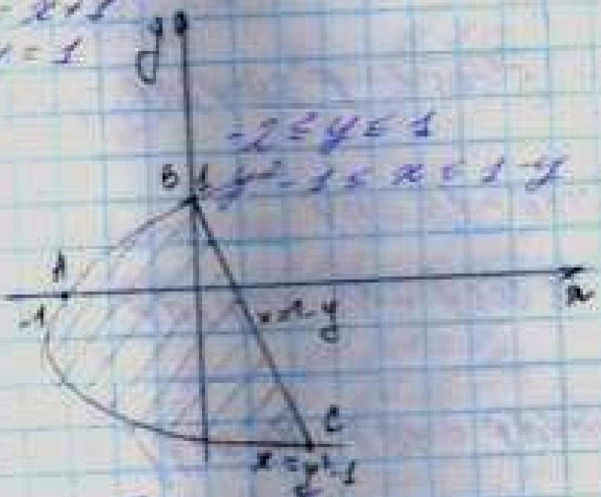
$= \frac{16}{3}\int_0^{2\pi}\left(\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\cos 4\varphi\right)d4\varphi = 8\int_0^{2\pi}(1-\cos 4\varphi)\,d4\varphi = 8\left(\varphi-\frac{\sin 4\varphi}{4}\right)\Big|_0^{2\pi} = 8\pi$

Приложения двойного интеграла

1. Вычисление площадей плоских фигур

$S_D = \iint_D 1\,dx\,dy$ (вытекает из св-ва двойного интеграла)

Пример: Вычислить площадь, ограниченную линиями $\begin{cases} y^2 = x+1 \\ x+y=1 \end{cases}$



C: $\begin{cases} y^2 = x+1 \\ x+y=1 \\ 1-x=y \end{cases}$

$y^2-1=1-y$

$y^2+y-2=0$

$y_{1,2}=-2,\ 1$

$x_{1,2}=3,\ 0$

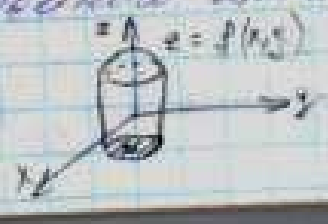
$S_{ABC} = \iint_{ABC} 1\,dx\,dy = \int_{-2}^{1}dy\int_{y^2-1}^{1-y}dx = \int_{-2}^{1}dy\,(1-y-y^2+1) = \left(2y-\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{3}\right)\Big|_{-2}^{1}$

$= 2-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\left(-4-2+\frac{8}{3}\right) = 4{,}5$

2. Вычисление объёма криволин. призмы

$V_{кр.пр} = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy$

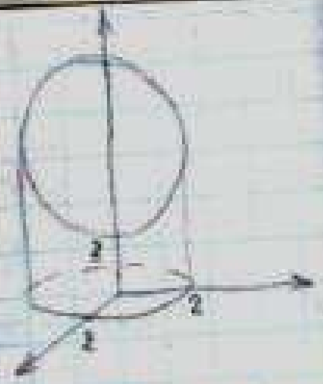
(вытекает из геом. смысла двойного интеграла)



Пример: Ω $x^2+y^2=4$

$z=0$

$z+x+y=4$



$\frac{x}{4}+\frac{y}{4}+\frac{z}{4}=1$

Ω лежит над кругом рад 2, в Oxy под графиком ф-ции

$z=4-x-y$

$\Rightarrow V=\iint\limits_{x^2+y^2 - \text{рад } 2}(4-x-y)\,dx\,dy=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^2(4-\rho\cos\varphi-\rho\sin\varphi)\rho\,d\rho$

а) $\int_0^2(4\rho-\rho^2\cos\varphi-\rho^2\sin\varphi)d\rho=\left(2\rho^2-\frac{\cos\varphi}{3}\rho^3-\frac{\sin\varphi}{3}\rho^3\right)$

$=8-\frac{8}{3}\cos\varphi-\frac{8}{3}\sin\varphi$

б) $\int_0^{2\pi}\left(8-\frac{8}{3}\cos\varphi-\frac{8}{3}\sin\varphi\right)d\varphi=\int_0^{2\pi}8\,d\varphi-\int_0^{2\pi}\frac{8}{3}\cos\varphi\,d\varphi$

