2. Интегрирование рациональных функций.

Опр: рац функцией наз-ся функция вида

$$f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}, \text{ где}$$

$P_n(x)$, $Q_m(x)$ — многочлены степеней n, m.

а) Понятие правильной и неправильной дроби

Опр: Правильной дробью будем называть рациональную функцию у которой степень числителя меньше степени знаменателя

Пример: $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$

Опр: Неправильной дробью называют рац функцию у которой степень числителя не меньше степени знаменателя.

Пример: $f(x) = \frac{x^3}{x^2+1}$

Теорема №1:

Любая неправ-ая дробь м.б. разложена в сумму много-го члена и прав. дроби

Это разложение достигается путём деления многочлена на многочлен.

Пример: $f(x) = \frac{x^3+2x^2-x+4}{x+5}$

$$
\begin{array}{r|l}
x^3+2x^2-x+4 & x+5 \\
\underline{x^3+5x^2} \quad\quad\quad & \overline{x^2-3x+14} \text{ - частное} \\
-3x^2-x+4 & \\
\underline{-3x^2-15x} \quad & \\
14x+4 & \\
\underline{14x+70} & \\
-66 & \text{- остаток}
\end{array}
$$

Напоминание: $\frac{17}{2} = 8 + \frac{1}{2}$

$f(x) = x^2 - 3x + 14 + \frac{-66}{x+5} = x^2 - 3x + 14 - \frac{66}{x+5}$

Вывод: интегрирование неправильной дроби сводится к интегрированию многочлена и правильной дроби (см. ниже)

б) Разложение правильной дроби в сумму простейших дробей

Опр: Простейшими дробями 2-го типа будем называть дроби вида

$\frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^p}$ $p \in N$ ax^2+bx+c - неразложимый квадратный трехчлен ($D<0$)

Теорема №2:

Любая правильная дробь раскладывается в сумму простейших дробей 1 и 2 типа

Алгоритм разложения

Объясняется на примере

Пример: $f(x) = \frac{x^3+2x^2-x+4}{x^4-5x^3+4x^2}$

Алгоритм:

1 шаг: Разложить знаменатель на множители вида $(ax+b)^p$, $(ax^2+bx+c)^p$ $(D<0)$

$$x^4-5x^3+4x^2=x^2(x^2-5x+4)=x^2(x-1)(x-4)$$

$$D=25-16=9 \quad x_{1,2}=\frac{5\pm3}{2}=1;4$$

Вывод: Получили разложение на множители вида $(ax+b)^p$

$x^2=(1x+0)^2$ $\quad a=1;\ b=0;\ p=2$

$(x-1)=(1x-1)^1$ $\quad a=1;\ b=-1;\ p=1$

$(x-4)=(1x-4)^1$ $\quad a=1;\ b=-4;\ p=1$

2 шаг: Записать формулу разложения с неопределёнными коэффициентами

$$\frac{x^3+2x^2-x+4}{x^4-5x^3+4x^2}=\frac{x^3+2x^2-x+4}{x^2(x-1)(x-4)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x-1}+$$

$$+\frac{D}{x-4} \quad (2)$$

$x^2 \to \frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}$

$(x-1)^1 \to \frac{C}{x-1}$

$(x-4)^1 \to \frac{D}{x-4}$

Правило:

Каждому множителю в разложении знаменателя будет соответствовать сумма простейших дробей по следующему правилу

$$(ax+b)^n \to \frac{A}{ax+b} + \frac{B}{(ax+b)^2} + \frac{C}{(ax+b)^3} \ldots \frac{D}{(ax+b)^n}$$

$$(ax^2+bx+c)^n \to \frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c} + \frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2} \ldots \frac{A_nx+B_n}{(ax^2+bx+c)^n}$$

