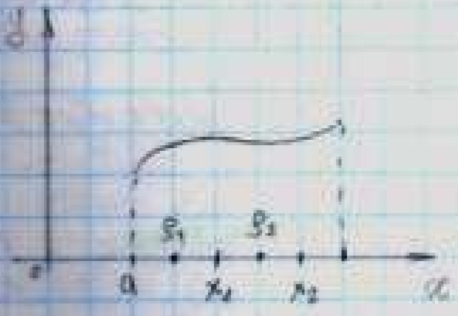
Кратное интегрирование. Двойной интеграл.

1. Определение двойного интеграла

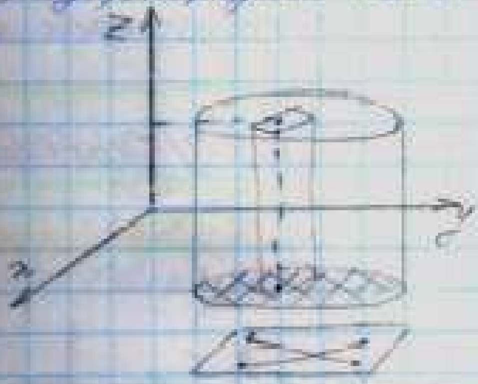
Напоминание

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda_n \to 0} I_n$$

$$I_n = \sum f(\xi_i)\Delta x_i$$



Пусть дана $D \subset O_{xy}$ и $z = f(x,y)$, определ. на D



Определение диаметра плитки будем наз. max из длин отрезков, лежащих в данной плитке

Определение диаметра разбиения будем наз. max из диаметров всех плиток разбиения

Определение:
Если для любой последов. разбиений такой, что диаметр этих разбиений стремится к нулю существует предел интегральных сумм $\lim \sum f(M_i) S_{\Delta i} = I$ не зависящий от последов. разбиений, то этот предел I наз. двойным интегралом от ф-ции $f(x,y)$ по области D.

2. Геометрический и физический смысл двойного интеграла

а) Геометрический смысл, $f(x,y) > 0$

Каждое слагаемое интегральной суммы представляет собой объём прямой призмы, (основание которой явл-ся (точка площади), с высотой $f(M_i)$. Вся интегральная сумма почти равна объему части пространства, лежащей над областью D под графиком ф-ции $z = f(x,y)$. При уменьшении диаметра разбиения точность равенства будет увеличиваться, поэтому

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = V$$

б) Физический смысл $f(x,y) = \rho(x,y)$ – плотность пластины D

В этом случае каждое слагаемое интегральной суммы представляет собой почти массу кусочка пластины.

$$\boxed{\iint \rho(x,y)\,dx\,dy = M_D}$$ – масса плоской пластины D

3. Св-ва двойного интеграла

а) линейность

$$\iint_D (\alpha f(x,y)\,dx\,dy + \beta g(x,y)\,dx\,dy) = \alpha\iint_D f(x,y)\,dx\,dy + \beta\iint_D g(x,y)\,dx\,dy$$

б) аддитивность

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D_1} f(x,y)\,dx\,dy + \iint_{D_2} f(x,y)\,dx\,dy$$

$D = D_1 \cup D_2$, $D_1 \cap D_2 = \varnothing$

3) $f(x,y) \le g(x,y) \Rightarrow \iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy \le \iint\limits_D g(x,y)\,dx\,dy$

4) $m \le f(x,y) \le M \Rightarrow m\,S_D \le \iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy \le M\,S_D$

5) $\iint\limits_D 1\,dx\,dy = S_D$

6) Теорема о среднем: если $f(x,y)$ – непрерывна на D, то

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = f(M_0)\,S, \text{ где } M_0 \in D$$

Рассмотрим способы вычисления двойного интеграла

4. Характеристики плоской обл.

Определение. Нижней (верхней) границей будем называть линию входа (выхода) вертикальной прямой в область D.

Пример

НГ: ОВ – нижн. гр.
ВГ: ОАВ – верхн. гр.