$-\int_0^{2\pi}\frac{8}{3}\sin\varphi\,d\varphi=16\pi-\frac{8}{3}\sin\varphi\Big|_0^{2\pi}+\frac{8}{3}\cos\varphi\Big|_0^{2\pi}=16\pi$

3. Масса плоской пластины с плотнос

$\rho=\rho(x,y)$

$M_\Omega=\iint\limits_\Omega \rho(x,y)\,dx\,dy$ - следует из физич. с
ла двойного инт
ла

Пример 2. $\begin{cases}x=1\\ y=0\\ y^2=4x\ (y\ge 0)\end{cases}$ $\rho=7x^2+y$

$M_\Omega=\iint\limits_\Omega(7x^2+y)\,dx\,dy=\int_0^1dx\int_0^{2\sqrt{x}}(7x^2+y)\,dy$

а) $\int\limits_0^{2\sqrt{x}} (7x^2+y)\,dy = \left(7x^2y + \frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^{2\sqrt{x}} = 7x^2 \cdot 2\sqrt{x} + 2x$

б) $\int\limits_0^1 \left(14x^{5/2} + 2x\right)dx = \left(\frac{14x^{7/2}}{7/2} + x^2\right)\Big|_0^1 = 4+1=5$

4. Координаты центра тяжести плоской пластины

$M_c(x_c, y_c)$ – центр тяж. с плотностью $\rho = \rho(x,y)$

$$x_c = \frac{\iint\limits_D x\,\rho(x,y)\,dx\,dy}{\iint\limits_D \rho(x,y)\,dx\,dy}; \quad y_c = \frac{\iint\limits_D y\,\rho(x,y)\,dx\,dy}{\iint\limits_D \rho(x,y)\,dx\,dy}$$

Замеч. если пластина однородна $\rho = const$, то ф-лы упрощаются

$$x_c = \frac{\iint\limits_D x\,dx\,dy}{\iint\limits_D dx\,dy} \qquad y_c = \frac{\iint\limits_D y\,dx\,dy}{\iint\limits_D dx\,dy}$$

Пример. Вычислить центр тяж. для однор. пластины

$$D: \begin{cases} y^2 = x \\ x^2 = y \end{cases}$$

D симметр. относит. прямой $y=x$. Поэтому достаточно найти 1 коорд., т.к. $y_c = x_c$

$$\iint\limits_D dx\,dy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}} dy = \int\limits_0^1 \left(\sqrt{x} - x^2\right)dx = \left(\frac{x^{3/2}}{3/2} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 =$$

$= 2/3 - 1/3 = 1/3$

$$\iint_D x\,dx\,dy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} x\,dy = \int_0^1 x(\sqrt{x} - x^2)\,dx = \int_0^1 (x^{3/2} - \ldots$$

$$= \left(\frac{x^{5/2}}{5/2} - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^1 = 2/5 - 1/4 = \frac{3}{20}$$

$$x_c = \frac{\frac{3}{20}}{\frac{1}{3}} = \frac{9}{20} \qquad y_c = \frac{9}{20}$$

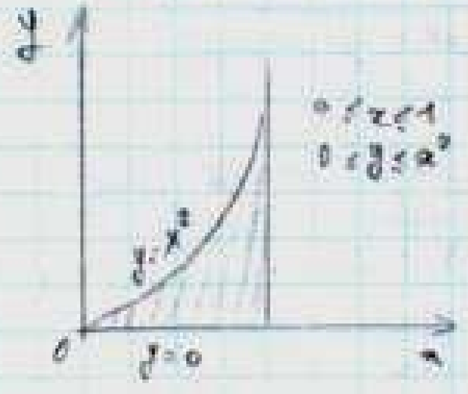
$$M_c\left(9/20\,;\,9/20\right)$$

5. Вычисление моментов инерции пло... пластины D с плотностью $\rho = \rho(x,y)$

$$I_x = \iint_D y^2 \rho\,dx\,dy \qquad I_y = \iint_D x^2 \rho\,dx\,dy$$

$$I_0 = \iint_D (x^2 + y^2)\rho\,dx\,dy$$

Пример: вычислить I_0 для $D \begin{cases} y = x^2 \\ y = 0 \\ x = 1 \\ \rho = 5 \end{cases}$

