$= 2\int \cos\sqrt{x}\, d\sqrt{x} = 2\int \cos u\, du = 2\sin u + C =$

$= 2\sin\sqrt{x} + C$

1. Метод подведения под знак дифф-ла 20.02.13

Пример:

1) $\int \frac{e^x}{\sqrt{2-3e^x}}dx = \int e^x \frac{1}{\sqrt{2-3e^x}}dx = \int \frac{de^x}{\sqrt{2-3e^x}} =$

$\boxed{\frac{a}{b} = a\cdot\frac{1}{b}}$ $= -\frac{1}{3}\int\frac{d(-3e^x)}{\sqrt{2-3e^x}} = -\frac{1}{3}\int\frac{d(2-3e^x)}{\sqrt{2-3e^x}} =$

$= -\frac{1}{3}\int\frac{du}{\sqrt{u}} = -\frac{1}{3}2\sqrt{u} = -\frac{1}{3}2\sqrt{u} + C = -\frac{2}{3}\sqrt{2-3e^x} + C$

2) $\int \frac{e^{\frac{5}{x}}}{x^2}dx = \int e^{\frac{5}{x}}\frac{1}{x^2}dx = \int e^{\frac{5}{x}} d\left(-\frac{1}{x}\right) =$

$= -\int e^{\frac{5}{x}} d\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{5}\int e^{\frac{5}{x}} d\left(\frac{5}{x}\right) = -\frac{1}{5}\int e^u du =$

$= -\frac{1}{5}e^{\frac{5}{x}} + C$

2. Интегрирование по частям

Формула $\boxed{\int u\,dv = uv - \int v\,du}$

Вывод: $(uv)' = u'v + uv' \Rightarrow \int (uv)'dx = uv + C$

$\int (uv)'dx = \int (u'v + uv')dx = \int u'v\,dx + \int uv'dx \Rightarrow$

$\Rightarrow \int u'v\,dx + \int uv'dx = uv + C$

$\int uv'dx = uv - \int vu'dx + C = \int u\,dv =$

$= uv - \int v\,du.$

Замечание:

Интегралы, требующие для своего решения метода подведения под знак дифференциала и интегрирования по частям, начинают решать сначала: если множители вносят под знак дифференциала, если после внесения множителя под интегральное выражение появляются сложные выражения, то нужно использовать метод подведения под знак дифференциала. Если сложно, то используют метод интегрирования по частям.

Пример: $\int \frac{\ln x}{x^3}dx = \int \ln x \cdot x^{-3} dx =$ $\frac{x^{-2}}{-2}$

$= \int \ln x \, d\left(\frac{x^{-2}}{-2}\right)$ (используем ф-лу интегрир. по частям)

$= \ln x \left(\frac{x^{-2}}{-2}\right) - \int \frac{x^{-2}}{-2} d \ln x = -\frac{\ln x}{2x^2} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{x}dx$

Замечание:

При внесении функции под знак дифф-ла меняют знак диф-ла, а при выносе из под диф-ла меняют производную

$= -\frac{\ln x}{2x^2} + \frac{1}{2}\int x^{-3}dx = -\frac{\ln x}{2x^2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^{-2}}{-2} + C =$

$= -\frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} + C$

3. Классификация задач, решаемых при помощи формулы интегрирования по частям

а) Безальтернативная ситуация - ситуация, под знак диф-ла вносить только 1 множитель

$$\int x \operatorname{arctg} x\,dx = \int \operatorname{arctg} x \, d\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x -$$

$$- \int \frac{x^2}{2}\, d(\operatorname{arctg} x) = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}x - \frac{1}{2}\int\frac{(x^2+1)-1}{x^2+1}\,dx = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}x - \frac{1}{2}\left(\int dx - \int\frac{dx}{x^2+1}\right)$$

$$= \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}x + C$$

б) Альтернативная ситуация (внесение двух множителей)

<u>Замечание</u>: под знак диф-ла вносят <u>не</u> многочлен.