Левой (правой) гран. будем наз. линию входа (выхода) горизонт. прямой в обл. D

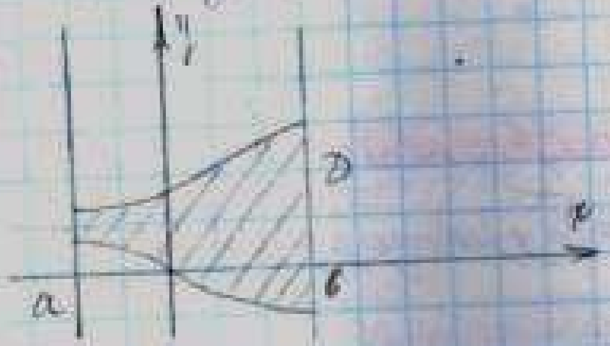
ЛГ: ОА – левая гр.
ПГ: АВ – правая гр.

Граница наз. простой, если она задаётся одним уравнением, в противном случае гран. будем наз. сложной или составной.

НГ, ЛГ, ПГ – простая.
ВГ – сложная.

5. Первый способ вычисления двойного интеграла («снизу - вверх»)

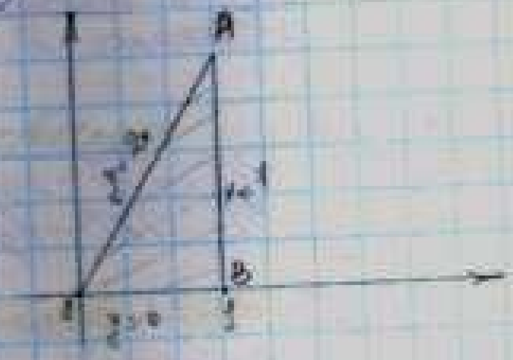
Теорема (без док-ва): Пусть область D является: $a \le x \le b$ и ограничена нижней и верхней границей $y = \varphi_1(x)$ и $y = \varphi_2(x)$, тогда



Комментарий: В вышеприведённой формуле вычисляется сначала интеграл, который скорее всего будет зависеть от x, затем полученная функция подставляется в левый интеграл и вычисляется отсюда ответ.

Пример: $\iint\limits_D (x+y)\,dx\,dy =$

$D: \begin{cases} y = 2x \\ y = 0 \\ x = 1 \end{cases}$



Границы:
1. диапазон $0 \le x \le 1$
   Н.г. $y = 0$
   В.г. $y = 2x$
   диапазон $0 \le y \le 2$
   Л.г. $x = y/2$
   П.г. $x = 1$

$= \int_0^1 dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy$

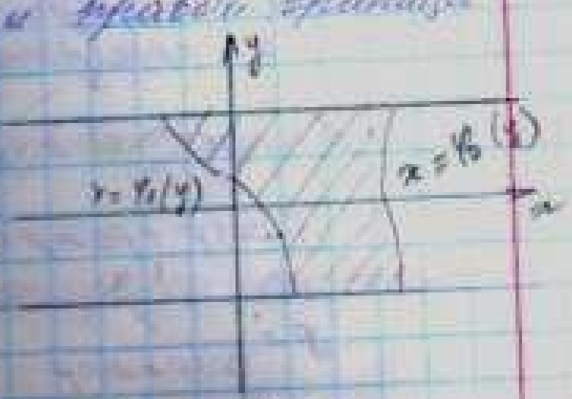
(*) $\int_0^{2x} (x+y)\,dy = \int_0^{2x} x\,dy + \int_0^{2x} y\,dy = x\int_0^{2x} dy + \frac{y^2}{2}\Big|_0^{2x} =$

$$= 4y\Big|_0^{2x} + \frac{y^2}{2}\Big|_0^{2x} = 8x^2 - 0 + \frac{4x^2}{2} - 0 = 4x^2$$

б) $\int_0^1 4x^2\,dx = \frac{4x^3}{3}\Big|_0^1 = 4/3$

6. Второй способ вычисления двойного интеграла („слева-направо")

Теорема. (у усл-ва) Пусть область D задаётся $c \le y \le d$ и ограничена левой и правой границами $x = \varphi_1(y)$ и $x = \varphi_2(y)$



Тогда $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy =$

$$= \int_c^d dy \int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y)\,dx$$

Посчитаем предыдущий пример:

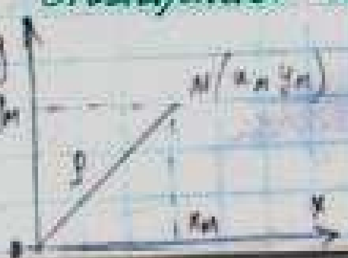
$$\iint_D (x+y)\,dx\,dy = \int_0^2 dy \int_{y/2}^{1} (x+y)\,dx$$

