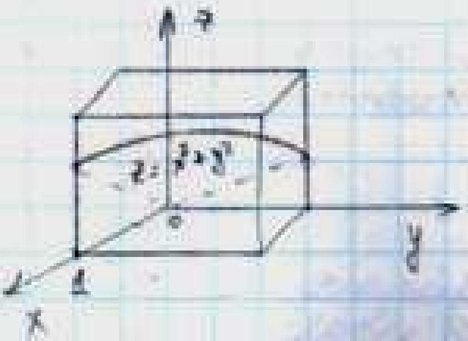


Поместим наше тело в прямоугольный параллелепипед с высотой равной 2.
Получим n - псевдослучайных чисел в вообр. прямоуг. параллелепипеде: $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$

$x_1 = 0,15$ $\quad$ $x_2 = 0,502$
$y_1 = 0,885$ $\quad$ $y_2 = 0,451$
$z_1 = 1,276$ $\quad$ $z_2 = 1,414$
$x_1^2 + y_1^2 = 0,800 < z_1$
$x_2^2 + y_2^2 = 0,4558 < z_2$

Криволинейный интеграл I рода

1. Определение

а) Дано:

$f(x, y)$ - определённая ℓ

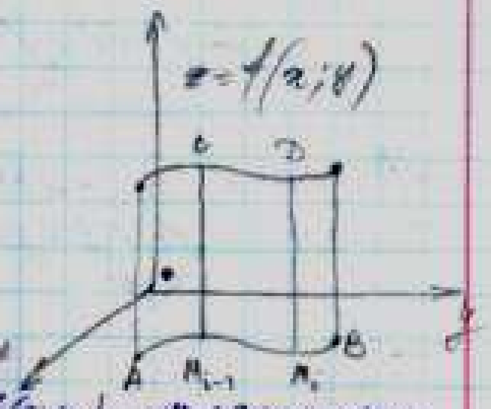
б) Разбиение кривой: уч-ки кривой M_0M_1, M_1M_2... и внутренние точки N_1, N_2, N_3...

в) Диаметр разбиения: наибольший из длин участков разбиений.

г) Интегральная сумма: $I_n = \sum f(N_i) \ell_{M_{i-1}M_i}$, где $\ell_{M_{i-1}M_i}$ - длина уч-ка $M_{i-1}M_i$

д) Геометрич. смысл интегральных сумм I_n.

Каждое слагаемое интегральной суммы почти равно площади уч-ка „флага", соот-его $M_{i-1}M_i$. Сама же интегральная сумма почти равна площади „флага".



е) Физический смысл.

Пусть $f(x;y)$ - плотность „проволоки" γ, тогда $I_n \approx$ массе проволоки.

ж) Криволинейный интеграл I рода

$$\int_\gamma f(x;y)\,dl = \lim_{d\to 0} I_n$$

2. Способы вычисления криволинейного интеграла I рода

а) Основной способ

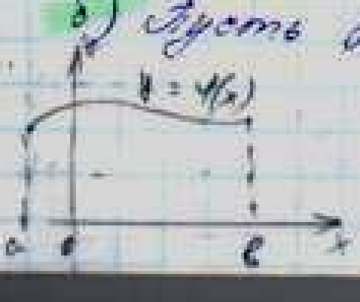
$$\gamma: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \qquad t_1 \le t \le t_2$$

$$\int_\gamma f(x;y)\,dl = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t), y(t))\sqrt{(x')^2+(y')^2}\,dt$$

Замечание: Эта ф-ла будет действовать и для криволинейного интеграла по пространственной кривой γ

б) Пусть γ - часть графика $y = \varphi(x)$

$x_1 \le x \le x_2$



В этом случае кривую γ можно параметризовать так: $\begin{cases} x = x \\ y = \varphi(x) \end{cases}$ $\quad x_1 \le x \le x_2$, $t = x$

