Этот интеграл не зависит от пути интегрирования

$$P'_y = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)'_y = -\frac{1}{y^2}$$

$$Q'_x = \left(\frac{2}{y} - \frac{x}{y^2}\right)'_x = -\frac{1}{y^2}$$

Используем метод потенциала:

$(x_0, y_0) = (1, 1)$

$$U(x,y) = \int_1^x \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{1}\right) dt + \int_1^y \left(\frac{2}{t} - \frac{x}{t^2}\right) dt =$$

$$= \left(\ln|t| + t\right)\Big|_1^x + \left(2\ln|t| + \frac{x}{t}\right)\Big|_1^y = \ln|x| + x - (\ln 1 + 1) +$$

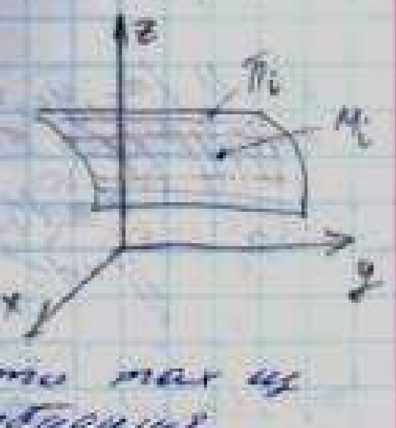
$$+ 2\ln|y| + \frac{x}{y} - \left(2\ln 1 + x/1\right) = \ln|x| - 1 + 2\ln|y| + x/y$$

③ $U(B) - U(A) = \ln 2 - 1 + 2\ln 2 + 2/2 - (\ln 1 - 1 + 2\ln 1 +$

$+ 1/1) = 3\ln 2$

Поверхностный интеграл 1 рода

1 Определение



а) Дано: поверхность Σ

$f(x, y, z)$ определена на Σ

б) Разбиение Σ: набор площадок Π_i с выбранными в каждой площадке Π_i внутр. точек M_i

d_n – диаметр разбиения – это max из площадей всех площадок разбиения.

в) Интегральная сумма

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(M_i) \cdot S_{\Pi_i}, \text{ где } S_{\Pi_i} \text{ – площадь } \Pi_i$$

г) Физический смысл: если $f(x,y,z)$ - плотность масс пластины Σ, то $I_n \approx$ масса изогнутой пластины.

д) Поверхностный интеграл I-ого рода

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,d\sigma = \lim_{d_n \to 0} I_n$$

2. Св-ва и приложения

а) $\iint_{\Sigma} c f\,d\sigma = c\iint_{\Sigma} f\,d\sigma$

б) $\iint_{\Sigma}(f \pm g)\,d\sigma = \iint_{\Sigma} f\,d\sigma \pm \iint_{\Sigma} g\,d\sigma$

в) $\Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2$

$$\iint_{\Sigma} f\,d\sigma = \iint_{\Sigma_1} f\,d\sigma + \iint_{\Sigma_2} f\,d\sigma$$

г) $\iint_{\Sigma} 1\,d\sigma = S_{\Sigma}$ - площадь пов-ти

д) $\rho(x,y,z)$ - плотность

$$\iint_{\Sigma} \rho\,d\sigma = M_{\Sigma}$$ - масса пластины

е) $M_c(x_c, y_c, z_c)$ - центр тяжести для однор. пластины Σ

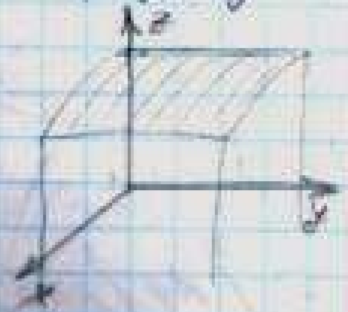
$$x_c = \frac{\iint_{\Sigma} x\,d\sigma}{\iint_{\Sigma} 1\,d\sigma}; \quad y_c = \frac{\iint_{\Sigma} y\,d\sigma}{\iint_{\Sigma} 1\,d\sigma}; \quad z_c = \frac{\iint_{\Sigma} z\,d\sigma}{\iint_{\Sigma} 1\,d\sigma}$$

