Итак $\sum \frac{1}{n^p}$ сх. $\Leftrightarrow p>1$

4. Знакочередующиеся ряды

Определение: Ряд вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}c_n$, где $c_n>0$ будем наз. знакочередующимся рядом.

$$c_1-c_2+c_3-c_4+\dots$$

Теорема Лейбница: Пусть $\sum(-1)^{n+1}c_n$,

$c_n>0$; $\lim\limits_{n\to\infty} c_n=0$, причем $c_1>c_2>c_3>c_4>\dots$

т.е. $c_n \searrow 0$ (стремится к нулю монотонно)
Тогда $\sum(-1)^{n+1}c_n$, сходится и сумма ряда $S\le c_1$

Док-во. $S_n=\underbrace{(c_1+c_2)}_{>0}+\underbrace{(c_3-c_4)}_{>0}+\dots+\underbrace{(c_{2n-1}-c_{2n})}_{>0}$

$\Rightarrow S_{2n}>0$ и $\{S_{2n}\}$ - монотонно возраст. последовательност

С др. стороны: $S_{2n}=c_1-\underbrace{(c_2-c_3)}_{>0}-\underbrace{(c_4-c_5)}_{>0}-\dots-\underbrace{c_{2n}}_{>0}$

$\Rightarrow S_{2n}<c_1 \Leftrightarrow \{S_{2n}\}$ огранич. $\overset{\text{кон}}{\Rightarrow} \{S_{2n}\}$ сход., т.е.

$\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n}=S$

Покажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n+1}=S$
Действительно, $\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}(S_{2n}+a_{2n+1})=$

$=\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n}+\lim\limits_{n\to\infty}c_{2n-1}=S+0=S$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} S_n = S \Rightarrow \sum(-1)^{n+1}c_n$ сход. $\xrightarrow{S_{2n}\quad c_1}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} S_{2n}=S\le \underline{\underline{c_1}}$

Комментарии:

1) Монотонность стремления к нулю будет выполняться, это проверять не нужно.

2) $\sum (-1)^{n+1} C_n$ сход $\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} C_n = 0$ / с учетом комм...

Пример: $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ - знакочеред. ряд

$C_n = \frac{1}{n}$ $\lim\limits_{n\to\infty} C_n = 0 \Rightarrow$ ряд сход.

Пример: $\sum \frac{(-1)^n n}{\ln n}$ $\quad C_n = \frac{n}{\ln n}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\ln n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{1/n} = \lim\limits_{n\to\infty} n = \infty \neq 0 \Rightarrow$ ряд расход.

6. Знакопеременные ряды

Определение: Если среди членов ряда имеют- ся как положит. так и отриц., то ряд на- знакопеременным.

Теорема (достаточный признак сход. для знакопеременных рядов) Если $\sum |a_n|$ сход, то $\sum a_n$ сход.

Док-во: S_n - n-ая частичная сумма ряда $\sum a_n$

S_n' - n-ая частичная сумма ря-

Пусть A_n^+ - сумма всех положит. положит. слагаемых в S_n

A_n^- - сумма всех отрицат слагаем в S_n

Тогда $S_n = A_n^+ + A_n^-$

$S_n' = A_n^+ + A_n^-$

Ряд $\sum |a_n|$ сход. $\Rightarrow \{S_n'\}$ сход. $\overset{\text{мон.}}{\Rightarrow} \{S_n'\}$ ограничен. $\Rightarrow \{A_n^+\}$ и $\{A_n^-\}$ огран. $\Rightarrow$

$\lim\limits_{n\to\infty} A_n^+ = A^+$

$\lim A_n^- = A^- \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} (A_n^+ - A_n^-) = A^+ - A^- \Rightarrow \sum a_n$ сход.

1. Знакопеременные ряды

Достаточный пр-к сходимости

$\sum |a_n|$ сход $\Rightarrow \sum a_n$ сход

Пример: $\sum \frac{\sin n}{n^2}$; $\sum \left|\frac{\sin n}{n^2}\right| = \sum \frac{|\sin n|}{n^2}$ -

$\sum \frac{|\sin n|}{n^2} \le \sum \frac{1}{n^2}$ $p=2>1$ ряд относится к сход. по признаку сравнения (вар. 1) $\sum \frac{|\sin n|}{n^2}$ сход. по дост. признаку сх-ти $\sum \frac{\sin n}{n^2}$ сход.

Замечание: этот пр-к явл. достат., но не явл. необход.

Пример: $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ сход, но $\sum \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \sum \frac{1}{n}$ - гармон. ряд $p=1\le 1$ - расх.

2. Абсолютная и условная сх-ть

Определение: Ряд $\sum a_n$ наз. абсолютно сход., если $\sum |a_n|$ сход

Определение: Ряд $\sum a_n$, наз. условно сход. если $\sum |a_n|$ - расх., но $\sum a_n$ - сход.

