20.03.13

1) Интегрирование по частям в определённом интеграле

Ф-ла: $\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du$

Особенность: множитель uv превращается в число после подстановки пределов интегрирования

Вывод: $(uv)' = u'v + uv'$

По формуле Ньютона - Лейбница:

$\int_a^b (uv)'dx = (uv)\Big|_a^b$ $\quad \int_a^b (u'v + uv')dx = (uv)\Big|_a^b$

$\int_a^b u'v\,dx + \int_a^b uv'\,dx = (uv)\Big|_a^b$

$\int_a^b v\,du + \int_a^b u\,dv = (uv)\Big|_a^b$ ч.т.д.

Пример: $\int_0^1 x e^{2x} dx = \int_0^1 x\,d\left(\frac{e^{2x}}{2}\right) = \left(x\frac{e^{2x}}{2}\right)\Big|_0^1 -$

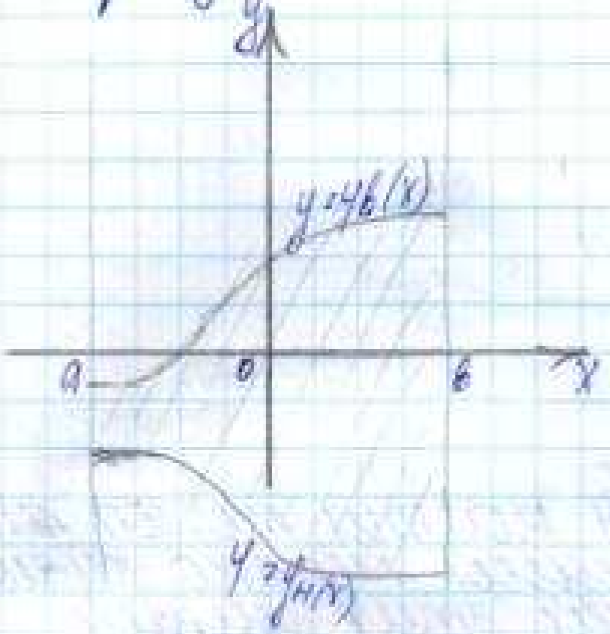
$-\int_0^1 \frac{e^{2x}}{2}dx = \frac{e^2}{2} - 0 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int_0^1 e^{2x}d(2x) = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{4}e^{2x}\Big|_0^1 =$

$= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{4}(e^2 - e^0) = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2+1}{4}$

Рассмотрим приложение определённого интеграла

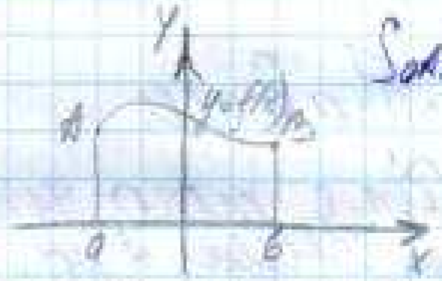
2. Вычисление площадей плоских фигур.

Формула 1



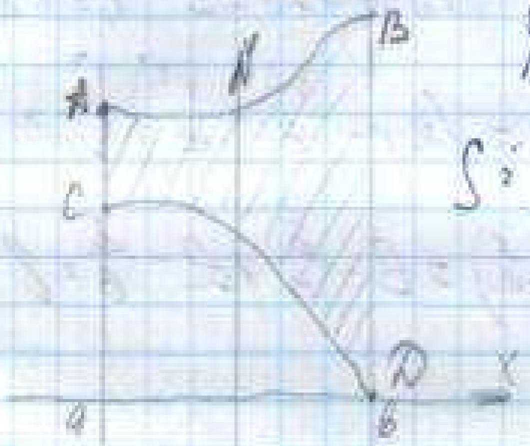
$$S = \int_a^b [y_в(x) - y_н(x)]\,dx$$

Вывод: Геометрический смысл опред. интеграла



$$S_{aABb} = \int_a^b f(x)\,dx$$

Пусть $C>0$, такая что



$$y_н(x) + C > 0$$

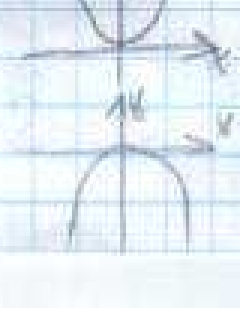
$$S = S_{aABb} - S_{aCDb} = \int_a^b (y_в(x)+C)\,dx - \int_a^b (y_н(x)+C)\,dx =$$

