Интегральное исчисление функции одной переменной

Дифференциальные уравнения

Неопределённый интеграл

1. Понятие первообразной

Опр: Функция $F(x)$ наз-ся первообразной для функции $f(x)$ на (a,b) если $F'(x) = f(x)$ на (a,b)

Примеры: 1) $f(x) = x$ $\quad F(x) = \frac{x^2}{2}$, т.к.

$$\left(\frac{x^2}{2}\right)' = \frac{1}{2}(x^2)' = \frac{1}{2}\,2x = x$$

$$F_2(x) = \frac{x^2}{2} - 5 \quad \text{т.к.} \quad \left(\frac{x^2}{2} - 5\right)' = x$$

Теорема Пусть $F_1(x)$, $F_2(x)$ - первообразные для $f(x)$, тогда $F_2(x) = F_1(x) + C$

Доказательство

рассмотрим $\varphi(x) = F_2(x) - F_1(x)$

$$\varphi'(x) = (F_2 - F_1)' = F_2' - F_1' = f(x) - f(x) = 0$$

Теорема Лагранжа для ф-ии $f(x)$

Пусть x_0 - фиксированная точка
x - произвольная

$$\varphi(x) - \varphi(x_0) = \varphi'(c)(x - x_0) = 0 \Rightarrow$$ для произвольного x $\Rightarrow$

$$\varphi(x) = \varphi(x_0) = const$$

$F_2 - F_1 = const \Rightarrow F_2 = F_1 + const$

Условие существования

Теорема

Если $f(x)$ - непрерывная функция, то существует первообразная $f(x)$

2. Понятие неопределённого интеграла

Опр: Неопред. интеграл функции $f(x)$ наз-ся множество всех её первообразных.

Обозначение неопределённого интеграла

$$\int f(x)dx$$

Комментарии

1) $\int$ - символ интеграла, интеграл используется для вычисления фигур

2) $f(x)$ - подинтегральная функция

3) $f(x)dx$ - называется подинтегральным выражением

Иногда подинтегр. выр. записано в виде $f(x)$ и $u(x)$, что означает $f(x)u(x)dx$

4) С рами dx

1) dx - правая скобка

2) dx - указывает на переменное интеграл.

(очень часто подынтегр. функция зависит от параметров)
3) Их играют основную роль в методах интегрирования

Теорема (о виде неопред. интеграла)
Если $F(x)$ - первообразная для $f(x)$, то $\int f(x)dx = F(x) + const$, где C-произвольная константа.

3. Таблица простейших интегралов

1) $\int dx = x + C$;
2) $\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C$;
3) $\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C$;
4) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$;
5) $\int x^p dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} + C$, $p \neq -1$
6) $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$
7) $\int e^x dx = e^x + C$
8) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
9) $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$
10) $\int \cos x\,dx = \sin x + C$
11) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tg\,x + C$
12) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctg\,x + C$
13) $\int tg\,x\,dx = -\ln|\cos x| + C$
14) $\int ctg\,x\,dx = \ln|\sin x| + C$
15) $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$
16) $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$
17) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = arcsin \frac{x}{a} + C$
18) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$

Проверка (17) формулы

$$\left(arcsin \frac{x}{a}\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{\sqrt{\frac{a^2-x^2}{a^2}}} \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}} \cdot \frac{1}{a} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

4. Свойства неопределенного интеграла

а) $\int c\cdot u(x)dx = c\int u(x)dx$

б) $\int (u(x) \pm v(x))dx = \int u(x)dx \pm \int v(x)dx$

Замечание:

На свойствах "а" и "б" основан метод "разложения"

в) Любая табличная формула остается справедливой если х заменить на любую дифференцируемую $u(x)$

Док-во:

Пусть $\int f(x)dx = F(x)+C$ - некоторая табличная формула

Док-во формулы

$\int f(u(x))du(x) = F(u(x))+C$ (*)

действительно из табличной формулы, что $\Rightarrow F'(x) = f(x)$, тогда

$(F(u(x)))' = F'(u(x))\cdot u'(x) = \underline{f(u(x))\cdot u'(x)}$

Но $\int f(u(x))du(x) = \int \underline{f(u(x))u'(x)dx} \Rightarrow$

формула справедлива (*)

Примеры: $\int \cos x\,dx = \sin x + C$ — табл. ф-ла

$\int \cos\sqrt{x}\,d\sqrt{x} = \sin\sqrt{x} + C$ — справедл. ф-ла

$\int \cos(tg\,x)\,d(tg\,x) = \sin(tg\,x) + C$ — справедл. ф-ла

Замечание:

На свойствах 6° основан метод интегрирования, называемый методом подведения под знак дифференциала.

