$+ 2x + x^2)dx = \int_0^1 (2x - \frac{3}{2}x^2)dx = (x^2 - \frac{x^3}{2})\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$

3. Формула № 3

$$\iint_{\Sigma_n} (\bar F \cdot n_0)\, d\sigma = \pm\iint_{\Sigma_{yz}} P\,dydz \pm \iint_{\Sigma_{xz}} Q\,dxdz \pm \iint_{\Sigma_{xy}} R\,dxdy$$

Комментарии:

1) Знак „+" „-" выбир. в зависимости от того какой угол (острый или тупой) образует вектор нормали с каждой из осей координат. Например, если образ. с Ox острый угол, то 1-ый интеграл идет со знаком „+"

2) Если одна из проекций образует нулевую площадку, то соответствующ. слагаемое обращается в ноль.

3) По сравнению с 1-ой и 2-ой формулами объем вычислений интегр. по этой ф-ле увелич. в 3-и раза

4) Эта ф-ла применима в том случае если

Σ: $z = z(x,y)$, что бывает

$x = x(y,z)$ РЕДКО!!!

$y = y(x,z)$

5) Вытекает из того, что $\bar n_0 = (\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma)$ и $\cos\alpha\, d\sigma = \pm\, dydz$; $\cos\beta\, d\sigma = \pm\, dxdz$; $\cos\gamma\, d\sigma = \pm\, dxdy$

Пример: 1) Найдем $\bar n$ через $\bar{AB} \times \bar{BC} = \{0; 1; 1\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \bar n = \{0; -1; -1\}$

$\ominus - \iint_{\Sigma_{xz}} - z\,dxdz - \iint_{\Sigma_{xy}} x\,dxdy \ominus$

2) Найдем Σ_{xz} и Σ_{xy}

Σ_{xz}

$0 \le x \le 1$, $2-x \le z \le 2$ $\qquad$ $0 \le x \le 1$, $0 \le z \le 1$

5) Вычисление

$$\textcircled{1}\ \int_0^1 dx \int_{2-x}^{2} z\,dz - \int_0^1 x\,dx \int_0^1 dy = \int_0^1 dx\, \frac{z^2}{2}\Big|_{2-x}^{2} - \int_0^1 x\,dx =$$

$$= \int_0^1 \left(2 - \frac{(2-x)^2}{2}\right)dx - \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \int_0^1 \left(2 - 2 + 2x - \frac{x^2}{2}\right)dx - \frac{1}{2} =$$

$$= \left(x^2 - \frac{x^3}{6}\right)\Big|_0^1 - \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{2} = \frac{2}{6}$$

Элементы теории поля

1. Понятие вектор-градиента ф-ции

а) Определение: Вектор-градиентом функции $u = u(x,y,z)$ назв. векторное поле
$$\operatorname{grad} u = \{u'_x;\ u'_y;\ u'_z\}$$

б) Геометрический смысл

Пусть $u(x,y,z) = 0$ – ур. поверхности

$\operatorname{grad} u \parallel \bar{n}$

в) Производная по направлению

$u = u(x,y,z)$, $M_0(x_0; y_0; z_0)$, $\bar{l}$ – вектор.

Определение: $\frac{\partial u}{\partial \bar{l}}(M_0) = \lim \frac{\Delta u}{\Delta l}$, где

$\Delta u = u(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y; z_0 + \Delta z) - u(x_0; y_0; z_0)$ –

приращение ф-ции

Выведем ф-лу для $\frac{\partial u}{\partial \bar r}$

Пусть $u = u(x;y;z)$ дифференцируемая функция $\Rightarrow \Delta u = u'_x(M_0)\Delta x + u'_y(M_0)\Delta y + u'_z(M_0)\Delta z + |\Delta \bar r|\cdot \alpha(|\Delta \bar r|)$, где $\alpha(|\Delta \bar r|)$ - б. м. ф. при $|\Delta \bar r| \to 0$

$$\Rightarrow \frac{\Delta u}{\Delta \bar r} = \frac{(\text{grad}\,u \cdot \Delta \bar r)}{|\Delta \bar r|} + \alpha(|\Delta \bar r|)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial \bar r} = \lim_{|\Delta \bar r| \to 0} \frac{\Delta u}{|\Delta \bar r|} = \lim_{|\Delta \bar r| \to 0} \left[\left(\text{grad}\,u \cdot \frac{\Delta \bar r}{|\Delta \bar r|}\right) + \alpha(|\Delta \bar r|) \right] =$$

$$= (\text{grad}\,u \cdot \bar r_0) = \frac{(\text{grad}\,u \cdot \bar r)}{|\bar r|}$$

Формула для вычисления производной по направлению:

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial \bar r}(M_0) = \frac{(\text{grad}\,u(M_0)\,\bar r)}{|\bar r|}}$$