3 шаг: Найти неопределённые коэффициенты. Сложить простейшие дроби с неопределёнными коэффициентами

$$= \frac{Ax(x-1)(x-4)+B(x-1)(x-4)+Cx^2(x-4)+Dx^2(x-1)}{x^2(x-1)(x-4)}$$

Приравняем их числитель к полученному

$$= Ax(x-1)(x-4)+B(x-1)(x-4)+Cx^2(x-4)+Dx^2(x-1)$$
$$= x^3+2x^2-x+4$$

Из этого равенства можно получить уравнения для отыскания неопределённых коэффициентов

Существует 2 способа получ. этих уравнений

1 способ: Приравнять значение левой и правой части уравнения в нулях знаменателя

$x=0$	$4=4B \Rightarrow B=1$
$x=1$	$6=-3C \Rightarrow C=-2$
$x=4$	$96=48D \Rightarrow D=2$
x^3	$1=A+C+D \Rightarrow A=1$

2 способ: Приравниваем коэф-ты при соответствующих степенях в левой и правой частях

4 шаг: Коэффициенты найдены

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x-1}+\frac{2}{x-4}$$

в) Интегрирование простейших дробей

$$\int\frac{x^3+2x^2-x+4}{x^4-5x^3+4x^2}dx=\int\frac{dx}{x}+\int\frac{dx}{x^2}-2\int\frac{d(x-1)}{x-1}+$$

$$2\int\frac{d(x-4)}{x-4}=\ln|x|-\frac{1}{x}-2\ln|x-1|+2\ln|x-4|+C=$$

$$=\ln\left|\frac{x|x-4|^2}{(x-1)^2}\right|-\frac{1}{x}+C$$

06.03.13

1. Интегрирование тригонометрических выражений

а) универсальная подстановка

$$\int\frac{dx}{1+\cos x}=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}}=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2}{1+t^2}}=\int dt=t+C=tg\frac{x}{2}+C$$

$t=tg\frac{x}{2}$

$$\cos x=\frac{\cos x}{1}=\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\sin x=\frac{\sin x}{1}=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2}$$

$x=2\,arctg\,t$ $\quad\boxed{dx=\frac{2}{1+t^2}dt}$

$$\boxed{\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}\qquad \sin x=\frac{2t}{1+t^2}}$$

б) Подстановка: $t=tg\,x$

Замечание: эту подстановку используют в случае если подынтегральная функция содержит $\cos^2 x$, $\sin^2 x$

$x=arctg\,t$ $\quad dx=\frac{1}{1+t^2}dt$

$1+tg^2x=\frac{1}{\cos^2 x}$ $\quad \cos^2 x=\frac{1}{1+tg^2x}=\frac{1}{1+t^2}$

$\sin^2 x+\cos^2 x=1$ $\quad \sin^2 x=1-\cos^2 x=1-\frac{1}{1+t^2}=\frac{t^2}{1+t^2}$

$dx = \frac{dt}{1+t^2}$

$\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$

$\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}$

$\int \frac{dt}{2+\cos^2 x} = \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{2+\frac{1}{1+t^2}} = \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{3+2t^2}{1+t^2}} =$

$= \int \frac{dt}{3+2t^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+\frac{3}{2}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}\,\text{arctg}\,\frac{t}{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}} + C$

$= \frac{1}{\sqrt{6}}\,\text{arctg}\,\frac{\sqrt{2}\,\text{tg}\,x}{\sqrt{3}} + C$

б) $\int \sin 2x \cos 3x \, dx =$

$$\boxed{\begin{aligned} \sin\alpha\cos\beta &= \tfrac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)) \\ \cos\alpha\cos\beta &= \tfrac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)) \\ \sin\alpha\sin\beta &= \tfrac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)) \end{aligned}}$$

$= \frac{1}{2}\int (\sin 5x - \sin(-x))\,dx = \frac{1}{2}\int \sin 5x\,dx -$

$- \frac{1}{2}\int \sin x\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}\int \sin 5x\,d5x - \frac{1}{2}\int \sin x\,dx =$

$= -\frac{1}{10}\cos 5x + \frac{1}{2}\cos x + C$

г) Использование формулы понижения степени

$$\boxed{\begin{aligned} \cos^2 x &= \tfrac{1}{2}(1+\cos 2x) \\ \sin^2 x &= \tfrac{1}{2}(1-\cos 2x) \\ \sin x\cos x &= \tfrac{1}{2}\sin 2x \end{aligned}}$$

