2 признака сравнения

Ответ: расход.

6. Признак Даламбера

Теорема $\sum a_n$, $a_n > 0$
существ. $d = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$

а) если $d < 1 \Rightarrow$ ряд сход

б) если $d > 1 \Rightarrow$ ряд расх

в) если $d = 1 \Rightarrow$ ничего определ. сказать нельзя

Док-во: б) $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ сход.

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)} \qquad a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

$$d = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} : \frac{1}{n(n+1)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n}{n^2+3n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}} = 1$$

$\sum \frac{1}{n}$ расход.

$$a_n = \frac{1}{n}\ ; \quad a_{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

$$d = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1$$

Вывод: если $d = 1$, то нужно использовать др. признак сходимости.

а) $d<1$

для $n \geq N$

$\frac{a_{n+1}}{a_n} \le q$

$\frac{a_{n+1}}{a_n} \le q \Rightarrow a_{n+1} \le q \cdot a_n$

$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} \le q \Rightarrow a_{n+2} \le a_{n+1} q \le a_n q^2$

$\sum a_n \le \sum a_n q^n$ $q<1 \Rightarrow$
по признаку сравнения $\sum a_n$ сход.

б) $d>1$

для $n \geq N$ $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$

$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 \Rightarrow a_{n+1} \geq a_n$

$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} \geq 1 \Rightarrow a_{n+2} \geq a_{n+1} \geq a_n$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} U_n \neq 0$ по необходимому призн.
ряд расход.

Пример: $\sum \frac{n\,2^{n-1}}{(2n+1)!}$

Пояснение: $3! = 1\cdot2\cdot3 = 6$; $5! = 1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5 = 120 =$
$= 3!\cdot4\cdot5 = 4!\cdot5$

$$\frac{5!}{3!} = \frac{3!\,4\cdot5}{3!} = 4\cdot5 = 20$$

Условие применения признака Даламбера

a_n содержит либо c^n, либо знак "!"

$$a_n = \frac{n\cdot2^{n-1}}{(2n+1)!} \qquad a_{n+1} = \frac{(n+1)2^{n+1-1}}{(2(n+1)+1)!} = \frac{(n+1)2^n}{(2n+3)!}$$

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\cdot2^n}{(2n+3)!} : \frac{n\,2^{n-1}}{(2n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)}{n}\,\frac{2^n}{2^{n-1}}\,\frac{(2n+1)!}{(2n+3)!} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)2\,\underbrace{\frac{1}{(2n+3)(2n+2)}}_{\to 0} = 0 < 1 \Rightarrow \text{сход}$$

2. Радикальный признак Коши

Теорема: $\sum a_n$, $a_n > 0$

Существует $k = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$

тогда

1) $k < 1 \Rightarrow$ сход
2) $k > 1 \Rightarrow$ расход
3) $k = 1 \Rightarrow$ др. признак

Док-во.

1) $k < 1$ $\quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^n} = k$ $\quad \sqrt[n]{a_n}\ \ q\ \ 1$

Для $n \geq N$ $\sqrt[n]{a_n} \leq q$

$a_n \leq q^n \quad |q| < 1$

⇒ по признаку сравнения $\sum a_n$ сход, т.к. $\sum q^n$ сход.

2) $k > 1$ $\quad 1 \quad \sqrt[n]{a_n} \quad k$

далее $n \geq N$ $\sqrt[n]{a_n} > 1$ $a_n > 1$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$ ⇒ по необходимому признаку ряд расход

3) $\sum \frac{1}{n}$

$$k = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = \lim e^{\ln n^{\frac{1}{n}}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n}} = e^{\lim \frac{1}{n}} = 1$$

$$\sum \frac{1}{n(n+1)}$$

$$k = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n(n+1)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{2/n}} \to 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1/n}} \to 1$$

Условие применения радикального признака Коши

$$a_n = (c_n)^n$$

Пример: $\sum \left(\frac{2n+1}{n+3}\right)^n$

$$k = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2n+1}{n+3}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n+3} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+1/n}{1+3/n} = 2 > 1$$

Пример: $\sum \left(\frac{n+2}{n-3}\right)^{n^2} = \sum \left(\left(\frac{n+2}{n-3}\right)^n\right)^n$

$$k = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+2}{n-3}\right)^n \overset{[1^\infty]}{=}$$

Напоминание: $\lim_{v\to\infty} u^v \overset{[1^\infty]}{=} e^{\lim_{v\to\infty}(u-1)v}$

$$= e^{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n-3}-1\right)n} = e^{\lim_{n\to\infty}\frac{5n}{n-3}} = e^5 > 1 \Rightarrow$$ расход.

3. Интегральный признак Коши

Теорема: $\sum a_n$, $a_n > 0$

$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots$

Пусть $f(x)$ непрер. ф-ция на $[1, \infty)$.