Пример 1. Исслед. на абсол., условн сх-ть ряд $\sum \frac{(-1)^n n}{2^n}$

План:

1) $\sum |a_n|$ - ряд с полож. членами. Если этот ряд сход., то исходный ряд будет абсолютно сход. ряд. Если этот ряд расход, то переходим к пункту 2.

2) Исследуем сам ряд $\sum a_n$

Если он сход., то $\sum a_n$ - условн. сход.
Если этот ряд расход., то в ответе нужно указать, что ряд расход.

1) $\sum |a_n| = \sum \frac{n}{2^n}$

$$k = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} (e^{\ln n})^{1/n} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} 1/n}$$

$= e^0 = 1$

Пример 2. $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

а) $\sum |a_n| = \sum \frac{1}{n^{1/2}}$ $\qquad p = \frac{1}{2} < 1$ расх.

б) $\sum a_n = \sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

$c = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ $(\downarrow 0)$ сход.

Ответ: условно сход.

Замечание: В абсолют. сход. рядах члены ряда можно переставлять как угодно (можно группировать), при этом сходимость не нарушается, и сумма ряда остаётся той же самой.

В условно сход. рядах при изменен. порядка суммирован. может измениться сумма ряда.

3. Степенные ряды

Определение: выражение вида $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ наз. степенным рядом, где числа c_n - коэф. ряда.

Замечания:

1) При x равным конкретному числу мы получим обыкновенный числовой ряд

2) Степенной ряд явл. ярким представителем функциональных рядов: $\sum\limits_{n=0} f_n(x)$, где $f_n(x) = C_n x^n$ – степенная ф-ция

3) Если положить вместо x в степенном ряде (вместо x) некотор. ф-цию $f(x)$, то мы получим $\sum C_n (f(x))^n$ который наз. обобщённым степенным рядом, исследование которого явл. исследованием классич. степенного ряда

Примеры обобщ. степен. рядов:

1) $\sum \frac{(x-a)^n}{n}$; $C_n = \frac{1}{n}$, $f(x) = x - a$

2) $\sum \frac{x^{2n}}{\sqrt{n}}$, $C_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, $f(x) = x^2$

3) $\sum \frac{\sin^n x}{n!}$; $C_n = \frac{1}{n!}$; $f(x) = \sin x$

Определение: Областью сходим. степен. ряда будем наз. множество всех значений x при которых степенной ряд будет сходиться.

4. Теорема Абеля

$\sum C_n x$

1) Если при $x = x_0$ $\sum C_n x^n$ сход., то при $|x| < |x_0|$ ряд

2) Если при $x = x_1$ $\sum C_n x_1^n$ расх., то при $|x| > |x_1|$ $\sum C_n x^n$ расх.

Док-во: Пусть $\sum C_n x^n$ – сход $\Rightarrow \lim C_n x_0^n = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |c_n x_0^n| = 0$

$|x| < |x_0|$ $\quad n \to \infty \Rightarrow |c_n x_0^n| \le M$

$\sum c_n x^n$

Рассмотрим $\sum |c_n x^n| = |c_0| + |c_1 x| + |c_2 x^2| + \ldots =$
$= |c_0| + |c_1 x_0| \left|\frac{x}{x_0}\right| + |c_2 x_0^2| \left|\left(\frac{x}{x_0}\right)^2\right| + \ldots \le M + M\left|\frac{x}{x_0}\right| +$
$+ M\left|\left(\frac{x}{x_0}\right)^2\right| + \ldots =$

$\left|\frac{x}{x_0}\right| = q < 1$

$= M + Mq + Mq^2 + Mq^3 + \ldots$

— сход., как геометр. прогрессия

По пр-ку сравнен. $\sum |c_n x^n|$ сход. по достат. пр-ку сход. знакочеред. рядов $\sum c_n x^n$ сход. причем абсолютно

2) Пусть $\sum c_n x^n$ расход. методом от противного предположим, что $\sum c_n x^n$ сход. при $|x| > |x_1|$. По той части теоремы следует, что $\sum c_n x_1^n$ сход. — противоречие.

Замечание: Область сход. будет иметь симметрич. относит. начала коорд. вид: либо $(-x_0, x_0)$, либо $(-x_0, x]$, либо $[-x_0, x_0)$, либо $[-x_0, x_0]$

6. Понятие радиуса сходимости

Определение. Число $R > 0$ наз. радиусом сход. степенного ряда $\sum c_n x^n$, если для x: $|x| < R$ ряд сходится, а для x: $|x| > R$ ряд расход.

Теорема: Пусть существ. $\tau = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| \ne 0$

Тогда $R = \frac{1}{\tau}$