Таблица примеров многочлена

N	Степень	Многочлен
1	2	$2x^2-1$
2	2	x^2
3	1	$x+5$
4	1	$5x$
5	0	2

$\int (2x-1)\sin 2x\,dx^{\,-\frac{1}{2}\cos 2x} =$

$\int 2x-1\,dx = \int 2x\,dx - \int dx = 2\frac{x^2}{2} - x + C = x^2 - x + C$

$\int \sin 2x\,dx = \int \frac{1}{2}\sin 2x\,dx = -\frac{1}{2}\cos 2x + C$

$= \int \overset{u}{(2x-1)}\, d\overset{v}{\left(-\frac{\cos 2x}{2}\right)} = -\frac{\cos 2x}{2}(2x-1) -$

$- \int -\frac{\cos 2x}{2}\, d(2x-1) = -\frac{\cos 2x}{2}(2x-1) +$

$+ \frac{1}{2}\cdot 2\int \cos 2x\,dx = -\frac{\cos 2x}{2}(2x-1) + \frac{1}{2}\sin 2x$

в) Ситуация с одним множителем

$\int \ln x\, dx^{\,v} = x\ln x - \int x\, d\ln x^{\,\frac{1}{x}} = x\ln x -$

$- \int dx = x\ln x - x + C$

г) Ситуация с уравнением

$\int e^x \cos x\,dx = \int \frac{\cos x}{u}\, d\underset{v}{e^x} = \cos x \cdot e^x -$

$- \int e^x\, d\cos x^{\,-\sin x} = \cos x \cdot e^x + \int e^x \sin x\,dx =$

$= \cos x \cdot e^x + \int \sin x\, de^x = \cos e^x + \sin e^x -$

$- \int e^x d\sin x = \cos x\, e^x + \sin e^x - \int e^x \cos x\,dx$

$z = \int e^x \cos x\,dx \quad z = (\cos x + \sin x)e^x - z$

$2z = (\cos x + \sin x)e^x \quad z = \frac{\cos x + \sin x}{2}e^x + C$

$$\int e^x \cos x\,dx = \frac{\cos x + \sin x}{2}\, e^x + C$$

4. Метод замены переменной

Формула: Пусть функция задана формулой $x = \omega(t)$ — дифференцируемая функция, имеющая обратную функцию $t = \omega^{-1}(x)$, тогда

$$\int f(x)\,dx = \int f(\omega(t))\,d\omega(t) = \int f(\omega(t))\,\omega'(t)\,dt \,\Big|_{t=\omega^{-1}(x)}$$

Примеры.

① $\displaystyle\int \frac{dx}{e^x - 1} = \int \frac{d(\ln(t+1))}{t} = \int \frac{\frac{1}{t+1}\,dt}{t} = \int \frac{dt}{t(t+1)} =$

$t = e^x - 1$
$t + 1 = e^x$
$x = \ln(t+1)$

$\displaystyle = \int \frac{(1+t) - t}{t(t+1)}\,dx = \int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right)dx =$
$= \ln|t| - \ln|t+1| + C = \ln|e^x - 1| -$
$\displaystyle - \ln e^x + C = \ln\left|\frac{e^x - 1}{e^x}\right| + C$

② $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x-1}}\,dx = \int \frac{t^2+1}{t}\,d(t^2+1) = 2\int (t^2+1)\,dx =$

$t = \sqrt{x-1}$
$t^2 = x - 1$
$t^2 + 1 = x$

$\displaystyle = 2\left(\frac{t^3}{3} + t\right) + C = 2\left(\frac{(\sqrt{x-1})^3}{3} + \sqrt{x-1}\right) + C$

17.02.13

1. Интегралы вида $\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx$, $\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ интеграл с квадратным трехчленом в знаменателе.

Замена: $t = \frac{(ax^2+bx+c)'}{2}$

Пример: $\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2-4x+5}}dx =$

$t = \frac{(x^2-4x+5)'}{2} = \frac{2x-4}{2} = x-2 \quad x = t+2$

$x+3 = t+2+3 = t+5$

$x^2-4x+5 = (t+2)^2 - 4(t+2) - 5 = t^2+4t+4-4t - 8+5 = t^2+1$

Точка самоконтроля: после раскрытия скобок слагаемые с t должно сократиться

$dx = d(t+2) = (t+2)'dt = dt$

$= \int \frac{t+5}{\sqrt{t^2+1}}dt = \int \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}dt + \int \frac{5}{\sqrt{t^2+1}}dt = \int \frac{\frac{dt^2}{2}}{\sqrt{t^2+1}} +$

$+ 5\ln|t+\sqrt{t^2+1}| = \frac{1}{2}\int \frac{d(t^2+1)}{\sqrt{t^2+1}} + 5\ln|t+\sqrt{t^2+1}| =$

$= \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{t^2+1} + 5\ln|t+\sqrt{t^2+1}| + C = \sqrt{x^2-4x+5} +$

$+ 5\ln|x-2+\sqrt{x^2-4x+5}| + C$