Если бы мы вычисляли интеграл, то кривой следующей:

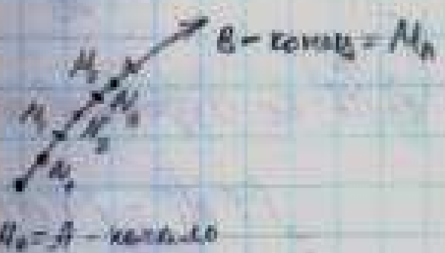
$$\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t \\ z = 4 \end{cases} \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

Криволинейный интеграл II рода

1. Определение

а) Дано: ориентиров. кривая γ

на γ задается вектор-функция $F(P(x,y), Q(x,y))$



б) Разбиение кривой:
набор уч-ов $M_{i-1}M_i$
и внутренних точек $N_1, N_2, \dots$
Диаметр разбиения – max из длин
всех уч-ов разбиения.
d_n – диаметр разбиения

в) Интегральная сумма

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} F(N_i)\cdot \overline{M_{i-1}M_i}$$

г) Пусть: предел интегральной суммы.

Каждое слагаемое в интегральной сумме [illegible] работе данной силы по перемещению тела единичной массы вдоль вектора $M_{i-1}M_i$

д) $\int\limits_{\gamma} \bar{F}\cdot d\bar{l} = \lim\limits_{n\to\infty} I_n$

Альтернативное обозначение:

$\int\limits_{\gamma} P\,dx + Q\,dy$

2. Св-ва криволинейного интеграла II рода

а) $\int\limits_{AB} \bar{F}\,d\bar{l} = -\int\limits_{BA} \bar{F}\cdot d\bar{l}$

б) $\int\limits_{AB} c\bar{F}\,d\bar{l} = c\int\limits_{AB} \bar{F}\,d\bar{l}$

в) $\int\limits_{AB} (\bar{F}_1+\bar{F}_2)\,d\bar{l} = \int\limits_{AB} \bar{F}_1\,d\bar{l} + \int\limits_{AB} \bar{F}_2\,d\bar{l}$

г) (св-во аддитивности) $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$

$\int\limits_{\gamma} \bar{F}\,d\bar{l} = \int\limits_{\gamma_1} \bar{F}\,d\bar{l} + \int\limits_{\gamma_2} \bar{F}\,d\bar{l}$

3. Способы вычисления криволинейного интеграла II рода

а) основной: $\gamma \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ $\quad A \to t_A,\ B \to t_B$

$\int\limits_{\gamma} \bar{F}\,d\bar{l} = \int\limits_{t_A}^{t_B} [P(x(t), y(t))x' + Q(x(t), y(t))y']\,dt$

Комментарий: 1) При вычислен. криволин. интеграла II рода нижний предел t_A может быть больше верхнего предела t_B.

2) Подынтегральное выраж. в правой части ф-лы получается из $P(x,y)dx + Q(x,y)$ ⊜

x и y на $x(t)$, $y(t)$

$$\circeq\ P(x(t),y(t))\,d\overset{x'dt}{x(t)} + Q(x(t),y(t))\,d\overset{y'dt}{y(t)} = \left[P(x(t),y(t))x' + Q(x(t),y(t))y'\right]dt$$

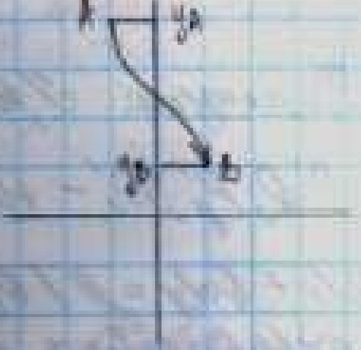
б) Пусть γ: $y=y(x)$

$$\gamma:\ \begin{cases} x=x \\ y=y(x) \end{cases}$$

Если бы мог вычислить интеграл, то кривой следующая!

$$\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t \\ z = 4 \end{cases} \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

$$\int_\gamma \bar F\, d\bar l = \int_{x_A}^{x_B} [P(x, y(x)) + Q(x, y(x))\, y']\, dx$$



б) $\gamma:\ x = x(y)$

$$\int_\gamma \bar F \cdot d\bar l = \int_{y_A}^{y_B} [P(x(y), y)\, x' + Q(x(y), y)]\, dy$$

