклорена для ф-ции f

Замечание: если ф-ция разложена в обобщенный степен. ряд $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-$

то аналогичные выкладки приведут к

к ряду $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ котор. наз. рядом Тейлора для ф-ции $f(x)$ в т. $x=a$.

3. Сходится ли ряд Маклорена к ф-ции?

Теорема: Пусть $|f^{(n)}(x)| \leq M$ для $|x| < \delta$ где M не зависит от n, тогда ряд Маклорена сходится к ф-ции $f(x)$ в т. x для $|x| < \delta$

Лемма (без док-ва) если $f(x)$ - бесконечно дифференц. функция, то справедлива ф-ла Маклорена $f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x +$

$$+ \frac{f''(0)x^2}{2!} + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} + \frac{f^{(n+1)}(x\theta)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

$$0 < \theta < 1$$

$$f(x) = S_n + r_n(x) \qquad 0 < x\theta < x$$

где S_n - n-ая частичная сумма ряд Маклорена, $r_n(x)$ - остаточн. член в форме Лагранжа

Утверждение $\Leftarrow$ $\Rightarrow$ $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \Rightarrow \lim_{n\to\infty}(f(x) - S_n) = 0$

$\lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}(f(x) - S_n) = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n =$

$= f(x) \Rightarrow f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$

Доказываем теорему:

Пусть $|f^{(n)}(x)| \leq M \Rightarrow \lim_{n\to\infty} r_n(x) \Leftrightarrow$
$|x| < \delta$

$= \lim_{n\to\infty} f^{(n+1)}(x\theta)\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} =$

$$\left|f^{n+1}(x\theta)\frac{x^{n+1}}{n+1}\right| \leq M\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right|$$

Но $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{n+1}\right| = 0$, т.к. $\sum\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right|$ сход. п

признаку Даламбера для любого x.

$\ominus\, 0 \Rightarrow$ ряд Маклорена сход. к ф-ции

4. Разложение элементарных ф-ций в степенные ряды

а) $f(x)=e^x$

1) Ряд Маклорена: $f'(x)=e^x$, $f^{(n)}(x)=e^x$

$f^{(n)}(0)=1$

$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n$ — ряд Маклорена для $y=e^x$

2) Пусть $|x|<\delta$ $\quad -\delta<x<\delta \Rightarrow |f^{(n)}(x)|=|e^x|\le e^{\delta}$

не зависит от n

$$\Rightarrow e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

5) Таблица разложений в ряды Маклорена основных элементарных ф-ций.

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\dots$$

$0!=1$

$$-\infty<x<\infty$$

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}=x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}-\dots$$

$$-\infty<x<\infty$$