$$M=\iint\limits_{OA'B'C'} x\,\frac{\sqrt{17}}{2}\,dx\,dy=\frac{\sqrt{17}}{2}\int_0^2 x\,dx\int_x^2 dy=\frac{\sqrt{17}}{2}\int_0^2 x\,dx\,(2-x)=$$

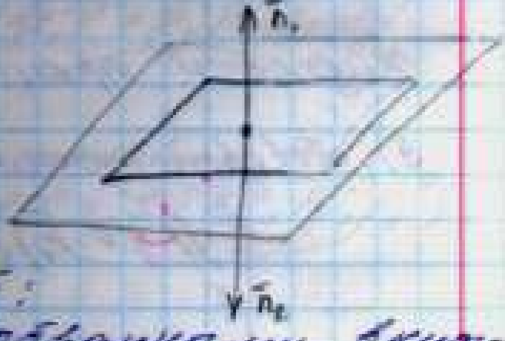
$$=\frac{\sqrt{17}}{2}\int_0^2(2x-x^2)\,dx=\frac{\sqrt{17}}{2}\left(x^2-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^2=\frac{2\sqrt{17}}{3}$$

Поверхностный интеграл II рода

1. Определение

а) Дано: ориентиров-ая пов-ть Σ ориентация пов-ти может задаваться выбором 1 из 2-х сторон пов-ти

Также ориентация пов-ти может задаваться выбором вектора нормали пов-ти

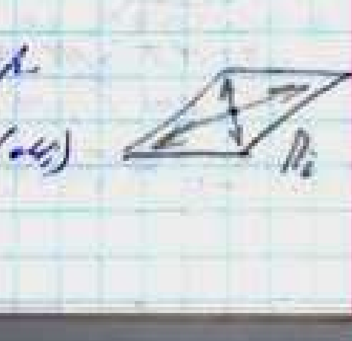


Вектор ф-ия:

$\bar v=\{P(x,y,z),\ Q(x,y,z),\ R(x,y,z)\}$ на Σ - вектор скорости

б) Разбиение пов-ти Σ:
набор площадок Π_i с выбранными внутренними точками M_i;
d_n - диаметр разбиения

в) Интегральная сумма

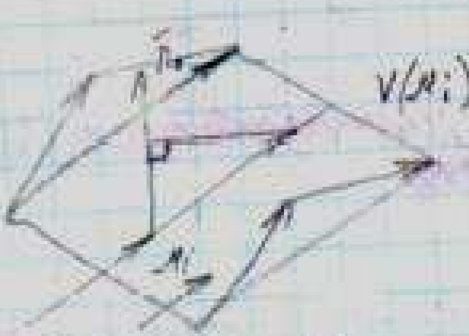


$$S_n=\sum_{i=1}^{n}\left(\bar v(M_i)\bar n_i\right)S_{\Pi_i},\ \text{где}$$

S_{Π_i} - площадь площадки Π_i;
$\bar n_i$ - ед. вектор выбранной нормали $(\bar v(M_i)\cdot\bar n_i)$ - скалярное пр-ние векторов $\bar v(M_i)$ и $\bar n_i(M_i)$

$M(x_2, y_2, \cancel{z_2})$; $M_3(x_3, y_3, z_3)$

г) Физический (гидродинамический) смысол инте-
гральной суммы



В каждой т. площад-
Π_i восстановим вектор
$\bar{v}(M_i)$, получим "наклон-
ную призму". можно ас-
социировать с кол-вом жид-
кости протекающей че-
площадку Π_i за ед. врем-
В гидродинамике кол-во
жид. протект за ед. вр. на-
потоком векторного по-
через данную пов-ть

$$V_{призм} = S_{\Pi_i} \cdot H =$$

$$= S_{\Pi_i} \cdot пр_{\bar{n}_0} \bar{V} = S_{\Pi_i} \frac{\bar{v} \cdot \bar{n}_0}{|\bar{n}_0|} =$$

$$(\bar{v} \cdot \bar{n}_0) S_{\Pi_i}$$

Вывод: Интегр. сумма
почти равна кол-ву
жидкости протект. через пов-ть Σ в ед. в

д) Поверхностный интеграл II рода

$$\iint_{\Sigma} (\bar{v} \cdot \bar{n}_0) d\sigma = \lim_{d \to 0} I_n$$

Альтернативное обозначение.

$$\iint_{\Sigma} P dy dz + Q dx dz + R dx dy$$

Логический способ запоминания

$dy dz$: не хватает dx => приписываем
 от $\bar{v}$, т.е P

$dx dz$: не хват. dy => припис. коорд y
 от $\bar{v}$, т.е. Q...