Пример 1: $\int 3x^2 y\, dx + (x^3+1)\, dy =$

$\gamma:\ y = x^2$ от $A(0;0)$ до $B(1;1)$

$x_A = 0 \quad x_B = 1$

$$= \int_0^1 3x^4 dx + (x^3+1)\, d(x^2) = \int_0^1 (3x^4 + 2x(x^3+1))\, dx =$$

$$= \int_0^1 (5x^4 + 2x)\, dx = (x^5 + x^2)\Big|_0^1 = 1 + 1 = 2$$

Пример 2: $\oint_{ABCD} (2x - y)\, dx + x\, dy =$

$$= \int_{AB} + \int_{BC} + \int_{CD} + \int_{DA} =$$

AB	BC	CD	DA
$x = 0$	$y = 1$	$x = 1$	$y = 0$
$y_A = 0$	$x_B = 0$	$y_C = 1$	$x_D = 1$
$y_B = 1$	$x_C = 1$	$y_D = 0$	$x_A = 0$

$= \int_0^2 (2\cdot 0 - y)\,d0 + 0\,dy + \int_0^1 (2x-1)\,dx + x\,d1 +$

$+ \int_1^0 (2\cdot 1 - y)\,d1 + 1\,dy + \int_1^0 (2x - 0)\,dx + x\,d0 =$

$= 0 + \int_0^1 (2x-1)\,dx + \int_1^0 dy + \int_1^0 2x\,dx = (x^2 - x)\Big|_0^1 + y\Big|_1^0 +$

$+ x^2\Big|_1^0 = 1-1-0+0-1+0-1 = -2$

4. Формула Грина (без док-ва)

P, Q, P'_y, Q'_x — непрерывные $\Rightarrow$ D_Γ

$\oint_\Gamma P\,dx + Q\,dy = \iint_{D_\Gamma} (Q'_x - P'_y)\,dx\,dy$

Γ — направление Γ против часовой стрелки

Следствие: $S_{D_\Gamma} = \frac{1}{2} \oint_\Gamma x\,dy - y\,dx$

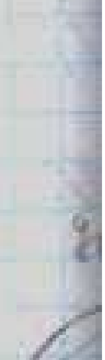
Док-во: Положим в ф-ле Грина $P = -y$, $Q = x$

$\oint -y\,dx + x\,dy = \iint_{D_\Gamma} \left((x)'_x - (-y)'_y\right) dx\,dy =$

$= 2\iint_{D_\Gamma} dx\,dy = 2\cdot S_{D_\Gamma} \Rightarrow$ ч.т.д.

Пример 1: Вычислить S эллипса

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ Параметрич. ур-ие эллипса выглядит так: $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$



$t_A = 0$; $t_B = 2\pi$ t = полярный угол

$S_{\text{эл}} = \frac{1}{2}\oint x\,dy - y\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} a\cos t\, d\, b\sin t - b\sin t\, d\, a\cos t =$

$\gamma: \begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$

$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} ab\cos t\cos t\,dt - b\sin t\, a(-\sin t)\,dt =$

$= \frac{ab}{2}\int_0^{2\pi}(\cos^2 t + \sin^2 t)\,dt = \frac{ab}{2}2\pi = \pi ab$

Пример 2: Вернёмся к примеру из предыдущего § с квадратом

$$\int_{ABCA}(2x-y)dx + x\,dy = \iint_D \left((x)'_x - (2x-y)'_y\right)dx\,dy =$$

$$= 2\iint_D dx\,dy = 2 \Rightarrow \int_{ABCA} = 2$$

5. Условия независимости криволинейного интеграла II рода от пути интегрирования

Теорема: Пусть P, Q, P'_y, Q'_x — непрерыв. ф

1) $\int_\gamma P\,dx + Q\,dy$ — не зависит от пути интегрирования

2) $\oint_\gamma P\,dx + Q\,dy = 0$ — для любого замкнутого контура

3) $P'_y = Q'_x$

4) Существует $u = u(x,y)$ такая что

$$du = P\,dx + Q\,dy$$

тогда $(1)\Leftrightarrow(2)\Leftrightarrow(3)\Leftrightarrow(4)$

Док-во проведём по кольцу
$(1)\Rightarrow(2)\Rightarrow(3)\Rightarrow(4)\Rightarrow(1)$

Док-во: $(1\Rightarrow2)$

$$\oint_\gamma P\,dx + Q\,dy = \int_{AmB} + \int_{BnA} = \int_{AmB} - \int_{AnB}$$