5. Метод разложения

Суть: Используя прием разложения выражения в сумму (разность) простых, используем свойства (и т.д.)

свойства неопред. интеграла 3 и 4)

Пример: $\int(\sqrt{x}-2)(3+x^2)\,dx = \int(3\sqrt{x} + x^2\sqrt{x} - 6 -$

$-2x^2)\,dx = \int 3\sqrt{x}\,dx + \int x^{5/2}\,dx - \int 6\,dx -$

$-\int 2x^2\,dx = 3\frac{x^{3/2}}{3/2} + \frac{x^{7/2}}{7/2} - 6x - 2\frac{x^3}{3} + C =$

$= 2\sqrt{x^3} + \frac{2}{7}\sqrt{x^7} - 6x - \frac{2}{3}x^3 + C$

Замечание:

Произвольная константа (const) всегда исчезает под знаком интеграла.

2) $\int \frac{\cos^2 x - 3\sin x}{\cos x}\,dx = \int\left(\frac{\cos^2 x}{\cos x} - \frac{3\sin x}{\cos x}\right)dx =$

$= \int \cos x\,dx - 3\int tg\,x\,dx = \sin x + 3\ln|\cos x| + C$

6. Метод подведения под знак дифференциала

Метод основан на преобразованиях дифференциала и на свойстве неопределённого интеграла в пункте 6)

Преобразование дифференциала

1) $du = d(u \pm C)$

2) $d(cu) = c\,du$

3) $du = \frac{1}{c} d(cu)$

4) $f\,dx = dF(x)$ - внесение множителя под знак дифференциала

Пример

$dx^2 = d(x^2 - 3) = d(x^2 + 5)$

$d\frac{x^2}{2} = \frac{1}{2} dx^2$

$dx^2 = \frac{1}{5} d(5x^2) = \frac{1}{3} d(3x^2)$

$x\,dx = d\frac{x^2}{2}$ $\sin x\,dx = d(-\cos x)$ $\frac{1}{x}dx = d\ln x$

Примеры:

1) $\int e^{3x-2}dx = \frac{1}{3}\int e^{3x-2} d3x = \frac{1}{3}\int e^{3x-2} d(3x-2) =$

$= \frac{1}{3}\int e^u du = \frac{1}{3}e^u + C = \frac{1}{3}e^{3x-2} + C,$

2) $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = \int \cos\sqrt{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int \cos\sqrt{x}\, d(2\sqrt{x}) =$

$= 2\int \cos\sqrt{x}\,d\sqrt{x} = 2\int \cos u\,du = 2\sin u + C =$

$= 2\sin\sqrt{x} + C$

1. Метод подведения под знак диф-ла 20.02.13

Пример:

1) $\int \frac{e^x}{\sqrt{2-3e^x}}dx = \int e^x \frac{1}{\sqrt{2-3e^x}}dx = \int \frac{de^x}{\sqrt{2-3e^x}} =$

$\boxed{\frac{a}{b} = a\cdot\frac{1}{b}}$ $= -\frac{1}{3}\int\frac{d(-3e^x)}{\sqrt{2-3e^x}} = -\frac{1}{3}\int\frac{d(2-3e^x)}{\sqrt{2-3e^x}} =$

$= -\frac{1}{3}\int\frac{du}{\sqrt{u}} = -\frac{1}{3}\,2\sqrt{u} = -\frac{1}{3}\,2\sqrt{u} + C = -\frac{2}{3}\sqrt{2-3e^x} + C$

2) $\int \frac{e^{\frac{5}{x}}}{x^2}dx = \int e^{\frac{5}{x}}\frac{1}{x^2}dx = \int e^{\frac{5}{x}}d\left(-\frac{1}{x}\right) =$

$= -\int e^{\frac{5}{x}}d\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{5}\int e^{\frac{5}{x}}d\left(\frac{5}{x}\right) = -\frac{1}{5}\int e^u du =$

$= -\frac{1}{5}e^{\frac{5}{x}} + C$

2. Интегрирование по частям

Формула $\boxed{\int u\,dv = uv - \int v\,du}$

Вывод: $(uv)' = u'v + uv' \Rightarrow \int (uv)'dx = uv + C$

$\int (uv)'dx = \int (u'v + uv')dx = \int u'v\,dx + \int uv'\,dx \Rightarrow$

$\Rightarrow \int u'v\,dx + \int uv'\,dx = uv + C$

$\int uv'\,dx = uv - \int vu'\,dx + C = \int u\,dv =$

$= uv - \int v\,du.$