а) $\int_{y/2}^{1} (x+y)\,dx = \int_{y/2}^{1} x\,dx + \int_{y/2}^{1} y\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_{y/2}^{1} + yx\Big|_{y/2}^{1} =$

$$= \frac{1}{2} - \frac{y^2}{8} + y - \frac{y^2}{2} = y + \frac{1}{2} - \frac{5y^2}{8}$$

$$\int_0^2 \left(y + \frac{1}{2} - \frac{5y^2}{8}\right) dy = \left(\frac{y^2}{2} + \frac{y}{2} - \frac{5y^3}{24}\right)\Big|_0^2 = 2 + 1 - \frac{5}{3} = 3 - \frac{5}{3} = 4/3$$

7. Полярная система координат



ρ – полярный радиус (расст. от т. ...)

φ – полярный угол (угол, на который нужно повернуть ось Ox для совмещения с OM)

Связь между декартовыми и полярными координатами:

$$\begin{cases} x=\rho\cos\varphi \\ y=\rho\sin\varphi \end{cases}$$

Справедлива ф-ла: $x^2+y^2=\rho^2$

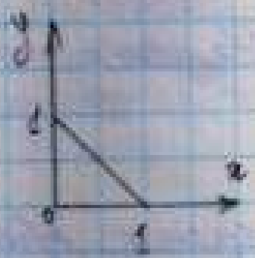
Док-во: $(\rho\cos\varphi)^2+(\rho\sin\varphi)^2=\rho^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)=\rho^2$

Иногда необходимо записать ур-ния данных линий в полярной системе координат

Пример: 1) $x+y=1$ – прямая

$\rho\cos\varphi+\rho\sin\varphi=1$

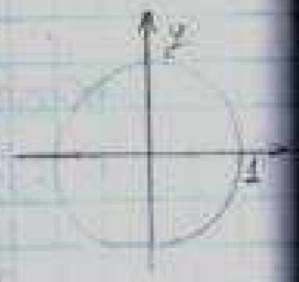
$$\rho=\frac{1}{\cos\varphi+\sin\varphi}$$



2) $y^2+x^2=1$ – окр.

$\rho^2=1$

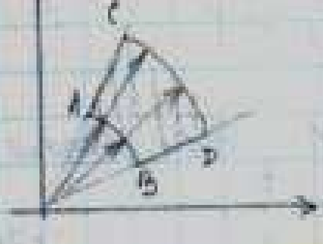
$\rho=1$



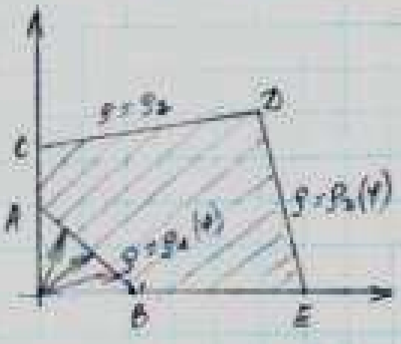
8. 3-ий способ вычисления двойного интеграла («от центра»)

Центральной (периферийной) границей области будем назв. линию входа (выхода) лучей, идущих от центра

AB – центральная гран.
CD – периферийная гран.



Граница наз. простой, если она задаётся одним ур. вида $\rho=\rho(\varphi)$, в противном случае – сложной



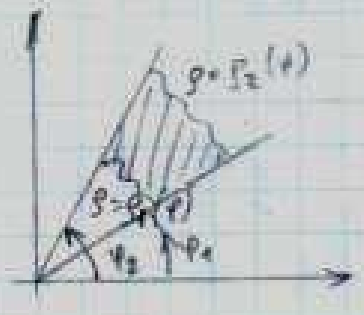
ЦГ: AB $\rho=\rho_1(\varphi)$ - прямая

ПГ: CDE $\rho=\rho_2(\varphi)$ - ломаная

$\rho=\rho_2(\varphi)$

Теорема: Пусть для этой обл. D $\varphi_1 \le \varphi_0 \le \varphi_2$ и D имеет простую центральную и периферийную границы.

