# Ряды

## Числовые ряды

### 1) Понятие ряда

Пусть $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ - бесконечная числовая последовательность

Определение. Выражение вида $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots$ или $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется числовым рядом, где $a_n$ - наз. общим членом ряда, $a_1, a_2, a_3 \ldots$ наз. 1-ми, 2-ми, 3-м членами

Пример: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots$

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)}$$ - общий член ряда

2) Понятие сходимости ряда

$S_1 = a_1$ ; $S_2 = a_1 + a_2$ , $S_3 = a_1 + a_2 + a_3$ , ... ,

$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$

наз. $n$-ми частичными суммами ряд

Определение. Если существует $\lim S_n = S$, то говорят, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, где $S$ наз суммой ряда. В противном случае говорят, что ряд расходится.

Пример. 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

$S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$

$+ \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$

$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$

$S = 1$ - сумма ряда и ряд сход.

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (этот ряд наз гармоническим рядом)

Покажем, что этот ряд расходится. От противного пусть сходится.

$\lim_{n\to\infty} S_n = S \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_{2n} = S$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} (S_{2n} - S_n) = S - S = 0$

$S_{2n} - S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} -$

$-\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2n} +$

$\underbrace{+ \frac{1}{2n} + \ldots + \frac{1}{2n}}_{n} = \frac{1}{2}$

$\varepsilon \quad \frac{\varepsilon}{2} \quad (S_{2n} - S_n)$ противоречие

3) Геометрическая прогрессия

а.ю $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = a + aq + aq^2 + aq^3 + \dots$

$$S_n = \frac{b_1 - b_{n+1}}{1-q} = \frac{a - aq^n}{1-q} = \frac{a(1-q^n)}{1-q}$$

1) $|q| > 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty \Rightarrow$ ряд расход.

2) $|q| < 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-q} \Rightarrow$ ряд сход.

3) $q = 1$ $\quad S_n = \underbrace{a + a + a + \dots}_{n} = na$

$\lim\limits_{n\to\infty} na = \infty \Rightarrow$ ряд расход.

4) $q = -1$ $\quad S_n = a - a + a - a + \dots = \begin{cases} a, & n - \text{нечёт} \\ 0, & n - \text{чётн} \end{cases}$

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не существ $\Rightarrow$ ряд расход

## 5. Св-ва сходящихся рядов

Замечание: символ "~" в выражении

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

будет обозначать, что ряды стоящие слева и справа этого символа будут сходиться и расходиться одновременно.

а) для $k \in N$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \sim \sum\limits_{n=k+1}^{\infty} a_n$

т.е. на сходимость ряда не влияет отбраотбросить первые k чисел. можно не писать начальное и конечные индексы суммирования т.е. $\sum a_n$

б) для любого $c \neq 0$

$$\sum a_n \sim \sum c \cdot a_n$$

$$\sum a_n \sim \sum c \cdot a_n$$

т.е. умножение каждого члена ряда на постоянное число не влияет на сходимость ряда.

Пример: $\sum \frac{2}{3^n} \sim \sum \left(\frac{1}{3}\right)^n$ – геом. прогрессия

$|q| = \frac{1}{3} < 1 \Rightarrow$ сходится

в) ряды $\sum a_n$ и $\sum b_n$ сход.

и $\sum a_n = A$ и $\sum b_n = B$

Тогда $\sum (a_n \pm b_n)$ сход и
$\sum (a_n \pm b_n) = A \pm B$

## 4. Необходимый признак сходимости

Теорема: если $\sum a_n$ сход., то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

Док-во: $\{S_n\}$ $\{S_{n-1}\}$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S \qquad \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S$$

$$\lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0$$

Следствие: если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то $\sum a_n$

расход. док-во методом от противного

Замечание:

Пример $\sum \frac{1}{n}$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, но ряд расход.

Замечание:

Пример $\sum \frac{2n-1}{100n+2}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n-1}{100n+2} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2-\frac{1}{n}}{100+\frac{2}{n}} = \frac{2}{100} = \frac{1}{50} \neq 0 \Rightarrow$ ряд расх.

5. Признак сравнения

Теорема $\sum a_n$, $a_n > 0$, $\sum b_n > 0$
$a_n \le b_n$

Тогда а) если $\sum b_n$ сход. $\Rightarrow \sum a_n$ сход.
б) если $\sum b_n$ расход $\Rightarrow \sum b_n$ расход.

Док-во: Лемма (без док-ва) монотонно возрастающая послед. сходится тогда и только тогда когда она ограничена.

$\{S_n\}$ - n-ая частичная сумма ряда для $\sum a_n$

$\{S_n\}$ - n-ая частичная сумма ряда для $\sum b_n$

это монотонно возрастающие числ. все последовательности

а) $\Sigma b_n$ сход $\Rightarrow \{S_n'\}$ сход $\Rightarrow \{S_n'\}$ ограничена
ниже

$S_n \le S_n' \Rightarrow \{S_n\}$ огранич $\Rightarrow \{S_n\}$ сход

$\Rightarrow \Sigma a_n$ сход.

б) $\Sigma a_n$ расход $\Rightarrow \{S_n\}$ расход $\Rightarrow \{S_n\}$ не огр.

$\Rightarrow \{S_n'\}$ неогр $\Rightarrow \{S_n'\}$ расх $\Rightarrow \Sigma b_n$ расх

Пример: $\Sigma \frac{|\sin n|}{2^n} \le \Sigma \frac{1}{2^n} = \Sigma \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$|q| = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow$ сход.

Вариант 2 (признак сравнения)

Пусть $\Sigma a_n$, $a_n > 0$, $\Sigma b_n$, $b_n > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c \ne 0$$

Тогда $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c \Rightarrow$

$c - \varepsilon \le \frac{a_n}{b_n} \le c + \varepsilon$, т.е

$c_1 \le \frac{a_n}{b_n} \le c_2 \Rightarrow a_n \le c_2 b_n$ и $b_n \le \frac{1}{c_1} a_n$ т.т.д

Пример. $\Sigma \frac{2n^2 - 1}{3n^3 + n - 4} \sim \Sigma \frac{2n^2}{3n^3} \sim \Sigma \frac{1}{n}$ - гармон.
расх.

Обоснование результата:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \left( \frac{2n^2 - 1}{3n^3 + n - 4} : \frac{1}{n} \right) = \lim \frac{2n^3 - n}{3n^3 + n - 4} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2 - \frac{1}{n^2}}{3 + \frac{1}{n^2} - \frac{4}{n^3}} = \frac{2}{3} \ne 0 \Rightarrow$$ используем вариант

2 признака сравнения

Ответ: расход.

6. Признак Даламбера

Теорема $\sum a_n$, $a_n > 0$
существ $d = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$

а) если $d < 1 \Rightarrow$ ряд сход

б) если $d > 1 \Rightarrow$ ряд расх

в) если $d = 1 \Rightarrow$ ничего определ сказать нельзя

Док-во: б) $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ сход.

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)} \qquad a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

$$d = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} : \frac{1}{n(n+1)} =$$

$$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+n}{n^2+3n+2} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}} = 1$$

$\sum \frac{1}{n}$ расход.

$$a_n = \frac{1}{n}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

$$d = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1$$

Вывод: если $d = 1$, то нужно использовать др. признак сходимости.