ж) Моменты инерции пластины Σ с плотностью $\rho = \rho(x,y,z)$

$I_x = \iint\limits_{\Sigma} (y^2+z^2)\rho\, d\sigma$; $I_y = \iint\limits_{\Sigma} (x^2+z^2)\rho\, d\sigma$;

3. Способы вычисления

а) Пусть Σ задаётся ур-нием $z = z(x,y)$, где $(x,y) \in D_{xy}$



Осн. св-во Σ: с любой вертик. прямой пов-ть должна пересек. в небольше чем 1-ой точке

D_{xy} – проекция Σ на Oxy

тогда $\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\, d\sigma = \iint\limits_{D_{xy}} f(x,y,z(x,y)) \sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\, dx\, dy$

б) Пусть Σ задаётся ур-нием $y = y(x,z)$, где $(x,z) \in D_{xz}$ – проекц. Σ на Oxz

Основное св-во Σ: с любой прямой $\parallel$ оси Oy пов-ть $\cap$ в небольше чем 1-ой т.

Тогда: $\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\, d\sigma = \iint f(x, y(x,z), z) \sqrt{1+(y'_x)^2+(y'_z)^2}\, dx\, dz$

в) Σ: $x = x(y,z)$

D_{yz} – проекц. Σ на Oyz

Σ перес. с прям. $\parallel Ox$ в небольше чем в 1 т.

тогда $\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\, d\sigma = \iint\limits_{D_{yz}} f(x(y,z), y, z) \sqrt{1+(x'_y)^2+(x'_z)^2}\, dy\, dz$

$\iint\limits_{\Sigma:\ z=z(x,y)} f(x,y,z)\, d\sigma = \iint\limits_{E_{xy}} f(x,y,z(x,y)) \sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\, dx\, dy$

E_{xy} – проекция Σ на Oxy

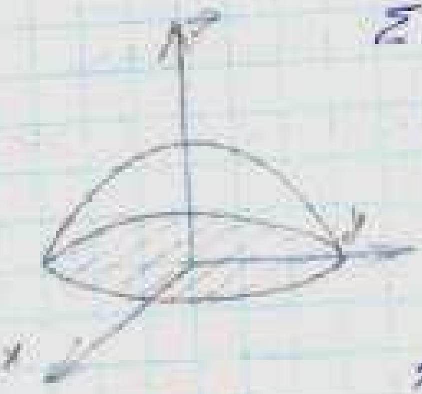
Примеры:

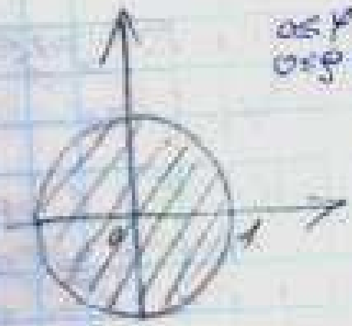
а) Вычислить $\iint \sqrt{1+4x^2+4y^2}\, d\sigma =$

$\Sigma: z = 1 - x^2 - y^2$

$z'_x = -2x$

$z'_y = -2y$





$0 \le \varphi \le 2\pi$
$0 \le \rho \le 1$

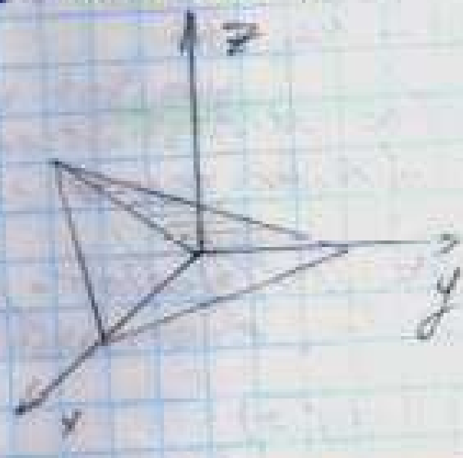
$x^2+y^2=1$

$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho\, d\rho \sqrt{1+4\rho^2}\sqrt{1+4\rho^2} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho(1+4\rho^2)\, d\rho =$

$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (\rho + 4\rho^3)\, d\rho = \int_0^{2\pi} d\varphi \left(\frac{\rho^2}{2} + \rho^4\right)\Big|_0^1 = \frac{3}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{3}{2} 2\pi = 3\pi$

б) Вычислить коорд. центра тяжести [illegible]

