3. Интегрирование иррациональных выражений

а) Случай рациональной замены.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} = \int \frac{6t^5\,dt}{\sqrt{t^6}+\sqrt[3]{t^6}} = 6\int \frac{t^5\,dt}{t^3+t^2} = 6\int \frac{t^3\,dt}{(t+1)} =$$

$x = t^6 \quad dx = dt^6 = 6t^5\,dt$

$$= 6\int \frac{(t^3+1)-1}{t+1}\,dt = 6\int \left(\frac{(t+1)(t^2-t+1)}{t+1} - \frac{1}{t+1}\right) dt =$$

$$= 6\int \left(t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1}\right) dt = 6\left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t - \ln|t+1|\right) +$$

$$+ C = 6\left(\frac{\sqrt[6]{x^3}}{3} - \frac{\sqrt[6]{x^2}}{2} + \sqrt[6]{x} - \ln|\sqrt[6]{x}+1|\right) + C = 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} +$$

$$+ 6\sqrt[6]{x} - 6\ln|\sqrt[6]{x}+1| + C$$

б) Тригонометрическая замена

$$\int \sqrt{9-x^2}\,dx = \qquad x = 3\cos t \quad t = \arccos\frac{x}{3}$$

$\sqrt{9-x^2} = \sqrt{9-9\cos^2 t} = 3\sqrt{1-\cos^2 t} = 3\sqrt{\sin^2 t} = 3\sin t$

$dx = d(3\cos t) = -3\sin t\,dt$

$$= \int 3\sin t\,(-3\sin t)\,dt = -9\int \sin^2 t\,dt = -9\cdot\frac{1}{2}\int(1-\cos 2t)\,dt$$

$$= -\frac{9}{2}\left(t - \frac{\sin 2t}{2}\right) + C = -\frac{9}{2}\left(\arccos\frac{x}{3} - \frac{\sin 2(\arccos\frac{x}{3})}{2}\right) + C$$

$$= -\frac{9}{2}\left(\arccos\frac{x}{3} - \frac{2\sin\left(\arccos\frac{x}{3}\right)\cdot\cos\left(\arccos\frac{x}{3}\right)}{2}\right) + C =$$

$$= -\frac{9}{2}\left(\arccos\frac{x}{3} - \sqrt{1-\frac{x^2}{9}}\cdot\frac{x}{3}\right) + C$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-9}} = \quad x = \frac{3}{\cos t} \quad \sqrt{x^2-9} = \sqrt{\frac{9}{\cos^2 t} - 9} =$$

$$= 3\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t} - 1} = 3\sqrt{tg^2 t} = 3 tg\, t \qquad 1 + tg^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$tg^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$$

$$dx = d\left(\frac{3}{\cos t}\right) = 3\left(-\frac{1}{\cos^2 t} \cdot (-\sin t)\right)$$

$$= \int \frac{\frac{3 \sin t}{\cos^2 t}\, dt}{\frac{3}{\cos t} \cdot 3 tg\, t} = \frac{1}{3} \int \frac{tg\, t\, dt}{tg\, t} = \frac{1}{3}\int dt = \frac{1}{3} t + C$$

$$= \frac{1}{3} \arccos \frac{3}{x} + C \qquad x = \frac{3}{\cos t} \quad \cos t = \frac{3}{x} \quad t = \arccos \frac{3}{x}$$

б) Гиперболическая замена

$$\int \sqrt{1+x^2}\, dx = \int ch\, t\, ch\, t\, dt = \int ch^2 t\, dt =$$

$$x = sh\, t \quad \sqrt{1+x^2} = \sqrt{1+sh^2 t} = \sqrt{ch^2 t} = ch\, t$$

$$ch^2 t - sh^2 t = 1 \qquad dx = d\, sh\, t = ch\, t\, dt$$

Формула понижения степени

$$ch\, 2t = ch^2 t + sh^2 t = ch^2 t + ch^2 t - 1 = 2ch^2 t - 1$$

$$\Rightarrow ch^2 t = \frac{1}{2}(1 + ch\, 2t)$$

$$= \frac{1}{2}\int (1 + ch\, 2t)\, dt = \frac{1}{2}\left(t + \frac{sh\, 2t}{2}\right) + C = \frac{1}{2} \cdot$$