$$= \int_a^b [y_в(x) + C - (y_н(x)+C)]\,dx =$$

$$= \int_a^b [y_в(x) - y_н(x)]\,dx$$

Пример 1. Вычислить площадь фигуры ограниченной линиями

$$\begin{cases} y = 2 - x^2 \\ y = -x \end{cases} \qquad y = x^2 \qquad y = -x^2$$



$y = 2 - x^2$

$0 = 2 - x^2$

$x^2 = 2$

$x_{1,2} = \pm\sqrt{2}$

Правило.

Для того чтобы найти точки пересечения 2-ух линий нужно решить систему уравнений этих линий

$A, B: \begin{cases} y = 2 - x^2, \\ y = -x \end{cases}$ $\quad 2 - x^2 = -x \quad x^2 - x - 2 = 0$

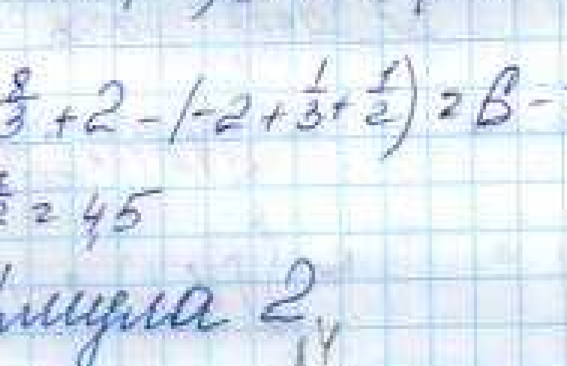
$D = 1 + 8 = 9 \quad x_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{2} = -1; 2$

$S = \int_{-1}^{2} [2 - x^2 - (-x)]\,dx = \left(2x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-1}^{2} =$

$= 4 - \frac{8}{3} + 2 - \left(-2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) = 6 - \frac{8}{3} + 2 - \frac{5}{6} = 8 - \frac{16+5}{6} =$

$= 8 - \frac{7}{2} = 4{,}5$

Формула 2



$S = \int_c^d [\psi_п(y) - \psi_л(y)]\,dy$

Пример 2.

Найти площадь фигуры огр. линиями

$$\begin{cases} x = \sqrt{2-y} \\ x + y = 2 \\ y = 0 \end{cases}$$

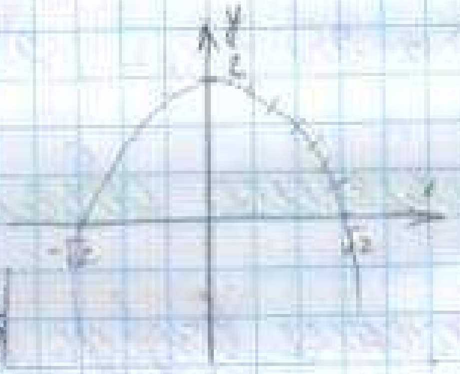
Правило построения линий:

Если в уравнении линии имеется корень, то нужно избавиться от корня, построить линию согласно полученному уравнению без корня, а затем взять часть построенной линии