$\Sigma: \begin{cases} z = x \\ x + y = 1 \\ y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$

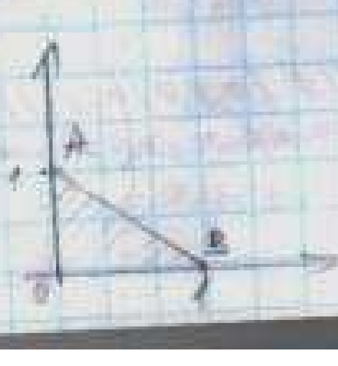


$x_c = \frac{\iint_\Sigma x\, d\sigma}{\iint_\Sigma d\sigma}$; $y_c = \frac{\iint_\Sigma y\, d\sigma}{\iint_\Sigma d\sigma}$

$z_c = \frac{\iint_\Sigma z\, d\sigma}{\iint_\Sigma d\sigma}$ $\quad z = x$; $z'_x = 1$; $z'_y = 0 \Rightarrow \sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}$

$= \sqrt{2}$

Σ_{xy}



$$\iint_{\Sigma} d\sigma = \iint_{\Sigma_{xy}} \sqrt{2}\, dx\,dy = \sqrt{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\iint_{\Sigma} x\, d\sigma = \int_0^1 x\,dx \int_0^{1-x} dy = \int_0^1 x\,dx(1-x) = \sqrt{2}\int_0^1 (x-x^2)\,dx =$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \sqrt{2}/6$$

$$\iint_{\Sigma} y\, d\sigma = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} y\,dy = \int_0^1 dx\, \frac{y^2}{2}\Big|_0^{1-x} = \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^1 (1-x^2)\,dx =$$

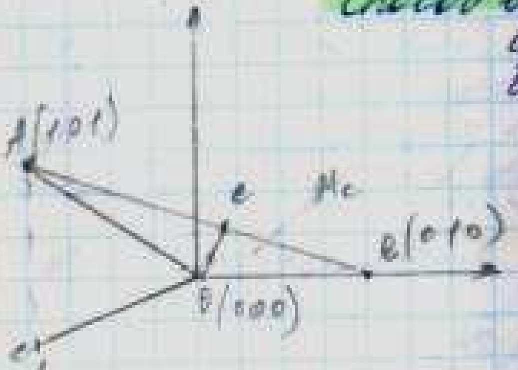
$$= \sqrt{2}/2 \int_0^1 (x-1)^2\, d(x-1) = \frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{(x-1)^3}{3}\Big|_0^1 = 0 - \frac{1}{6}(-1) = \frac{\sqrt{2}}{6}$$

$$\iint_{\Sigma} z\, d\sigma = \iint_{\Sigma} x\, d\sigma = \ldots = \frac{\sqrt{2}}{6}$$

$$x_c = \frac{\sqrt{2}/6}{\sqrt{2}/2} = \frac{1}{3}\ ;\ y_c = \frac{1}{3}\ ,\ z_c = \frac{1}{3}$$

$$M_c\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

Способ вычисления центра тяжести без интегралов



$\vec{OA} = \{1, 0, 1\}$

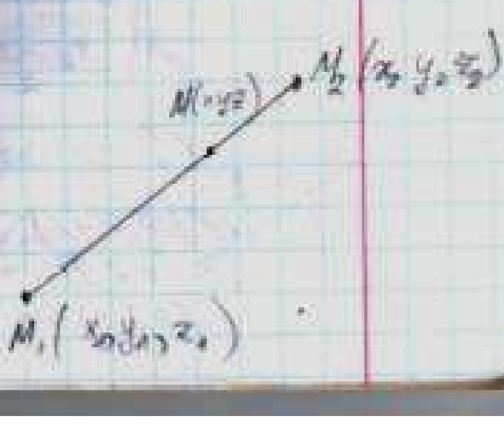
$\vec{OB} = \{0, 1, 0\}$

C - сер. отр. $C(1/2, 1/2, 1/2)$

$x_2\ y_2\ z_2$

$$\frac{M_1 M}{M M_2} = \lambda \qquad \lambda = 2$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda} \\[2mm] y = \dfrac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda} \\[2mm] z = \dfrac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda} \end{cases}$$



$$x_c = \frac{0+2\cdot 1/2}{1+2} = 1/3 \qquad y_c = \frac{0+2\cdot\frac{1}{2}}{1+2} = \frac{1}{3}$$