(2) ⇒ (3) $\oint_\gamma Pdx + Qdy = 0$ для любого γ

Из ф-лы Грина вытекает

D_γ

$$\oint_\gamma Pdx + Qdy = \iint_{D_\gamma} (Q'_x - P'_y)\,dx\,dy$$

$-x_0 y_0$

Если в т. $M_0(x_0, y_0)$ $Q'_x - P'_y > 0$

⇒ в силу непрерывности этой разности существует D_γ такая что $Q'_x - P'_y > 0$ для $(x,y) \in D_\gamma$ ⇒

$$\iint_{D_\gamma} (Q'_x - P'_y)\,dx\,dy > 0$$

Противоречие ⇒ $\boxed{Q'_x = P'_y}$

(3) ⇒ (4) Пусть $P'_y = Q'_x$, докажем что существует ф-ция-потенциал $u = u(x,y)$

$$du = Pdx + Qdy$$

Док-во: $u(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(t, y_0)\,dt + \int_{y_0}^{y} Q(x,t)\,dt$

где $M_0(x_0, y_0)$ - точка из области определения ф-ций P и Q

Докажем, что $u'_x = P$ и $u'_y = Q$

$$u'_x = P(x, y_0) + \int_{y_0}^{y} Q'_x(x,t)\,dt = P(x y_0) + \int_{y_0}^{y} P'_t(x t)\,dt =$$

$$= P(x, y_0) + P(x,t)\Big|_{y_0}^{y} = P(x y_0) + P(x y) - P(x y_0) = P(x, y)$$

$U'_y = Q(x,y)$ — ч.т.д.

(1) ⇒ (2) Пусть $U = U(x,y)$ такова, что $dU = Pdx + Qdy$, покажем что $\int\limits_{AB} Pdx + Qdy$ не зависит от пути инте-
рирования.

Док-во: $\boxed{\int\limits_{AB} Pdx + Qdy = U(B) - U(A)}$

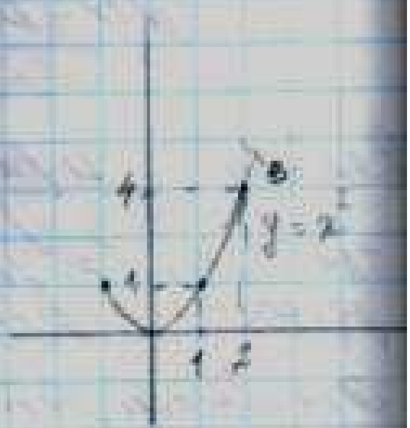
$\int\limits_{AB} Pdx + Qdy = \int U'_x dx + U'_y dy = \int\limits_{t_A}^{t_B} (U'_x x' + U'_y$

$U = U(x;y) = U(x(t), y(t)) \quad U'_t = U'_x x' + U'_y y'$

$= \int\limits_{t_A}^{t_B} U'_t dt = U\Big|_{t_A}^{t_B} = U(t_B) - U(t_A) = U(B) - U(A)$

2) Задача. $\int (x+3y)dx + (y+3x)dy =$

$AB: y = x^2$ от $A(1;1)$
до $B(2;4)$



Решение: Покажем что $P'_y = Q'_x$

$P = x+3y, \ Q = y+3x$

$P'_y = 3 \quad Q'_x = 3$

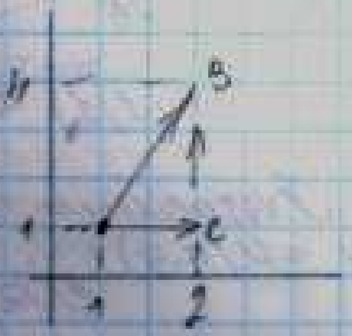
$= \int\limits_1^2 (x+3x^2)dx + (x^2+3x)dx^2 = \int\limits_1^2 (x+3x^2+2x(x^2+3x))$

$= \int_1^2 (2x^3 + 9x^2 + x)dx = \left(\frac{2x^4}{4} + 3x^3 + \frac{x^2}{2}\right)\Big|_1^2 =$

$= 8 + 24 + 2 - 1/2 - 3 - 1/2 = 30$

Задача $\int\limits_{AB} (x+3y)dx + (y+3x)dy =$

AB – отрезок прямой



$M_0(x_0, y_0)$ $\bar{a} = \{\alpha, \beta\}$

$\begin{cases} x = x_0 - \alpha t \\ y = y_0 - \beta t \end{cases}$

$M_0 = A(1;1)$ $\bar{a} = \overline{AB} = \{1;3\}$

$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 3t \end{cases}$

Если $M_0 = A$, а $\bar{a} = \overline{AB}$, то $t_A = 0$; $t_B = 1$

$= \int_0^1 (1 + t + 3(1+3t))\, d(\overset{dt}{t+1}) + (1 + 3t + 3(1+t)) \cdot$

$\cdot\, d(\underset{3dt}{1 + 3t}) = \int_0^1 (4 + 10t + 12 + 18t)dt =$

$= \int_0^1 (28t + 16)dt = (14t^2 + 16t)\Big|_0^1 = 14 + 16 = 30$

Задача: $\int\limits_{ACB} (x+3y)dx + (y+3x)dy = \int\limits_{AC} + \int\limits_{CB} =$