$x = -\sqrt{2-y}$

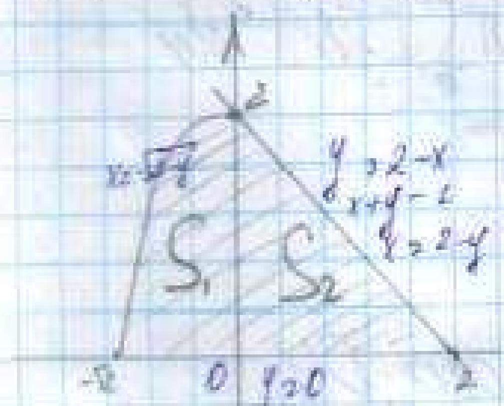
$x^2 = 2-y$

$y = 2-x^2$



$y = 2-x$

x	0	2
y	2	0



$c = 0 \qquad d = 2$

$y_л(y) = -\sqrt{2-y}$

$y_п(y) = 2-y$

$$S = \int_0^2 [2-y-(-\sqrt{2-y})]\,dy =$$

$$= \int_0^2 (2-y+\sqrt{2-y})\,dy = -\int_0^2 (2-y+\sqrt{2-y})\,d(-y+2) =$$

$= -\left(\frac{(2-y)^2}{2} + \frac{(2-y)^{3/2}}{3/2}\right)\Big|_0^2 = -\left(0-2-\frac{2}{3}\sqrt{8}\right) = 2+\frac{4}{3\sqrt{2}}$

Замечание: в этой задаче можно было бы использовать и формулу 1

Способ 2 решения задачи

В силу того что верхняя граница задаётся двумя уравнениями для использования формулы 1 необходимо разделить данную площадь на 2 части.

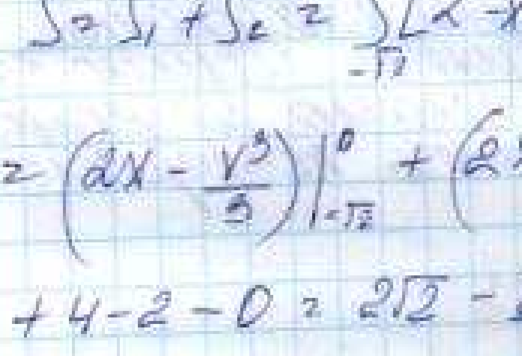
$$S = S_1 + S_2 = \int_{-\sqrt{2}}^{0}[2-x^2-0]dx + \int_0^2[2-x-0]dx =$$

$$= \left(2x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-\sqrt{2}}^{0} + \left(2x-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^2 = 0-\left(-2\sqrt{2}+\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) +$$

$$+4-2-0 = 2\sqrt{2}-\frac{2\sqrt{2}}{3}+2 = 2-\frac{4}{3\sqrt{2}}$$

3. Вычисление объемов фигур вращения.

а) Вращение вокруг оси OX

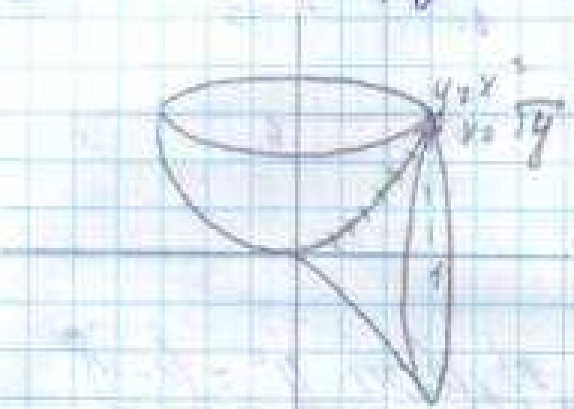


$$V_{вр} = \pi\int_a^b [f(x)]^2 dx$$

б) Вращение вокруг оси OY

$x = \psi(y)$ $\quad V_{вр} = \pi\int_c^d [\psi(y)]^2 dy$

Пример: найти объемы фигур вращения $y=x^2$ на участке $0\le x\le 1$, вокруг осей координат.