Способы вычисления поверхностного интеграла II рода

1) Формула №1

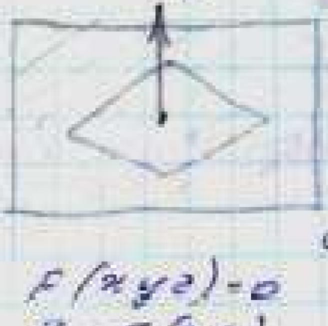
$$\iint\limits_{\Sigma} (\bar v\cdot \bar n_0)\,d\sigma = \iint\limits_{\Sigma_{xy}} (\mp P z'_x \mp Q z'_y \pm R)\,dx\,dy$$

где $\bar v = \{P\, Q\, R\}$

Верхний ряд знаков выбир. в случае, если $\bar n$ образует острый угол с осью OZ, в противном случае...

Док-во: Поверхн. инт. II рода - это пов. инт. I рода вычисленный от ф-ии $(\bar v\cdot \bar n_0)$ тогда

$$\iint\limits_{\Sigma \bar n} (\bar v\cdot \bar n_0)\,d\sigma = \iint\limits_{\Sigma_{xy}} (\bar v\cdot \bar n_0)\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\,dx\,dy$$



$F(xyz)=0$ - пов-ть

$\bar n = \pm\, \mathrm{grad}\, F = \pm\{F'_x; F'_y; F'_z\}$

В нашем случае:

$F(xyz)=0$

$z=z(xy)$

$z-z(xy)=0 \Rightarrow F(xyz)=z-z(xy)$

$\mathrm{grad}\, F = \{-z'_x; -z'_y; 1\}$

Вектор образ. с любой осью коорд. острый угол тогда и только тогда, когда соответств. этой оси координата положительная.

$$\bar n_0 = \frac{\bar n}{|\bar n|} = \pm\frac{\mathrm{grad}\, F}{|\mathrm{grad}\, F|} = \pm\frac{1}{\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}}(-z'_x; -z'_y; 1)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+(z_x')^2+(z_y')^2}}\left(\pm z_x' ; \mp z_y' ; \pm 1\right)$$

$$(\bar{v}\,\bar{n}_0) = \frac{1}{\sqrt{1+(z_x')^2+(z_y')^2}}\left(\pm P z_x' ; \mp Q z_y' ; \pm R\right)_{z=\varphi(x,y)}$$

Пример: $\iint (\bar{v}\,\bar{n}_0)\,d\sigma$

$\Sigma_n = \triangle ABC$ $A(0,0,2)$ $\quad \bar{v} = \{\overset{P}{y} ; \overset{Q}{-z} ; \overset{R}{x}\}$

$B(1,0,2)$ $\quad n$ – образ. тупой угол

$C(1,1,1)$ $\quad$ с Oz

1. Найдём ур-ние пл-ти ABC

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-2 \\ 1-0 & 0-0 & 2-2 \\ 1-0 & 1-0 & 1-2 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} x & y & z-2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$x\cdot 0 - y(-1) + (z-2)1 = 0$$
$$y + z - 2 = 0 \Rightarrow z = 2 - y$$
$$z_x' = 0 \qquad z_y' = -1$$

2. Найдём Σ_{xy}

$0 \le x \le 1$
$0 \le y \le x$

3. Вычисление

$$\int_0^1 dx \int_0^x \left(y\cdot 0 + (-z)(-1) - x\right) dy = \int_0^1 dx \int_0^x (2 - y - x)\,dy$$

$$= \int_0^1 dx \left(2y - \frac{y^2}{2} - xy\right)\Big|_0^x = \int_0^1 dx \left(2x - \frac{x^2}{2} - x^2\right) = \int_0^1 \left(2x - \frac{3}{2}\right.$$

$= \left(x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

Замечание: Вводя не ось Oz, а оси Ox; Oy можно получить аналогичные ф-лы:

1) $\iint\limits_{\Sigma_n} (\bar{v} \cdot \bar{n}_0)\,d\sigma = \iint (\pm P \mp Q x'_y \mp R x'_z)\,dy\,dz$

2) $\iint\limits_{\Sigma_n} (\bar{v}\, \bar{n}_0)\,d\sigma = \iint\limits_{\Sigma_{xy}} (\mp P y'_x \pm Q \mp R y'_z)\,dx\,dz$

В предыд. задаче можно было бы использ. ф-лу 1), т.к. подинтегральная ф-ция зависела от x, z заменять эти переменные не нужно.