ACB – ломаная

AC	CB
$y = 1$	$x = 2$
$x_A = 1$	$y_C = 1$
$x_C = 2$	$y_B = 4$

$= \int_1^2 (x+3)dx + (1+3x)\underset{0}{d1} + \int_1^4 (2+3y)\underset{0}{d2} + (y+6)dy =$

$$= \int_1^2 (x+3)\,dx + \int_1^4 (y+6)\,dy = \left(\frac{x^2}{2}+3x\right)\Big|_1^2 + \left(\frac{y^2}{2}+6y\right)\Big|_1^4 =$$

$$= 2+6-\tfrac{1}{2}+3+8+24-\tfrac{1}{2}-6 = 30$$

Задача: $\int\limits_{AB} (x+3y)dx + (y+3x)dy =$

$A(1;1)\quad B(2;4)$

Вычислим при помощи ф-ции потенц. $u = u(x,y)$

$$u(x;y) = \int_{x_0}^{x} P(t,y_0)\,dt + \int_{y_0}^{y} Q(x,t)\,dt =$$

P, Q – определены и непрерывны везде $\Rightarrow$ $x_0=0$, $y_0=0$

$$= \int_0^x (t+3\cdot 0)\,dt + \int_0^y (t+3x)\,dt = \frac{t^2}{2}\Big|_0^x + \left(\frac{t^2}{2}+3xt\right)\Big|_0^y =$$

$$= \frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+3xy$$

$$= u(B) - u(A) = \frac{2^2}{2}+\frac{4^2}{2}+3\cdot 2\cdot 4 - \left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}+3\cdot 1\cdot 1\right) =$$

$$= 2+8+24-4 = 30$$

$$P'_y = Q'_x$$

Задача: $\int\limits_{(1,1)}^{(2,2)} \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)dx + \left(\frac{2}{y}-\frac{x}{y^2}\right)dy =$

В этой задачи нет пути γ, есть начальн. т. A и конечн. т. B. Такая формулировка подсказывает, что

Этот интеграл не зависит от пути интегрирования

$$P'_y = \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)'_y = -\frac{1}{y^2}$$

$$Q'_x = \left(\frac{2}{y}-\frac{x}{y^2}\right)'_x = -\frac{1}{y^2}$$

Используем метод потенциала:

$(x_0, y_0) = (1, 1)$

$$U(x,y) = \int_1^x \left(\frac{1}{t}+\frac{1}{y}\right)dt + \int_1^y \left(\frac{2}{t}-\frac{x}{t^2}\right)dt =$$

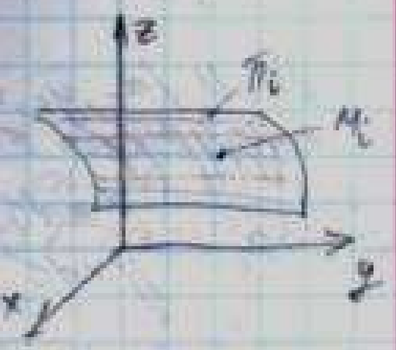
$$= \left(\ln|t| + t\right)\Big|_1^x + \left(2\ln|t| + \frac{x}{t}\right)\Big|_1^y = \ln|x| + x - (\ln 1 + 1) +$$

$$+ 2\ln|y| + \frac{x}{y} - (2\ln 1 + x/1) = \ln|x| - 1 + 2\ln|y| + x/y$$

$$③ \quad U(B) - U(A) = \ln 2 - 1 + 2\ln 2 + 2/2 - (\ln 1 - 1 + 2\ln 1 + 1/1) = 3\ln 2$$

Поверхностный интеграл 1 рода

1 Определение



а) Дано: поверхность Σ

$f(x,y,z)$ определена на Σ

б) Разбиение Σ: набор площадок Σ_i с выбранными в каждой площадке Σ_i внутр. точек M_i;

d_n - диаметр разбиения - это max из диаметров всех площадок разбиения.

в) Интегральная сумма

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\cdot S_{\Sigma_i}, \text{ где } S_{\Sigma_i} \text{ - площадь } \Sigma_i$$