$\int \cos^4 x\,dx = \int (\cos^2 x)^2\,dx = \int \frac{1}{2}(1+\cos 2x)^2\,dx =$

$= \frac{1}{4}\int(1+2\cos 2x+\cos^2 2x)dx = \frac{1}{4}\int(1+2\cos 2x+$

$+\frac{1}{2}(1+\cos 4x))dx = \frac{1}{4}\int(\frac{3}{2}+2\cos 2x+\frac{1}{2}\cos 4x)dx$

$= \frac{1}{4}(\frac{3}{2}x+\sin 2x+\frac{1}{8}\sin 4x)+C$

б) Использование метода подведения под знак дифференциала

$\int \sin^2 x\cos^3 x\,dx = \int \sin^2 x\cos^2 x\cos x\,dx =$

$= \int \sin^2 x(1-\sin^2 x)\,d\sin x = \int u^2(1-u^2)\,du =$

$= \int(u^2-u^4)\,du = \frac{u^3}{3}-\frac{u^5}{5}+C = \frac{\sin^3 x}{3}-\frac{\sin^5 x}{5}+C$

$\int \frac{\sin^2 x}{\cos x}dx = \int \frac{\sin^2 x\cos x}{\cos^2 x}dx = \int \frac{\sin^2 x\,d\sin x}{1-\sin^2 x} =$

$= \int \frac{u^2\,du}{1-u^2} = -\int \frac{u^2}{u^2-1}du = -\int \frac{(u^2-1)+1}{u^2-1}du =$

$= -\int(1+\frac{1}{u^2-1})du = -(u+\frac{1}{2}\ln|\frac{u-1}{u+1}|)+C =$

$= -\sin x-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin x-1}{\sin x+1}\right|+C$

2. Гиперболические функции

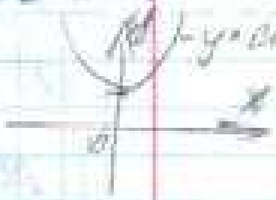
Опр: Гиперболическим cos-ом наз-ся функция

$ch x = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ $\quad ch(-x) = ch(x) \Rightarrow$ это чётная функция

$y' = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ $y' = 0$ $e^x = e^{-x}$ $x = -x$

$2x = 0$ $x = 0$

$$\underset{\searrow}{-} \quad 0 \quad \underset{\nearrow}{+}$$



$y'' = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) > 0 \Rightarrow$ график $\cup$

Опр: гиперболическим sin-ом наз-ся $shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ $y' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} > 0$

y - возрастающая нечетная функция

$sh(-x) = \frac{e^{-x} - e^{x}}{2} = -shx \Rightarrow$

$y'' = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ $y'' = 0$ при $x = 0$ $\quad - \quad 0 \quad +$

$\sin 0 = 0$ $\cos 0 = 1$

$sh0 = 0$ $ch0 = 1$

Формулы тригонометрии	Формулы гиперболич
1) $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$	1) $ch^2 x - sh^2 x = 1$
2) $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$	2) $ch2x = ch^2 x + sh^2 x$
3) $(\cos x)' = -\sin x$	3) $(chx)' = shx$
4) $(\sin x)' = \cos x$	4) $(shx)' = chx$
5) $tgx = \frac{\sin x}{\cos x}$	5) $thx = shx/chx$
6) $ctg = \cos x/\sin x$	6) $cthx = chx/shx$
7) $\int \cos x\,dx = \sin x$	7) $\int chx = shx + C$
8) $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$	8) $\int shx\,dx = chx + C$
9) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$	9) $\int dx/ch^2 x = thx + C$
10) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$	10) $\int \frac{dx}{sh^2 x} = -cthx + C$

$y = \arccos\frac{1}{3}$

$0 \le y \le \pi$

$\cos y = \frac{1}{3}$

$\sin y = \sqrt{1 - \cos^2 y} = \sqrt{1 - \frac{1}{9}}$