Пример: $u = x^2y - z$ $M_0(1;1;1)$ $N(2;3;3)$

Вычислить $\frac{\partial u}{\partial \bar r}$, где $\bar r = \overline{M_0N}$

Решение: $\text{grad}\,u = \{2xy; x^2; -1\}$

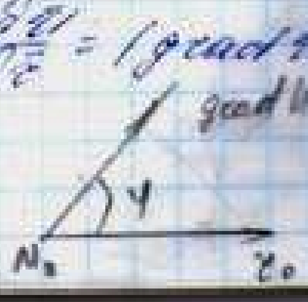
$\text{grad}\,u(M_0) = \{2; 1; -1\}$ $\bar r = \{1; 2; 2\}$

$\text{grad}\,u(M_0)\bar r = 2\cdot1 + 1\cdot2 + (-1)\cdot2 = 2$ $|\bar r| = \sqrt{1+4+4} = 3$

$$\frac{\partial u}{\partial \bar r} = \frac{2}{3}$$

в) Вектор - градиент указывает направление наибольшего роста функции

$$\frac{\partial u}{\partial \bar r} = (\text{grad}\,u \cdot \bar r_0) = |\text{grad}\,u|\cdot|\bar r_0|\cos\varphi = |\text{grad}\,u|\cos\varphi$$



$\frac{\partial u}{\partial \bar r}$ max, если $\varphi = 0$, т.е

$\bar r_0 \parallel \text{grad}\,u$

$\Rightarrow$ grad U указывает направление наибольшего роста ф-ции.
Если $\varphi = \pi \Rightarrow \bar{\ell} \uparrow\downarrow$ grad $U \Rightarrow$ grad U указывает направление наименьшего роста ф-ции.

Замечание: если $\bar{\ell} \cdot$ grad u, то $\frac{\partial u}{\partial \ell} = |\text{grad } U| \Rightarrow$ длина grad представляет собой наибольшую скорость роста ф-ции в данной точке.

2. Понятие дивергенции векторного поля:

а) Определение: Дивергенцией векторного поля $\bar{a} = \{P, Q, R\}$ наз. скалярное поле (числовая ф-ция)
$$div\,\bar{a} = P'_x + Q'_y + R'_z$$

б) Формула Гаусса Остроградского

$$\boxed{\underset{\Sigma_{з},\ \bar{n}\text{ - внешн.}}{\iint} (\bar{a}\,\bar{n}_0)\,d\sigma = \underset{\Omega_{\Sigma}}{\iiint} div\,\bar{a}\,dxdydz}$$

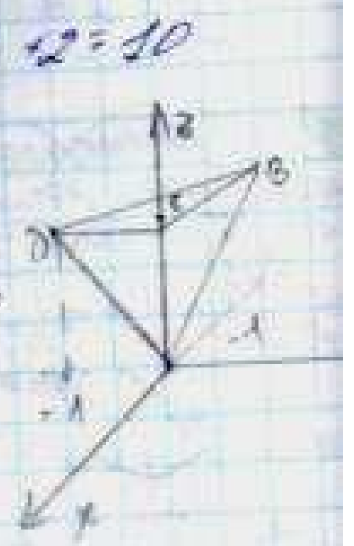
Пример. Вычислить поток $\bar{a} = \{2x;\ 6y;\ 2z\}$ через замкнутую поверхность пирамиды $ABCD$: $A(0,0,0)$ $B(-1,0,2)$ $C(0,3,2)$ $D(0,-1,2)$.

$$div\,\bar{a} = (2x)'_x + (6y)'_y + (2z)'_z = 2+6+2 = 10$$

$$\Pi = \underset{ABCD}{\iint} (\bar{a}\cdot\bar{n}_0)\,d\sigma = \underset{V_{ABCD}}{\iiint} 10\,dxdydz =$$

$$= 10 \cdot V_{ABCD} = 10 \cdot \frac{1}{3} S_{DBC} \cdot CA = \frac{10}{3} \cdot \frac{1 \cdot 4}{2} \cdot 2 =$$

$$= \frac{10}{3}$$



в) Физический смысл дивергенции

Рассмотрим т. M_0 $M_0 \in \Omega_\varepsilon$

По теореме о среднем

$$\iiint_{\Omega_\varepsilon} \operatorname{div} \bar{a}\, dx\,dy\,dz = \operatorname{div}\bar{a}(M)\cdot V_\Omega$$

$$\Rightarrow \operatorname{div}\bar{a}(M) = \frac{\iiint_{\Omega_\varepsilon} \operatorname{div}\bar{a}\, dx\,dy\,dz}{V_{\Omega_\varepsilon}} =$$

$$\overset{\text{ф. О-О}}{=} \frac{\iint_{S} (\bar{a}\cdot\bar{n}_0)\, d\sigma}{V_{\Omega_\varepsilon}}$$

$$\lim_{V_\Omega \to 0} \operatorname{div}\bar{a}(M) = \lim \frac{\iint_{S} (\bar{a}\cdot\bar{n}_0)\, d\sigma}{V_\Omega}$$

$$\operatorname{div}\bar{a}(M_0) = \lim_{V_\Omega \to 0} \frac{\iint_{S} (\bar{a}\cdot\bar{n}_0)\, d\sigma}{V_\Omega}$$