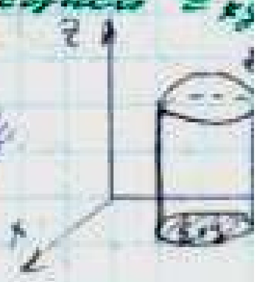


$$I_0 = \int_0^1 dx \int_0^{x^2} (x^2 + y^2)\,5\,dy =$$

$$= 5\int_0^1 dx\left(x^2 y + \frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^{x^2} = 5\int_0^1 (x^4 \ldots$$

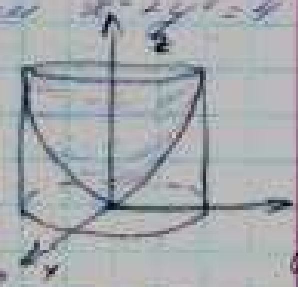
$$= 5\left(\frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{21}\right)\Big|_0^1 = 5\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{21}\right) \ldots$$

6. Вычисление площади пов-ти Σ, заданной ур-нием $z = \varphi(x,y)$, с проекцией Σ_{xy} на пл-ть Oxy



$$S_\Sigma = \iint_{\Sigma_{xy}} \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\,dx\,dy$$

Пример: вычислить площадь пов-ти $z = x^2+y^2$, отсекаемой цилиндром $x^2+y^2=4$



Σ_{xy} — круг рад. 2

$z = x^2+y^2$ — ур-ие пов-ти

$z'_x = 2x \qquad z'_y = 2y$

$$S_\Sigma = \iint_{\Sigma_{xy}} \sqrt{1+(2x)^2+(2y)^2}\,dxdy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \sqrt{1+4\rho^2}\,\rho\,d\rho =$$

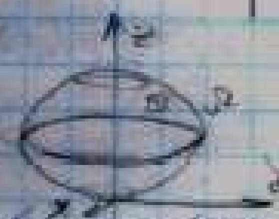
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\int_0^{2\pi} d\varphi \int \sqrt{1+4\rho^2}\,d(4\rho^2+1) = \frac{1}{8}\int_0^{2\pi} d\varphi \,\frac{(1+4\rho^2)^{3/2}}{3/2}\Big|_0^2 =$$

$0 \le \varphi \le 2\pi$
$0 \le \rho \le 2$

$$= \frac{1}{12}\int_0^{2\pi} d\varphi\,(17\sqrt{17}-1) = \frac{\pi}{6}(17\sqrt{17}-1)$$

Тройной интеграл

1. Определение, св-ва



а) Задано $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, $u = f(x,y,z)$

б) Разбиение Ω на n малых параллелепипедов T_i

$M_i \in T_i$

в) $I_n = \sum f(M_i)\,V_{T_i}$ — интегральная сумма

г) $\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dxdydz = \lim_{d_n \to 0} I_n$

1) Если $f(x,y,z) \equiv 1$, то $\iiint_\Omega dxdydz = V_\Omega$ (геом. смысл)

2) Если $f(x,y,z) = \rho(x,y,z)$ — плотность Ω, то

$\iiint_\Omega \rho\,dxdydz = M_\Omega$ (физ. смысл)

ж) С-ва тройного интеграла такие же, к[...]
и у двойного интеграла

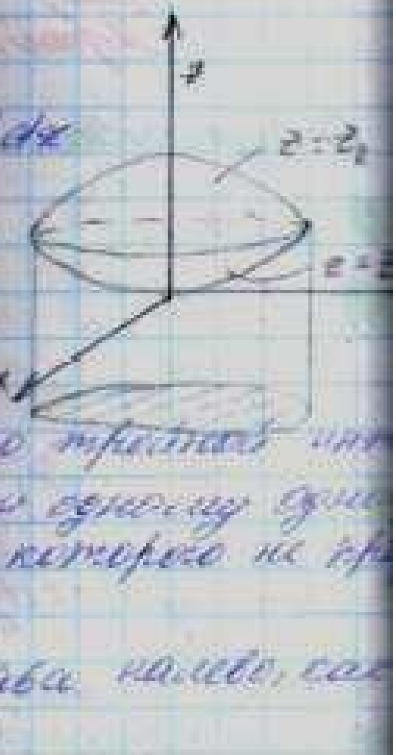
2. Основной способ вычисления тройного интеграла

Определение: Нижней (верхней) границей области Ω будем наз. пов-ть (ходограф[...] ул) верхних точек в нашу область

Определение: Граница наз. простой, ес[...]
она задается одним ур-нием $z=f(x,y)$.