2. Формула №2

$\iint\limits_{\Sigma_n} (\bar{v} \cdot \bar{n}_0)\,d\sigma = \iint\limits_{\Sigma_{xy}} \frac{\bar{v} \cdot \bar{n}}{|n_z|}\,dx\,dy$

Комментарий: если подинтегральная ф-ция не будет содержать z и вектор нормали можно найти не прибегая к ур-ию поверхности.

Вывод: из предыдущей формулы $\Rightarrow$

$\iint\limits_{\Sigma_n} (\bar{v}\, \bar{n})\,d\sigma = \iint\limits_{\Sigma_{xy}} (\bar{v} \cdot (\pm \operatorname{grad} F))\,dx\,dy =$

$\pm \operatorname{grad} F \parallel \bar{n} \Rightarrow \pm \operatorname{grad} F = k\bar{n}$

$(\mp z'_x; \mp z'_y; \pm 1) = k(n_x, n_y, n_z) \Rightarrow$

$k = \frac{1}{|n_z|}$

3) $\iint\limits_{\Sigma_{xy}} \left(\bar v \cdot \frac{\bar n}{|n_z|}\right) dxdy = \iint\limits_{\Sigma_{xy}} \frac{\bar v \cdot \bar n}{|n_z|}\, dxdy$ – и т.д.

Замечание: 1) $\iint\limits_{\Sigma_n} (\bar v \cdot \bar n)\, d\sigma = \iint\limits_{\Sigma_{yz}} \frac{\bar v \cdot \bar n}{|n_x|}\, dydz$

2) $\iint\limits_{\Sigma_n} (\bar v \cdot \bar n)\, d\sigma = \iint\limits_{\Sigma_{xz}} \frac{\bar v \cdot \bar n}{|n_y|}\, dxdz$

Пример: Решить 1 задачу при помощи формулы 2)

1) Вычислим Σ_{xz}: $A(0,0,2)$
$B(1,0,2)$
$C(1,0,1)$

$\frac{x-0}{1-0} = \frac{z-2}{1-2}$

$\bar v = \{y; z,$

$x = 2-z$

$z = 2-x$

$0 \le x \le 1$

$2-x \le z \le 2$

2) Как найти вектор нормали не прибегая к градиенту: через векторное произведение

$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \{0, 1, 1\}$

$\bar n = \{0; -1; -1\}$

3) Вычислим: $\iint\limits_{A'B'C'} \frac{y \cdot 0 - z(-1) + x(-1)}{|-1|}\, dxdz =$

$= \int_0^1 dx \int_{2-x}^{2} (z-x)\, dz = \int_0^1 dx \left(\frac{z^2}{2} - xz\right)\Big|_{2-x}^{2} =$

$= \int_0^1 dx\left(2 - 2x - \frac{(2-x)^2}{2} + x(2-x)\right) = \int_0^1 \Big(2 - 2x - 2 + 2x - \frac{x^2}{2}$

$+2x+x^2)dx = \int_0^1 (2x - \frac{3}{2}x^2)dx = (x^2 - \frac{x^3}{2})\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$

3. Формула № 3

$$\iint_{\Sigma_n} (\bar F, n_0)\, d\sigma = \pm\iint_{\Sigma_{yz}} P\, dydz \pm \iint_{\Sigma_{xz}} Q\, dxdz \pm \iint_{\Sigma_{xy}} R\, dxdy$$

Комментарии:

1) Знак „+" и „–" выбир. в зависимости от того какой угол (острый или тупой) образует вектор нормали с каждой из осей координат. Например, если образ. с Ox острый угол, то 1-ый интеграл идет со знаком „+"

2) Если одна из проекций обращается в нулевую площадку, то соответствующ. слагаемое обращается в ноль.

3) По сравнению с 1-ой и 2-ой формулами объем вычислений интегр. по этой ф-ле увелич. в 3-и раза

4) Эта ф-ла применима в том случае если Σ: $z = z(x,y)$, $x = x(y,z)$, $y = y(x,z)$, что бывает редко!!!

5) Вытекает из того, что $\bar n_0 = (\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma)$ и $\cos\alpha\, d\sigma = \pm dydz$; $\cos\beta\, d\sigma = \pm dxdz$; $\cos\gamma\, d\sigma = \pm dxdy$

Пример: 1) Найдем $\bar n$ через $\overline{AB} \times \overline{BC} = \{0; 1; 1\} \Rightarrow \bar n = \{0; -1; -1\}$

$= -\iint_{\Sigma_{xz}} -z\,dxdz - \iint_{\Sigma_{xy}} x\,dxdy =$

2) Найдем Σ_{xz} и Σ_{xy}

Σ_{xz}