тогда основная ф-ла превратится в след
ф-лу:

$$\int_\gamma f(x,y)\,dl = \int_{x_1}^{x_2} f(x, \varphi(x))\sqrt{1+(\varphi')^2}\,dx$$

в) Пусть γ - часть линии, заданной ур-ием
$x = \psi(y)$, $y_1 \le y \le y_2$, $t = y$

$$\begin{cases} x = \psi(y) \\ y = y \end{cases}$$

$$y_1 \le y \le y_2$$

$$\int_\gamma f(x,y)\,dl = \int_{y_1}^{y_2} f(\psi(y), y)\sqrt{1+\dots}$$

3. Св-ва криволинейного интеграла I рода

а) $\int_\gamma c f\,dl = c\int_\gamma f\,dl$

б) $\int_\gamma (f \pm g)\,dl = \int_\gamma f\,dl \pm \int_\gamma g\,dl$

в) (св-во аддитивности): $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$

$$\int_\gamma f\,dl = \int_{\gamma_1} f\,dl + \int_{\gamma_2} f\,dl$$

г) криволин. интегр. I рода не зависи
направления кривой γ

4 Приложения криволинейного интегра
I рода

а) $\int_\gamma f\,dl = L_\gamma$ - длина кривой б) $\int\limits_{\Gamma} \rho(x,y)\,dl = M_{\Gamma}$ - масса кривой

в) $\int\limits_{\Gamma} f(x,y)\,dl = S$ „полога" $f(x,y) \geq 0$

г) $M_c(x_c, y_c)$ - центр тяж. проволки Γ с плотностью ρ

$$x_c = \frac{\int_{\Gamma} x\rho\,dl}{\int_{\Gamma} \rho\,dl}\ ; \quad y_c = \frac{\int_{\Gamma} y\rho\,dl}{\int_{\Gamma} \rho\,dl}$$

Если $\rho = const$ (проволока однородна), то ρ сокращается и пропадает в ф-ле.

д) Момент инерции:

$$I_x = \int_{\Gamma} y^2 \rho\,dl\ ; \quad I_y = \int_{\Gamma} x^2 \rho\,dl\ ; \quad I_0 = \int_{\Gamma} (x^2+y^2)\rho\,dl$$

5. Примеры

Пример 1. $\int (x-2y)\,dl$ AB - отр. прям. $A(0;2)$ $B(-1;3)$. Параметр. ур-ие прямой на пл-ти проходит через т. $M_0(x_0;y_0)$ с направл. вект. $\vec{a} = \{\alpha;\beta\}$

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \end{cases} \qquad M_0 = A(0;2) \quad \vec{a} = \vec{AB} = \{\underset{\alpha}{-1};\underset{\beta}{1}\}$$

$$\begin{cases} x = 0 - t \\ y = 2 + t \end{cases} \qquad A(0;2)\ \ t_A - ? \quad 0 = 0 - t \Rightarrow t_A = 0$$

$B(-1;1)$ $t_B - ?$ $-1 = 0 - t \Rightarrow t_B = 1$

$0 \leq t \leq 1$

$$\int\limits_{AB} (x-2y)\,dl = \int_0^1 (-t - 2(2+t))\sqrt{[(-t)']^2 + [(2+t)']^2}\,dt =$$

$$= \int_0^1 (-3t-4)\sqrt{2}\,dt = -\sqrt{2}\int_0^1 (3t+4)\,dt = -\sqrt{2}\left(\frac{3t^2}{2} + 4t\right)\Big|_0^1 = -\sqrt{2}\left(\frac{3}{2}+4\right)$$

$$= -\sqrt{2}\cdot\frac{11}{2}$$

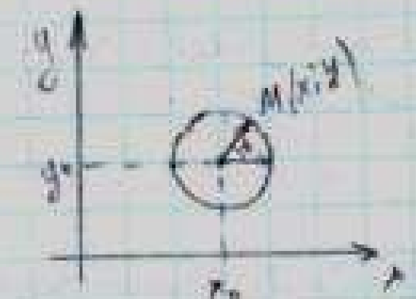
Пример 2: $\int\limits_\gamma y^2 dl$ =

γ: часть окр. $x^2+y^2=4$ между т. $A(0;2)$ и B

Параметр. ур-ия окр. с центром в т. $M_0(x_0;y_0)$ и радиуса R имеют вид

$$\begin{cases} x = x_0 + R\cos t \\ y = y_0 + R\sin t \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi$$