$\rho=\rho_1(\varphi)$ и $\rho=\rho_2(\varphi)$



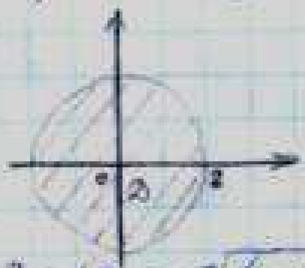
Тогда

$$\iint f(x,y)\,dxdy = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\rho_1}^{\rho_2} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\rho\, d\rho$$

где ρ - якобиан перехода к полярной системе координат.

Примеры обл., для котор. использ. данный метод.

1)



$0 \le \varphi \le 2\pi$

ЦГ: т. О $\rho=0$

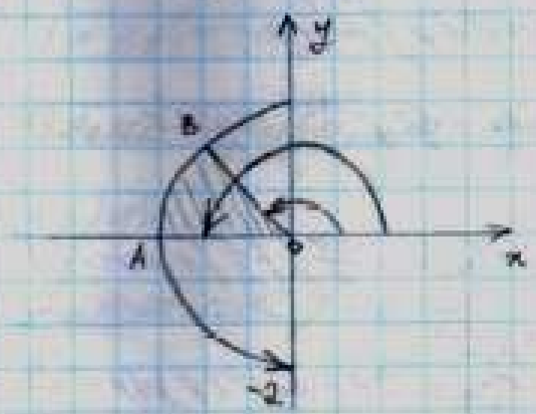
ПГ: окр-ть рад. 2 $\rho=2$

2) $D: \begin{cases} x=-\sqrt{4-y^2} \Rightarrow x^2=4-y^2;\ x^2+y^2=2^2 \\ y=0 \\ y=-x \end{cases}$

$\frac{3\pi}{4} \le \varphi \le \pi$

ЦГ: $\rho=0$

ПГ: $\rho=2$

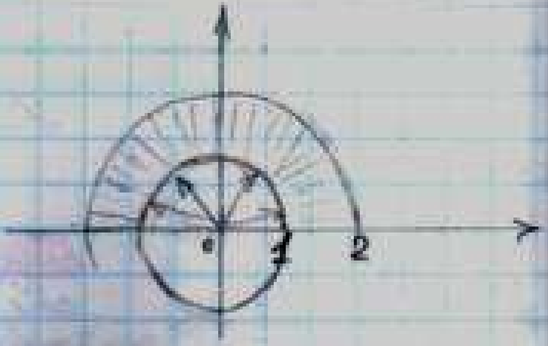


5) $D: \begin{cases} x^2+y^2=4 \\ x^2+y^2=1 \\ y \geq 0 \end{cases}$

$0 \leq \varphi \leq \pi$

№1: $\rho = 1$

№2: $\rho = 2$



Примеры вычисления интегралов.

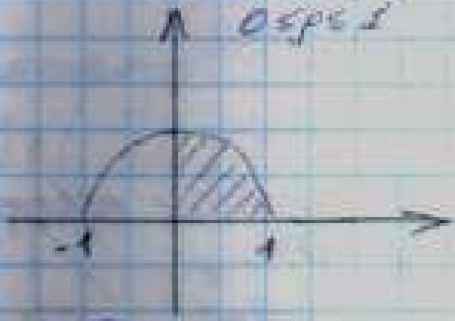
1) $$\iint \frac{dx\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^1 \frac{1}{\rho}\rho\, d\rho = \int_0^{\pi/2} d\varphi = \frac{\pi}{2}$$

$0 \leq \varphi \leq \pi/2$

$0 \leq \rho \leq 1$

$D. \begin{cases} y = \sqrt{1-x^2} \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

$\boxed{x^2+y^2=\rho^2}$



2) $$\iint y\,dx\,dy = \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{4\sin\varphi} \rho \sin\varphi\, \rho\, d\rho =$$