$$z_c = \frac{0+2\cdot 1/2}{1+2} = 1/3$$

б) Вычислить массу треугольника ΔABC

$A(0\ 0\ -1)\ B(0\ 2\ 1)\ C(2\ 2\ 0)$

$\rho = x$ - плотность

$$M_{\Delta ABC} = \iint_S \rho\, d\sigma$$

Ур-ие плоскости, проход. через 3-и т. $M_1(x_1 \dots$

$M_2(x_2\ y_2\ z_2)$; $M_3(x_3\ y_3\ z_3)$

$$\begin{vmatrix} x-x_1; & y-y_1; & z-z_1 \\ x_2-x_1; & y_2-y_1; & z_2-z_1 \\ x_3-x_1; & y_3-y_1; & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z+1 \\ 0-0 & 2-0 & 2+1 \\ 2-0 & 2-0 & 0+1 \end{vmatrix} = 0$$

$x(2-6) - y(0-6) + (z-1)(0-4) = 0$

$-4x + 6y - 4z - 4 = 0$

$-2x + 3y - 2z - 2 = 0$

$z = \frac{3y-2x-2}{2}$; $z = -x + \frac{3}{2}y - 1$

$z'_x = -1 \quad z'_y = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{17}}{2}$

$A(0\ 0\ -1) \Rightarrow A'(0\ 0)$

$B(0\ 2\ 1) \Rightarrow B'(0\ 2)$

$C(2\ 2\ 0) \Rightarrow C'(2;2)$

$0 \le y \le 2$

$x \le y \le 2$

$$M=\iint\limits_{OA'B'C'} x\,\frac{\sqrt{17}}{2}\,dx\,dy=\frac{\sqrt{17}}{2}\int_0^2 x\,dx\int_x^2 dy=\frac{\sqrt{17}}{2}\int_0^2 x\,dx\,(2-x)=$$

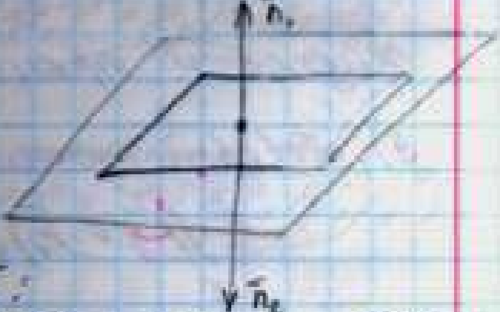
$$=\frac{\sqrt{17}}{2}\int_0^2 (2x-x^2)\,dx=\frac{\sqrt{17}}{2}\left(x^2-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^2=\frac{2\sqrt{17}}{3}$$

Поверхностный интеграл II рода

1. Определение

а) Дано: ориентиров-ая пов-ть Σ. Ориентация пов-ти может задаваться выбором 1 из 2х сторон пов-ти

Также ориентация пов-ти может задаваться выбором вектора нормали пов-ти

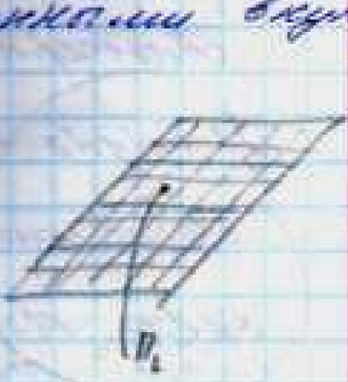


Вектор ф-ия:

$\bar v=\{P(x,y,z),\ Q(x,y,z),\ R(x,y,z)\}$ на Σ – вектор скорости

б) Разбиение пов-ти на Σ:
набор площадок Π_i с выбранными внутренними точками M_i;
d_n – диаметр разбиения

в) Интегральная сумма



$I_n=\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\bar v(M_i)\bar n_i\right)S_{\Pi_i}$, где

S_{Π_i} – площадь площадки Π_i;
$\bar n_i$ – ед. вектор выбранной нормали $(\bar v(M_i)\cdot\bar n_i)$ – скалярное пр-ние векторов $\bar v(M_i)$ и $\bar n_i(M_i)$

$M_2(x_2, y_2, \cancel{z_2})$; $M_3(x_3, y_3, z_3)$