$$V_{ox}=\pi\int_0^1 (x^2)^2dx=\pi\int_0^1 x^4dx=$$

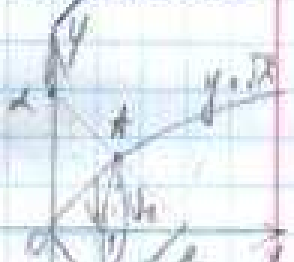
$$=\pi\frac{x^5}{5}\Big|_0^1=\frac{\pi}{5}$$

$$V_{oy}=\pi\int_0^1 (\sqrt{y})^2dy=\pi\int_0^1 ydy=$$

$$=\pi\frac{y^2}{2}\Big|_0^1=\frac{\pi}{2}$$

Пример: вычислить объём фигуры вращения криволинейной трапеции.

$$\begin{cases} y=\sqrt{x} \\ x+y=2 \\ y=0 \end{cases}$$ вокруг оси Ox



$A:\begin{cases} x+y=2 \\ y=\sqrt{x} \end{cases}$

$x+\sqrt{x}=2$

$\sqrt{x}=t\ge 0$

$t^2+t-2=0$

$t_{1,2}=-2;1$

$t=1,\ \sqrt{x}=1,\ x=1$

$$V=V_1+V_2=\pi\int_0^1(\sqrt{x})^2dx+\pi\int_1^2(2-x)^2dx=\pi\int_0^1 xdx+$$

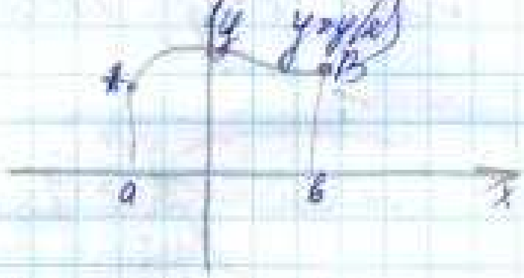
$$+\pi\int_1^2(x-2)^2d(x-2)=\pi\frac{x^2}{2}\Big|_0^1+\pi\frac{(x+2)^3}{3}\Big|_1^2=\frac{\pi}{2}-0+0-\frac{\pi}{3}(-1)=$$

$$=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}=\frac{5\pi}{6}$$

27.03.13г 1. Приложение определенного интеграла (продолжение)

а) Вычисление длины кривой

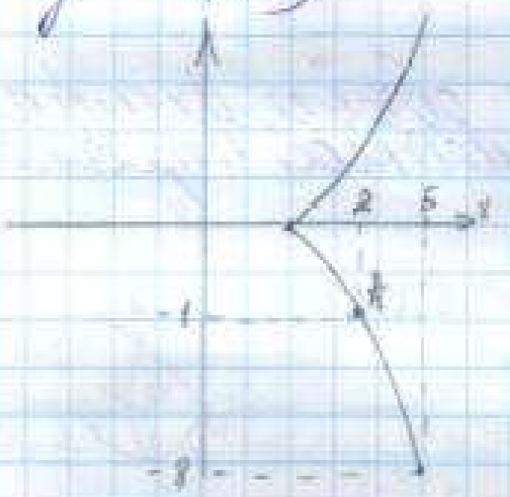
$$l_{AB} = \int_a^b \sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx$$



Пример:

Вычислить длину кривой $y^2=(x-1)^3$ от т. $A(2;-1)$ до $B(5;-8)$.

$$y=\pm\sqrt{(x-1)^3}$$



$D(y) = \{x \geq 1$

$$y' = \left(-\sqrt{(x-1)^3}\right)' = -\frac{3}{2}\sqrt{x-1}$$

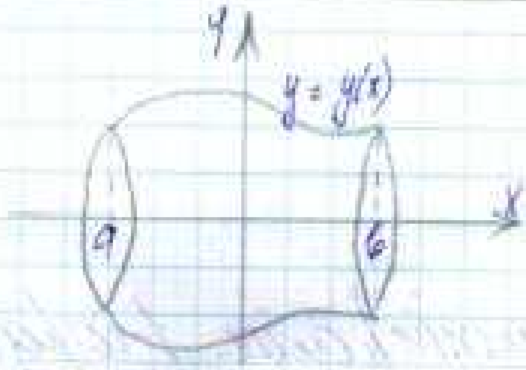
$$l_{AB} = \int_2^5 \sqrt{1+\frac{9}{4}(x-1)}\,dx =$$