где t - выполняет роль полярного угла φ



В нашем случае

$$\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases}$$

$$\frac{\pi}{2} \le t \le \pi$$

$$= \int (2\sin t)^2 \sqrt{[(2\cos t)']^2 + [(2\sin t)']^2}\, dt =$$

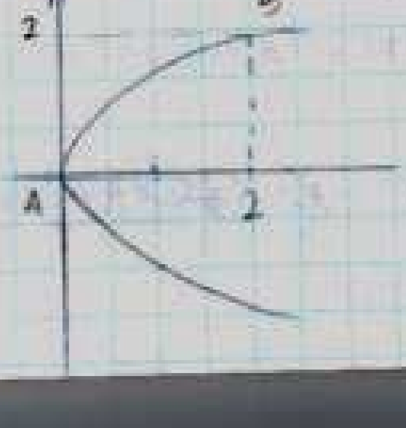
Замечание: Необходимо следить за тем, чтобы нижний предел интегрирования был < верхнего предела интегрирования.

$4\sin^2 t + 4\cos^2 t = 4$

$$= 4\cdot 2\int\limits_{\pi/2}^{\pi} \sin^2 t\, dt = 8\cdot \tfrac{1}{2}\int\limits_{\pi/2}^{\pi} (1+\cos 2t)\, dt = 4\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right)$$

$$= 4(\pi + 0) - 4\left(\tfrac{\pi}{2} + 0\right) = 4\pi - 2\pi = 2\pi$$

Пример 3: $\int\limits_\gamma y\, dl$ =



γ: $y^2 = 2x$ между $A(0;0)$ и $B(2;2)$

$$= \int\limits_0^2 y\sqrt{1 + \left(\left(\frac{y^2}{2}\right)'\right)^2}\, dy =$$

$$= \int_0^2 y\sqrt{1+y^2}\,dy = \int_0^2 \sqrt{1+y^2}\, d\frac{y^2}{2} = \frac{1}{2}\int_0^2 \sqrt{1+y^2}\, d(1+y^2) =$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{(1+y^2)^{3/2}}{3/2}\Big|_0^2 = \frac{1}{3}\sqrt{(1+y^2)^3}\,\Big|_0^2 = 1/3\,(5\sqrt{5}-1)$$

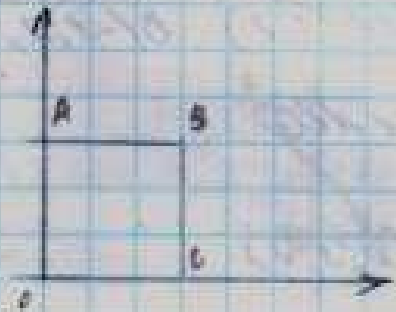
Пример 4: Вычислить M_x проволоки, где ℓ - замкнутый квадрат.

$\rho = x^2+y^2$

$M_x - ?$

$$M_x = \int_\ell (x^2+y^2)\,dl =$$

$$= \int_{OA}(x^2+y^2)\,dl + \int_{AB} -''- + \int_{BC} -''- + \int_{OC} -''-$$



1) OA $\quad x=0 \quad 0\le y\le 1 \Rightarrow$ используем 3-ю ф-лу

$$\int_{OA}(x^2+y^2)\,dl = \int_0^1 y^2\sqrt{1+((0)')^2}\,dy = \int_0^1 y^2\,dy = \frac{y^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