$$\cdot \left(arsh\, x + \frac{sh(2 arsh\, x)}{2}\right) + C$$

13.03.13

Определённый интеграл

1. Понятие определённого интеграла

Пусть $f(x)$ определена на $[a;b]$

Опр: разбиением отрезка $[a;b]$ будем называть набор интервалов $[x_0,x_1]$, $[x_1,x_2]$ ... $[x_{n-1},x_n]$ с выбранными внутренними точками $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \dots \xi_n$

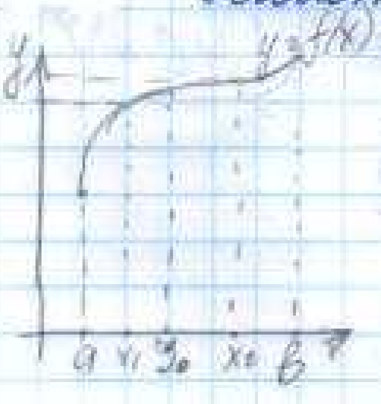
Опр: по диаметром разбиения будем называть наибольшую из длин отрезков разбиения

$$d = \max_{i=\overline{1,n}} (x_i - x_{i-1})$$

Опр: интегральной суммой функции $f(x)$ для разбиения R будем называть

$$I_R = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

Геометрический смысл I_R



$f(\xi_2)(x_2-x_1)$ - площадь выделенного прямоугольника

Опр: $aABb$ - наз-ся криволинейной трапецией

Интегральная сумма $\approx$ площади криволинейной трапеции

Равенство становится более точным если диаметр разбиения $\to 0$

Опр: Определенным интегралом от $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ наз-ся число которое

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{d(R_n)\to 0} I_{R_n}, \text{ где}$$

R_n - последовательность разбиений для которых $d(R_n)\to 0$, причем lim не зависит от выбора точек разбиения

Замечание:

1) Числа a и b наз-ся нижним и верхним пределами интегрирования

2) Если $a>b$, то по определению

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

3) Если $a=b$, то по определению $\int_a^a f(x)dx=0$

2. Свойства определенного интеграла.

а) Если $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$, то опред. интеграл всегда существует

б) $\int_a^b c f(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$

в) $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x) \pm \int_a^b g(x)$

г) Свойство аддитивности для любых a, b, c:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Проиллюстрируем геометрически

$a < c < b$

$S_{aABb} = S_{aACc} + S_{cCBb}$

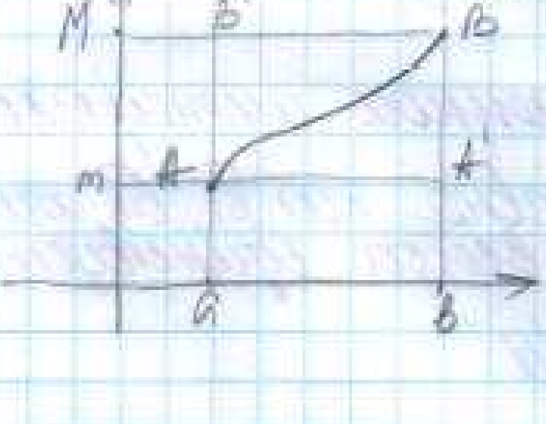
д) Если $f(x) \geq 0$, то опред интеграл

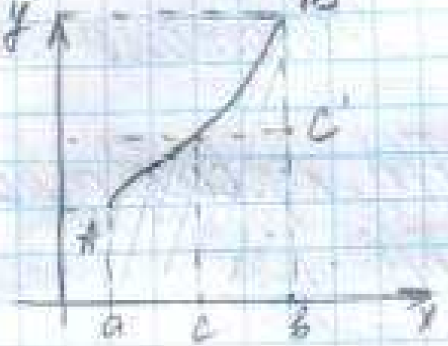
$\int_a^b f(x)dx \geq 0$

е) Если $m \leq f(x) \leq M$ на $[a;b]$

$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$

$S_{aA'Bb} \leq S_{aABb} \leq S_{aB'Bb}$



Теорема о среднем:
Существует $c \in (a, b)$:
$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$