$$= \int_2^5 \sqrt{1+\frac{9x}{4}-\frac{9}{4}}\,dx =$$

$$= \int_2^5 \sqrt{\frac{9x}{4}-\frac{5}{4}}\,dx = \frac{1}{2}\int_2^5 \sqrt{9x-5}\,dx = \frac{1}{18}\int_2^5 (9x-5)^{\frac{1}{2}}\,d(9x-5)$$

$$= \frac{1}{18}\,\frac{(9x-5)^{3/2}}{3/2}\Bigg|_2^5 = \frac{1}{27}\left(40^{3/2}-13^{3/2}\right)$$

б) Вычисление площади плоской фигуры



$$S_{вр.} = 2\pi \int_a^b y(x)\sqrt{1+(y')^2}\,dx$$

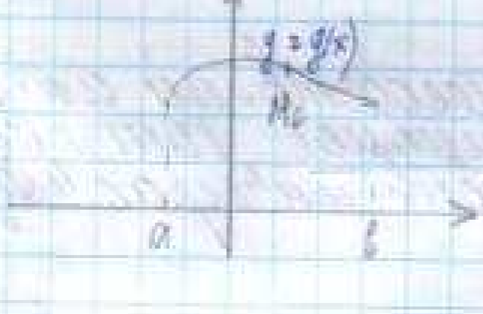
в) вычисление работы силы $F(x)$ по перемещению тела ед. массы вдоль отрезка $[a,b]$

$$A = \int_a^b F(x)\,dx$$

г) Масса стержня с заданной плотностью $\rho(x)$

$$M_{[a,b]} = \int_a^b \rho(x)\,dx$$

д) Центр тяжести кривой $y=f(x)$, $a \le x \le b$ с постоянной плотностью

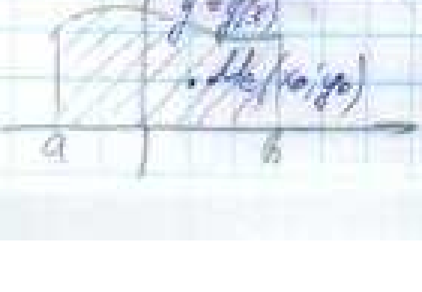


$$x_c = \frac{\int_a^b x\sqrt{1+(y')^2}\,dx}{\int_a^b \sqrt{1+(y')^2}\,dx}$$

96100
410000

$$y_c = \frac{\int_a^b f(x)\sqrt{1+(y')^2}\,dx}{\int_a^b \sqrt{1+(y')^2}\,dx}$$

е) Центр тяжести криволинейной трапеции с постоянной плотностью



$$X_c = \frac{\int_a^b xy\,dx}{\int_a^b y\,dx}$$

$$y_c = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b (y(x))^2\,dx}{\int_a^b y\,dx}$$

2. Несобственные интегралы 1-го рода

До сих пор изучали интегралы для конечных отрезков a, b и непрерывных функций на этих отрезках.

Пусть $f(x)$ - интегрируема на $[a; +\infty]$

Опр: Несобственный интеграл 1-го рода от функции $f(x)$ на интервале $[a; +\infty)$ называется число $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, которое равно $\lim\limits_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$, если предел существует.

В таком случае несобств-ый интеграл наз-ся сходящимся если предел не существует несобств. интеграл наз-ся расходящимся

Пример 1.

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-x}dx = \lim_{b\to\infty} -\int_0^b e^{-x}d(-x) =$$

$$= \lim_{b\to\infty} -e^{-x}\Big|_0^b = \lim_{b\to\infty}(-e^{-b}+e^0) = \lim_{b\to\infty}(1-e^{-b}) = 1$$