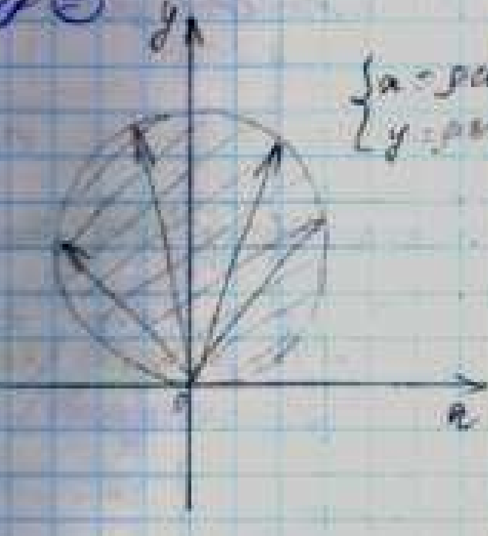
$D: x^2+y^2=4y$

$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases}$

$x^2+y^2-4y=0$

$x^2+\underbrace{y^2-4y+4}-4=0$

$x^2+(y-2)^2=4$



$$= \int_0^{\pi} \sin\varphi\, d\varphi \int_0^{4\sin\varphi} \rho^2\, d\rho$$

а) $$\int_0^{4\sin\varphi} \rho^2\, d\rho = \frac{\rho^3}{3}\Big|_0^{4\sin\varphi} = \frac{64\sin^3\varphi}{3}$$

б) $$\frac{64}{3}\int_0^{\pi} \sin^4\varphi\, d\varphi = \frac{64}{3}\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{2}(1-\cos 2\varphi)\right)^2 = \frac{16}{3}\int_0^{\pi}(1-\cos 2\varphi)^2 d\varphi =$$

$$= \frac{16}{3}\int_0^{\pi}(1-2\cos 2\varphi+\cos^2 2\varphi)\,d\varphi = \frac{16}{3}\int_0^{\pi}(1-\cos 2\varphi)^2 d\varphi = \frac{16}{3}\int_0^{\pi}(1-$$

$$-2\cos 2\varphi+\cos^2 2\varphi)\,d\varphi = \frac{16}{3}\int_0^{\pi}\left(1-2\cos 2\varphi+\frac{1}{2}(1+\cos 4\varphi)\right) d\varphi =$$

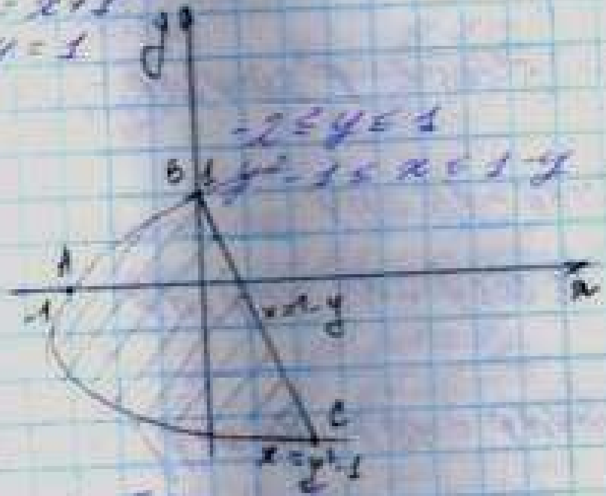
$= \frac{16}{3}\int_0^{\pi}\left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2}\cos 4\varphi\right)d\varphi = 8\int_0^{\pi}(1-\cos 4\varphi)\,d\varphi = 8\left(\varphi - \frac{\sin 4\varphi}{4}\right)\Big|_0^{\pi} = 8\pi$

Приложения двойного интеграла

1. Вычисление площадей плоских фигур

$S_D = \iint_D 1\,dx\,dy$ (вытекает из ф-ла двойного интеграла)

Пример: Вычислить площадь, огранич. линиями $\begin{cases} y^2 = x+1 \\ x+y = 1 \end{cases}$



C: $\begin{cases} y^2 = x+1 \\ x+y = 1 \\ 1 = x+y \end{cases}$

$y^2 - 1 = 1 - y$

$y^2 + y - 2 = 0$

$y_{1,2} = -2, 1$

$x_{1,2} = 3, 0$

$S_{ABC} = \iint_{ABC} 1\,dx\,dy = \int_{-2}^{1} dy \int_{y^2-1}^{1-y} dx = \int_{-2}^{1} dy\,(1 - y - y^2 + 1) = \left(2y - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right)\Big|_{-2}^{1}$

$= 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \left(-4 - 2 + 8/3\right) = 4{,}5$

2. Вычисление объёма криволин. призм.

$V_{кр.пр} = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy$

(вытекает из геом. смысла двойного интеграла)