$\operatorname{div}\bar{a}(M_0)$ можно наз. плотностью источников

Случаи:

а) $\operatorname{div}\bar{a}(M_0) > 0 \Rightarrow M_0$ наз. истоком

б) $\operatorname{div}\bar{a}(M_0) < 0 \Rightarrow M_0$ наз. стоком

в) $\operatorname{div}\bar{a}(M_0) = 0 \Rightarrow \bar{a}$ наз. соленоидальным в т. M_0

Замечание. Поле скоростей любой реки будет соленоидальным

5. Понятие вектора-ротора для векторного поля

а) Определение. Вектор-ротором векторного поля $\bar{a} = \{P, Q, R\}$ наз. векторное поле

$$\operatorname{rot}\bar{a} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \bar{i}(R'_y - Q'_z) - \bar{j}(R'_x - P'_z) + \bar{k}(Q'_x - P'_y)$$

б) Формула Стокса

$$\boxed{\oint_L \bar a \cdot d\bar l = \iint_{\Sigma_L} (\mathrm{rot}\,\bar a \cdot \bar n_0)\, d\sigma}$$

Комментарий.
Направление обхода кривой L и направление вектора нормали n согласуются по правилу Буравчика.

Пример. Вычислить циркуляцию векторного поля $\bar a = \{2y;\ -5z;\ x\}$ вдоль контура $\triangle ABC$, где $A(2;0;0)$, $B(0;3;0)$, $C(0;0;1)$

Комментарий.
1) Направление контура обхода $\triangle$ задано порядк. т. ABC

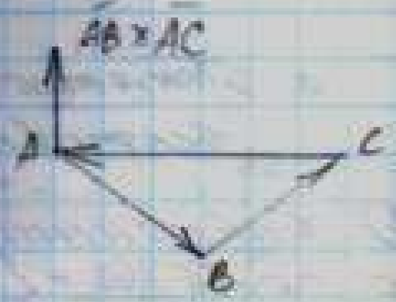
2) Криволин. интегр. 2-ого рода замкнут. кривой будем наз. циркуляцией.

$$\mathrm{rot}\,\bar a = \begin{vmatrix} \bar i & \bar j & \bar k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2y & -5z & x \end{vmatrix} = \{(x)'_y - (-5z)'_z;\ (2y)'_z -$$

$$- (x)'_x;\ (-5z)'_x - (2y)'_y\} = \{5;\ -1;\ -2\}$$

$$\bar n = \overline{AB} \times \overline{AC} =$$

$$= \begin{vmatrix} \bar i & \bar j & \bar k \\ -2 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \{3, 2, 6\}$$



$$|\bar n| = \sqrt{9+4+36} = 7$$

$$(\mathrm{rot}\,\bar a \cdot \bar n_0) = \frac{\mathrm{rot}\,\bar a \cdot \bar n}{|\bar n|} = \frac{5\cdot 3 - 1\cdot 2 - 2\cdot 6}{7} = \frac{1}{7}$$

$$\iint_{\Sigma_L} \frac{1}{7}\, dS = \frac{1}{7} S_{\triangle ABC} = \frac{1}{7}\,\frac{|\overline{AB} \times \overline{AC}|}{2} = \frac{1}{7}\cdot\frac{7}{2} = \frac{1}{2}$$

в) Физический смысл ротора.

По теореме о среднем

$$\iint_{\Sigma_\varepsilon} (\operatorname{rot}\bar a\cdot\bar n_0)\,d\sigma = (\operatorname{rot}\bar a\cdot\bar n_0)(M)\cdot S_{\Sigma_\varepsilon} \Rightarrow$$

$$(\operatorname{rot}\bar a\cdot\bar n_0)(M) = \iint_{\Sigma_\varepsilon} (\operatorname{rot}\bar a\cdot\bar n_0)\,d\sigma \overset{\text{по т. Стокса}}{=} \frac{\oint_L \bar a\,d\bar l}{S_{\Sigma_\varepsilon}}$$

$$\lim_{S_{\Sigma_\varepsilon}\to 0} (\operatorname{rot}\bar a\cdot\bar n_0)(M) = \lim_{S_{\Sigma_\varepsilon}\to 0} \frac{\oint \bar a\,d\bar l}{S_{\Sigma_\varepsilon}} \Rightarrow$$

$$\operatorname{rot}\bar a(M_0)\cdot\bar n_0 = \lim_{S_{\Sigma_\varepsilon}\to 0} \frac{\oint \bar a\,d\bar l}{S_{\Sigma_\varepsilon}} \Rightarrow$$ $\operatorname{rot}\bar a(M_0)$ характеризует направление от оси вокруг которой происходит вихри в векторном поле