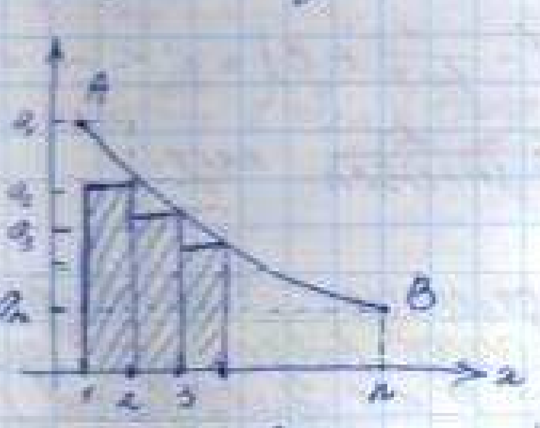
$f(1)=a_1$; $f(2)=a_2$; $f(3)=a_3 \dots$

Тогда $\sum a_n$ сход $\Leftrightarrow \int_1^\infty f(x)dx$ сход

Док-во:

$S_{aABb} = \int_1^n f(x)dx$

(из геометр. смысла опред. интеграла)



$a_2 + a_3 + \dots a_n = S_n - a_1 \leq \int_1^n f(x)dx$

Сумма площадей незаштрихованных прямоуг. равна $a_1 + a_2 + \dots a_{n-1} = S_n - a_n \geq \int_1^n f(x)dx$

Лемма $\{S_n\}$ - монотонно возрастающ. посл-ть

$\{S_n\}$ сходится $\Leftrightarrow \{S_n\}$ ограничена

$\Rightarrow$ $\sum a_n$ сход. $\Rightarrow \{S_n\}$ сход $\xrightarrow{\text{лемма}} \{S_n\}$ огран

$\int_1^n f(x)dx \le S_n - a_n$

$\Downarrow$

$\{\int_1^n f(x)dx\}$ огранич $\overset{\text{лем.}}{\Rightarrow} \underset{\text{сход}}{\{\int_1^n f(x)dx\}} \Rightarrow \int_1^\infty f(x)dx$ с

$(\Leftarrow)$ $\int_1^\infty f(x)dx \Rightarrow \{\int_1^n f(x)dx\}$ сходится $\overset{\text{лем.}}{\Rightarrow}$

$\{\int_1^n f(x)dx\}$ ограничена

$S_n \le \int_1^n f(x)dx + a_1 \Rightarrow$

$\{S_n\}$ ограничена $\overset{\text{лем}}{\Rightarrow} \{S_n\}$ сход. $\Rightarrow \sum a_n$ сход

Условие применимости: Если в знамен
теле ряда присутств. логарифм, то ну
использов. интеграл. призн. Коши

Пример 1: $\sum \frac{2}{(n+1)\ln^2 n} \sim \sum \frac{1}{n\ln^2 n}$

$\int \frac{1}{x\ln^2 x}dx = \int \frac{d\ln x}{\ln^2 x} = \int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{t}+c = -\frac{1}{\ln x}+c$

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{\ln x}+c\right) = c<\infty \Rightarrow \int_1^\infty \frac{1}{x\ln^2 x}dx$ сход.

$\Rightarrow \sum \frac{2}{(n+1)\ln^2 n}$ сход.

Определение: Ряд вида $\sum\frac{1}{n^p}$ наз. обобщенн
гармонич. рядом (рядом Дирихле) с показ
при $p\le 1$ расх. (см. пред. лекцию)
при $p>1$ используем интегр. пр-к Коши

Пример: $\sum \frac{1}{n^p}$, $p>1$

$\int \frac{1}{x^p}dx = \int x^{-p}dx = \frac{x^{1-p}}{1-p}+c = \frac{1}{(1-p)x^{p-1}}+c$

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{(1-p)x^{p-1}}+c\right) = c<\infty \Rightarrow \int_1^\infty \frac{1}{x^p}dx$ сх $\Rightarrow \sum\frac{1}{n^p}$

Итак $\sum \frac{1}{n^p}$ сх. $\Leftrightarrow p > 1$

4. Знакочередующиеся ряды

Определение: Ряд вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} c_n$, где $c_n > 0$ будем наз. знакочередующимся рядом.

$$c_1 - c_2 + c_3 - c_4 + \ldots$$

Теорема Лейбница: Пусть $\sum (-1)^{n+1} c_n$,

$c_n > 0$; $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$, причем $c_1 > c_2 > c_3 > c_4 > \ldots$

т.е. $c_n \searrow 0$ (стремится к нулю монотонно)

Тогда $\sum (-1)^{n+1} c_n$ сходится и сумма ряда $S \le c_1$

Док-во. $S_n = (\underbrace{c_1 - c_2}_{>0}) + (\underbrace{c_3 - c_4}_{>0}) + \ldots + (\underbrace{c_{2n-1} - c_{2n}}_{>0})$

$\Rightarrow S_{2n} > 0$ и $\{S_{2n}\}$ – монотонно возраст. последовательност

С др. стороны: $S_{2n} = c_1 - (\underbrace{c_2 - c_3}_{>0}) - (\underbrace{c_4 - c_5}_{>0}) - \ldots - \underbrace{c_{2n}}_{>0}$

$\Rightarrow S_{2n} < c_1 \Leftrightarrow \{S_{2n}\}$ огранич. $\overset{\text{КБМ}}{\Rightarrow} \{S_{2n}\}$ сход., т.е.

$\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = S$

Покажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n+1} = S$

Действительно, $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} (S_{2n} + c_{2n+1}) =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} + \lim\limits_{n\to\infty} c_{2n+1} = S + 0 = S$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} S_n = S \Rightarrow \sum (-1)^{n+1} c_n$ сход.

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = S \le c_1$