Теорема: Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ имеет прост[...]
нижнюю и верхнюю границы $z=z_1(x,y)$ и
$z=z_2(x,y)$ [...]
Пусть Ω проектир. на пл-ть Oxy в облас[...]
Ω_{xy}.
Тогда

$$\iiint f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=\iint_{\Omega_{xy}} dx\,dy\int_{z_1}^{z_2} f\,dz$$



Комментарий

1. Суть ф-лы сост. в том, что тройной инт[...] сводится к одному двойному и одному одно[...]кратному интегралу, решение которого не пр[...]тавл. для нас сложностей.

2. Вычисление происходит справа налево, как в случае двойного интеграла

Замечание

Область Ω_{xy} и пределы интегриров. z_1 и [...] можно находить геометрически, построив[...]

пространств. были самый верный способ отыскания параметров, но и самой техники потому в решениях ниже следующ. задач будет предложен метод отыскания z_1, z_2, не требующ. построения пространств. фигуры, но предназначенной для достаточно простых задач в тройных интегралах.

Пример 1

$$\iiint\limits_{\Omega} 1\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{D_{xy}} dx\,dy \int\limits_{z_1}^{z_2} dz = $$

$$\Omega: \begin{cases} x+2y-z=4 \\ z=0 \\ x=0 \\ y=0 \end{cases}$$

Вычеркиваем ур-ния из D_{xy} $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ данных, не содержащ. z

И остается построить $x+2y=4$ $\left(\frac{x}{4}+\frac{y}{2}=1\right)$ плоскую обл., ограничен. вспомогательными линиями. В случае непонятной плоской обл., приравниваем на плоскости ур-ия содержащие z и исключаем из них z.

Получаем z_1, z_2

Выписываем 2-а ур-ия из данных, содержащ. z и в них выражаем z

$$z_1, z_2 \begin{cases} z=x+2y-4 \\ z=0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} 0\le y\le 2 \\ 0\le x\le 4-2y \end{matrix}$$

Одно из этих ур-ий будет задавать z_1, ур. z_2. Возьмем произвольную точку из D_{xy} [illegible] будет задав z_2, [illegible] z_1

$x+2y-4<0$ для точ. из D_{xy}

([illegible] [illegible] от [illegible] к 0)

$\Rightarrow z_1 = x + 2y - 4$
$z_2 = 0$

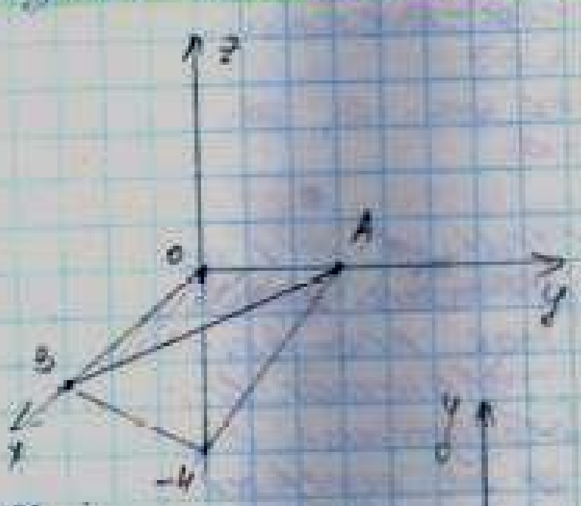
$$= \int_0^2 dy \int_0^{4-2y} dx \int_{x+2y-4}^{0} dz = \int_0^2 dy \int_0^{4-2y} dx\,(4 - x - 2y) =$$

