$$y_c = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b (y(x))^2 dx}{\int_a^b y\,dx}$$

2. Несобственные интегралы 1-рода

До сих пор изучались интегралы для конечных отрезков a, b и непрерывн. функций на этих отрезках

Пусть $f(x)$ - интегрируема на $[a; +\infty]$

Опр: Несобственный интеграл 1-рода от функции $f(x)$ на интервале $[a; +\infty)$ называется число $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, которое равно $\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$, если предел существует.

В таком случае несобств-ый интеграл наз-ся сходящимся если предел не существует несобств. интеграл наз-ся расходящимся

Пример 1.

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-x}dx = \lim_{b\to\infty} -\int_0^b e^{-x}d(-x) =$$

$$= \lim_{b\to\infty} -e^{-x}\Big|_0^b = \lim_{b\to\infty}(-e^{-b}+e^0) = \lim_{b\to\infty}(1-e^{-b}) = 1$$

Вывод: предел существует => несобств. интеграл сходится и равен 1.

Пример 2.

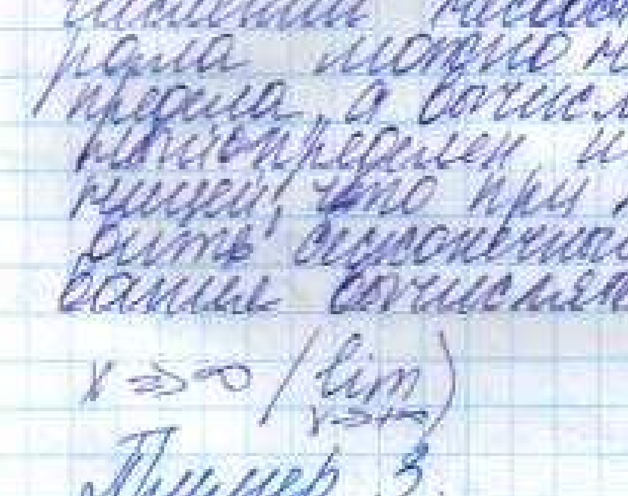
$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{b\to+\infty} 2\sqrt{x}\Big|_1^b = \lim_{b\to+\infty}(2\sqrt{b}-2) = +\infty$$

Вывод: в этом случае предел не существует => интеграл расходящийся.

Рациональное предложение: При вычислении несобственного интеграла можно не записывать знак предела, а вычислять его как определенный интеграл, с той разницей, что при попытке подставить бесконечный предел интегрирования вычислять предел при $x\to\infty$ ($\lim_{x\to+\infty}$)

Пример 3.

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg}x\Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}0 = \frac{\pi}{2}$$



Геометрический смысл несобственного интеграла 1 рода:

Если несобственный интеграл сходится, то он равен площади бесконечной криволинейной трапеции

Пример 4 (классический)

$p \neq 1$ $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \int_1^{+\infty} x^{-p}\,dx = \frac{x^{-p+1}}{-p+1}\Big|_1^{+\infty} = \frac{1}{(1-p)x^{p-1}}\Big|_1^{+\infty} =$

$= \begin{cases} 0 - \frac{1}{1-p}, & p>1 \\ +\infty - \frac{1}{1-p}, & p<1 \end{cases}$

$p = 1$ $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \ln|x|\Big|_1^{+\infty} = +\infty - 0 = +\infty$

Вывод: 1) Если $p>1$, то $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ сходится и равен $\frac{1}{p-1}$

2) Если $p \leq 1$, то $\displaystyle\int_1 \frac{}{x^p}$ расходится

3. Другие типы интегралов 1 рода:

Пусть $f(x)$ непрерывна на $(-\infty, a]$

Опр: Несобственный интеграл 1 рода от функции $f(x)$ на интервале $(-\infty, a]$ называют число

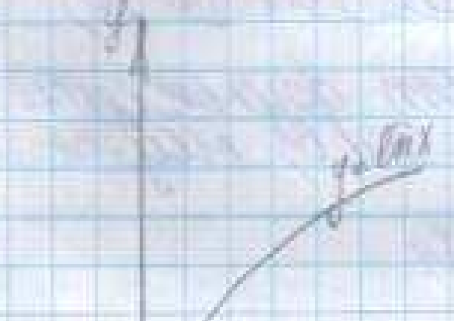
$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$ равен $\lim\limits_{b\to\infty}\int_{-b}^{a} f(x)\,dx$

Если предел существует, в этом случае несобственный интеграл наз-ся сходящимся, в противном — расходящимся

Пример 1: $\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x\Big|_{-\infty}^{0} = \operatorname{arctg} 0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$

Пример 2: $\int_{-\infty}^{0} \frac{x}{1+x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{d\frac{x^2}{2}}{1+x^2} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} =$

$= \frac{1}{2} \ln(x^2+1)\Big|_{-\infty}^{0} = 0-\infty = -\infty$ — расходящ.



Пусть $f(x)$ — непрерывна на всей числовой оси $(-\infty, +\infty)$

Опр: Н И I рода от функции $f(x)$ на $(-\infty, +\infty)$ наз-ся число

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{+\infty} f(x)\,dx$$

Если Н И I рода стоящие в правой части сходятся, то интеграл сходящийся

Если хотя бы один из интеграл правой части расходится, то интеграл расходящийся.

Пример 3.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^x dx = \int_{-\infty}^{0} e^x dx + \int_0^{+\infty} e^x dx = e^x \Big|_{-\infty}^{0} + e^x \Big|_0^{+\infty} =$$

$= 1 - 0 + \infty - 1 = \infty$ — расходящийся

Используя различные предельные точки можно получить так

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^x dx = e^x \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \infty - 0 = \infty$$

Пример 4

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi - с$$

4. Несобственные интегралы 2 рода

Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a, b)$

Опр. Н. И. 2 рода от функции $f(x)$ на интервале $[a, b)$ наз-ся число

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$$

Если предел сущ-ет — сходящ, если нет — расход.

Пример 1:

$$\int_0^1 \frac{dx}{x-1} = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{x-1} = \lim_{\varepsilon \to 0+} \ln|x-1| \Big|_0^{1-\varepsilon} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0+} (\ln|1-\varepsilon-1| - \ln 1) = \lim_{\varepsilon \to 0+} \ln\varepsilon = -\infty$$ — расходящийся

Исследуем расходим-ся представлено

$$\int_0^1 \frac{dx}{x-1} = \int_0^1 \frac{d(x-1)}{x-1} = \ln|x-1|\Big|_0^1 = -\infty - 0 = -\infty$$

Пример 2:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = -\int_0^1 \frac{d(1-x)}{\sqrt{1-x}} = -\int_0^1 \frac{d(1-x)}{\sqrt{1-x}} = -2\sqrt{1-x}\Big|_0^1 =$$

$= 0 + 2\sqrt{1} = 2$ – несоб. интег. сходится

Геометрический смысл Н. интегралов 2 рода

Н.И. 2 рода равен площади бесконечной криволин. трапеции