2) AB: $y=1;\ 0\le x\le 1 \Rightarrow$ используем 2-ю ф-лу

$$\int_{AB}(x^2+y^2)\,dl = \int_0^1 (x^2+1)\sqrt{1+(1')^2}\,dx = \int_0^1 (x^2+1)\,dx =$$

$$= \left(\frac{x^3}{3}+x\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{3}+1 = \frac{4}{3}$$

3) BC: $x=1 \quad 0\le y\le 1$ - исп 3-ю ф-лу

$$\int_{BC}(x^2+y^2)\,dl = \int_0^1 (1+y^2)\sqrt{1+(1')^2}\,dy = \int_0^1 (1+y^2)\,dy =$$

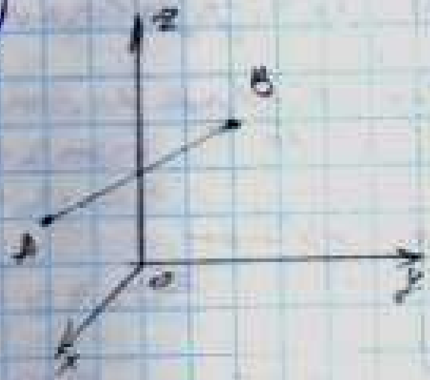
$$= \left(y+\frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^1 = 1+1/3 = 4/3$$

4) OC: $y=0$ $\quad 0 \le x \le 1 \Rightarrow$ исп. 2-ую ф-лу

$$\int_{OC}(x^2+y^2)\,dl = \int_0^1 x^2\sqrt{1+(0')^2}\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$M_L = \frac{1}{3}+\frac{4}{3}+\frac{4}{3}+\frac{1}{3} = \frac{10}{3}$$

Пример 5. Найти M_{AB} с плотностью $\rho = z$ $\quad A(0;1;2)$ $\quad B(-1;2;4)$



$$M_{AB} = \int_{AB} z\,dl \ominus$$

$$M_0 = A(0;1;2)$$

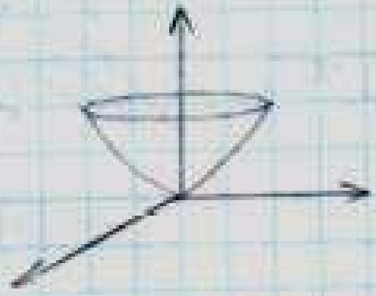
$$\bar{s} = \overline{AB} = \{-1;1;2\}$$

$$\begin{cases} x = 0 - t \\ y = 1 + t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$$

$A(0;1;2)$
$t_A = 0$
$B(-1;2;4)$
$t_B = 1$

$$\ominus \int_0^1 (2+2t)\sqrt{((-t)')^2+((1+t)')^2+((2+2t)')^2}\,dt =$$
$$= 2\sqrt{6}\int_0^1(1+t)\,dt = 2\sqrt{6}\left(t+\frac{t^2}{2}\right)\Big|_0^1 = 2\sqrt{6}\cdot\frac{3}{2} = 3\sqrt{6}$$

Пример 6. Найти M_L, где $L: \begin{cases} z = x^2+y^2 \\ z = 4 \end{cases}$



$$\rho = 5$$

$$M_L = \int_L 5\,dl = 5 L_L =$$
$$= 5\cdot 2\pi\cdot 2 = 20\pi$$

Если бы мы вычисляли интеграл, то кривая следующая:

$$\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t \\ z = 4 \end{cases} \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

Криволинейный интеграл II рода

1. Определение

а) Дано: ориентиров. кривая γ

на γ задается вектор-функция $F(P(x,y), Q(x,y))$

б) Разбиение кривой: набор уч-ов $M_{i-1}M_i$ и внутренних точек $N_1, N_2 \dots$
Диаметр разбиения - max из длин всех уч-ов разбиения.
d_n - диаметр разбиения

в) Интегральная сумма

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} F(N_i) \cdot \overline{M_{i-1}M_i}$$

г) Сущ. предел интегральной суммы.