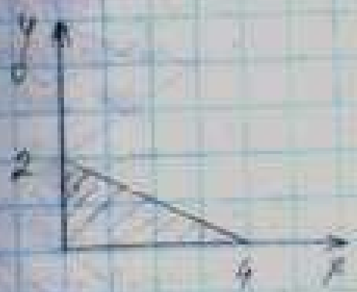
$$= \int_0^2 dy \left(4x - \frac{x^2}{2} - 2xy\right)\Big|_0^{4-2y} = \int_0^2 \left[4(4-2y) - \frac{(4-2y)^2}{2} - 2(4-2y)y\right]dy =$$

$$= \int_0^2 (16 - 8y - 8 + 8y - 2y^2 - 8y + 4y^2)\,dy = \int_0^2 (2y^2 - 8y + 8)\,dy =$$

$$= \left(\frac{2y^3}{3} - 4y^2 + 8y\right)\Big|_0^2 = \frac{16}{3} - 16 + 16 = \frac{16}{3}$$

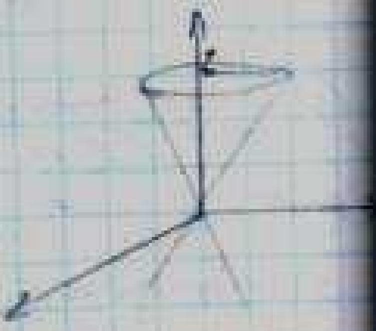
Подтвердим геометрически





$\Omega_{xy} = \triangle OAB$
$\Pi_1: z = x + 2y - 4$
$\Pi_2: z = 0$

По известной формуле объем пирамиды равен
$\frac{1}{3} S_{осн} H = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} OB \cdot OA \cdot OC = \frac{1}{6} \cdot 4 \cdot 2 \cdot 4 = \frac{16}{3}$



Пример 2: $\iiint z\,dx\,dy\,dz =$

$V: \begin{cases} z^2 = x^2 + y^2 \\ z = 2 \end{cases}$

$= \iint\limits_{D_{xy}} dxdy \int\limits_{z_1}^{z_2} z\,dz =$

$D_{xy}: z^2 = x^2+y^2$

$z_1, z_2: \begin{cases} z=\sqrt{x^2+y^2} \\ z=2 \end{cases}$

$\sqrt{x^2+y^2} < 2$ для т. из Ω $\qquad 0 \le \varphi \le 2\pi$

$\Rightarrow z_1 = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{\rho^2} = \rho \qquad 0 \le \rho \le 2$

$z_2 = 2$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 \rho\, d\rho \int\limits_\rho^2 z\,dz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 \rho\, d\rho \frac{z^2}{2}\Big|_\rho^2 = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 \rho\, d\rho \left(2 - \frac{\rho^2}{2}\right) =$$

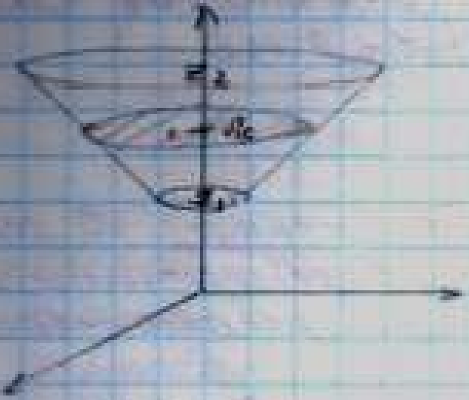
$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \left(\rho^2 - \frac{\rho^4}{8}\right)\Big|_0^2 = (4-2)\int\limits_0^{2\pi} d\varphi = 4\pi.$$

3. Второй метод выч. тройного интеграла.

Теорема: Пусть для Ω $z_1 \le z \le z_2$. Пусть $z=c$, получается плоская обл. Ω_c.

Тогда

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz = \int\limits_{z_1}^{z_2} dz \iint\limits_{\Omega_z} f(x,y,z)\,dxdy$$



Пример. Вычислить объем $z = x^2+y^2$, отсекаемый $z=1$ и $z=4$.

$V = \iiint\limits_{\Omega} dxdydz = \int\limits_1^4 dz \iint\limits_{x^2+y^2 \le z} dxdy =$