$S_{aABb} = S_{aCC'b}$

3) Если $f(x) \le g(x)$, то $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$

3. Формула Ньютона-Лейбница

Теорема: Функция $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ (интеграл с переменным верхним пределом) $\Phi(x)$ является первообразной для функции $f(x)$

Доказательство: докажем что $\Phi'(x) = f(x)$
$$\Phi'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Phi(x+\Delta x) - \Phi(x)}{\Delta x} =$$
$$\Phi(x+\Delta x) - \Phi(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt =$$
из св-ва аддитивности $= \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt =$
по теореме о среднем $= f(c)(x+\Delta x - x) = f(c)\Delta x$, $x < c < x+\Delta x$

$\Rightarrow \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{f(c)\Delta x}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} f(c) = f(x) \Rightarrow$

$x < c < x+\Delta x \Rightarrow$ при $\Delta x \to 0$ $c \to x$

$= \Phi'(x)$ — первообразная

Теорема: Формула Ньютона-Лейбница

Если $f(x)$ — непрерывна $F(x)$ — первообразная для $f(x)$, то $\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

Замечание: $F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$

Вывод формулы:

① $F(x)$, $\Phi(x)$ — первообразные для $f(x)$, поэтому (см. свой. 1)

$\Phi(x) = F(x) + C$

Пусть $x = a$ $\Phi(a) = F(a) + C$ $0 = F(a) + C$ $C = -F(a)$

$\Phi(x) = F(x) - F(a)$

Пусть $x = b$ $\Phi(b) = F(b) - F(a)$

$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

Примеры:

1) $\int\limits_1^4 \frac{2\sqrt{x}-1}{x^2}dx = \int\limits_1^4 \frac{2\sqrt{x}}{x^2}dx - \int\limits_1^4 \frac{1}{x^2}dx = \int\limits_1^4 2x^{-\frac{3}{2}}dx -$

$- \int\limits_1^4 \frac{dx}{x^2} = 2\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}\Big|_1^4 + \frac{1}{x}\Big|_1^4 = -\frac{4}{\sqrt{x}}\Big|_1^4 + \left(\frac{1}{4} - 1\right) = -2+4+$

$+\frac{1}{4}-1=-2+4-\frac{3}{4}=\frac{5}{4}$

2) $\int_0^{\frac{\pi}{6}}(2+\sin x)^2\cos x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}(2+\sin x)^2\,d\sin x=$

$=\frac{(2+\sin\frac{\pi}{6})^3}{3}-\frac{(2+\sin 0)^3}{3}=\frac{(2+\frac{1}{2})^3}{3}-\frac{2^3}{3}=$

$=\frac{(\frac{5}{2})^3-8}{3}=\frac{\frac{125}{8}-8}{3}=\frac{125-64}{24}=\frac{61}{24}$

4. Специфика использования при вычислении определенного интеграла методом замены переменных

Теорема: Пусть $x=\varphi(t)$ такая, что $\varphi(\alpha)=a$ $\varphi(\beta)=b$, тогда $\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$.

Особенности использования:

1) Используя метод замены при вычислении опред. интеграла, возвращаться к старой переменной не нужно

2) В этом случае обратимость $\varphi(t)$ не требуется

Пример: $\int_0^1\frac{dx}{1+\sqrt{x}}=\int_1^2\frac{2(t-1)dt}{t}=2\int_1^2\left(1-\frac{1}{t}\right)dt=$

$t=1+\sqrt{x}$ $x=0\Rightarrow t=1$	$=2(t-\ln\lvert t\rvert)\Big|_1^2=2(2-\ln 2)-$
$x=(t-1)^2$ $x=1\Rightarrow t=2$	$-2(1-\ln 1)=4-2\ln 2-2=$
$dx=d(t-1)^2=2(t-1)dt$	$=2-2\ln 2=2-\ln 4$